

Scuola di Dottorato Leonardo da Vinci – a.a. 2010/11

## **LASER: CARATTERISTICHE, PRINCIPI FISICI, APPLICAZIONI**

Versione 3 – Nov 11 – <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

### **Parte 5**

### **Pompaggio ed amplificazione**

### **in mezzi attivi**

Me 16.11.11 16-18 aula DIC

## SOMMARIO

- Problema: come ottenere inversione di popolazione e quindi amplificazione?  
pompaggio  
equazioni di bilancio con pompaggio  
master equation per sistema a 3 livelli pompato
- Pompaggio:  
conseguenze  
metodi di pompaggio in vari tipi di laser e tipologie di laser

Obiettivo : mostrare che l'emissione stimolata può essere sfruttata per amplificare radiazione a patto di avere pompaggio

Obiettivo secondario: presentare alcuni tipi di laser sistematizzandoli in funzione del tipo e delle tecnologie di pompaggio

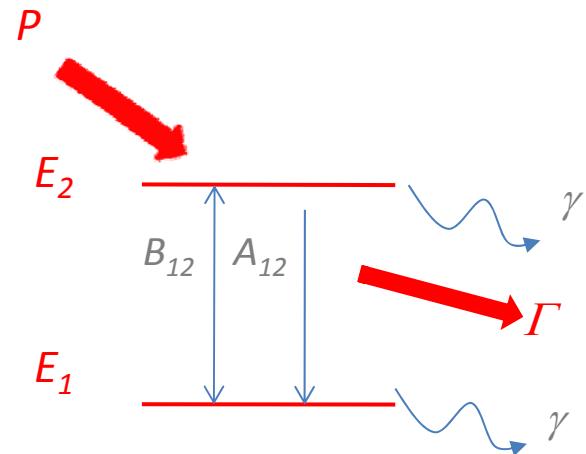
## SISTEMA A 2 LIVELLI CON POMPAGGIO

Amplificazione → inversione di popolazione:  $\Delta N = N_2 - N_1 > 0$

Sistema a due livelli (di per sé) → no inversione!

Necessario sistema non termodinamico per avere inversione → **POMPAGGIO**

nota: sistema non più in equilibrio termodinamico → temperatura *negativa*



Aggiungo:

- Termine di pompaggio  $P$  (costante)
- Rate di perdita di fotoni  $\Gamma$

Suppongo:

- $g_1 = g_2 \rightarrow B_{12} = B_{21} = B$  (ass/em stim)
- $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$  (rate perdita popolazione)
- $A_{21} = A$  (em spont)

Introduco:

- $F$  densità di fotoni (fotoni per unità di volume) →  $u_\nu = F h \nu$

## RATE EQUATIONS CON POMPAGGIO

$$\frac{dN_2}{dt} = \textcolor{red}{P} - BFhvN_2 + BFhvN_1 - \textcolor{green}{AN}_2 - \gamma(N_2 - N_2^0)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = BFhvN_2 - BFhvN_1 + \textcolor{green}{AN}_2 - \gamma(N_1 - N_1^0)$$

$$\frac{dF}{dt} = \textcolor{red}{BFhvN_2 - BFhvN_1 - \Gamma F}$$

Nota: vale solo in presenza di  $P$

$$\frac{d\Delta N}{dt} = P - 2BFhv\Delta N - 2AN_1 - \gamma(\Delta N - \Delta N^0)$$

$$\frac{dF}{dt} = BFhv\Delta N - \Gamma F$$

Pompaggio può condurre ad inversione di popolazione:

$$\boxed{\Delta N^0 \approx -N_1}$$

$$\Delta N_{staz} = \frac{P + \gamma\Delta N^0 - 2AN_2}{2BFhv + \gamma} \quad \square \quad \frac{P - \gamma N_1 - 2AN_2}{2BFhv + \gamma}$$

$\Delta N > 0 \rightarrow P > 2AN_2 + \gamma N_1$   
**Pompaggio deve superare le perdite di popolazione ma può portare a  $\Delta N > 0$**

Densità di energia e.m. stazionaria (a soglia):

$$\frac{dF}{dt} = 0 \leftrightarrow \Delta N_{thr} = \frac{\Gamma}{Bhv}$$

**La densità di fotoni è stazionaria quando l'inversione di popolazione è al valore di soglia**

Cfr. moto in presenza di attrito viscoso

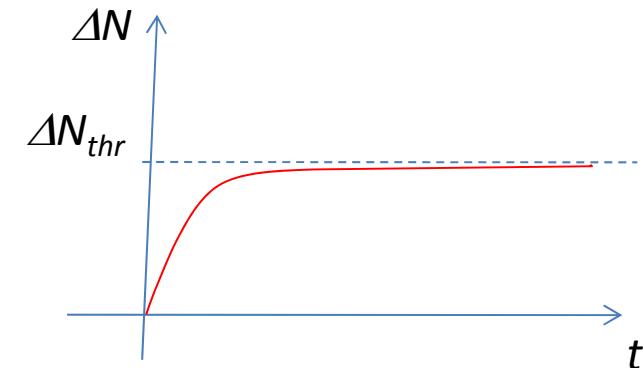
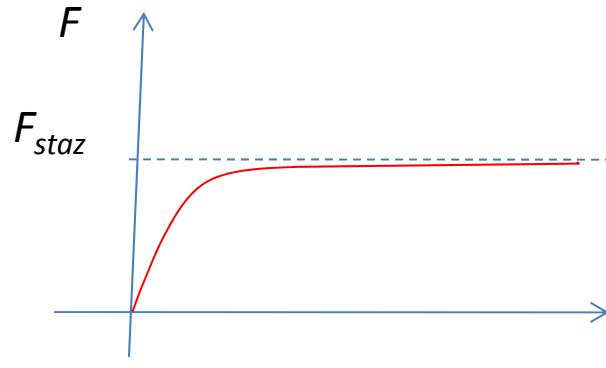
## INVERSIONE DI POPOLAZIONE A SOGLIA

Inizialmente non ho fotoni  $\rightarrow F = 0$  e  $\Delta N = \Delta N^0$

Il pompaggio produce inversione  $\rightarrow$

$\rightarrow F$  aumenta

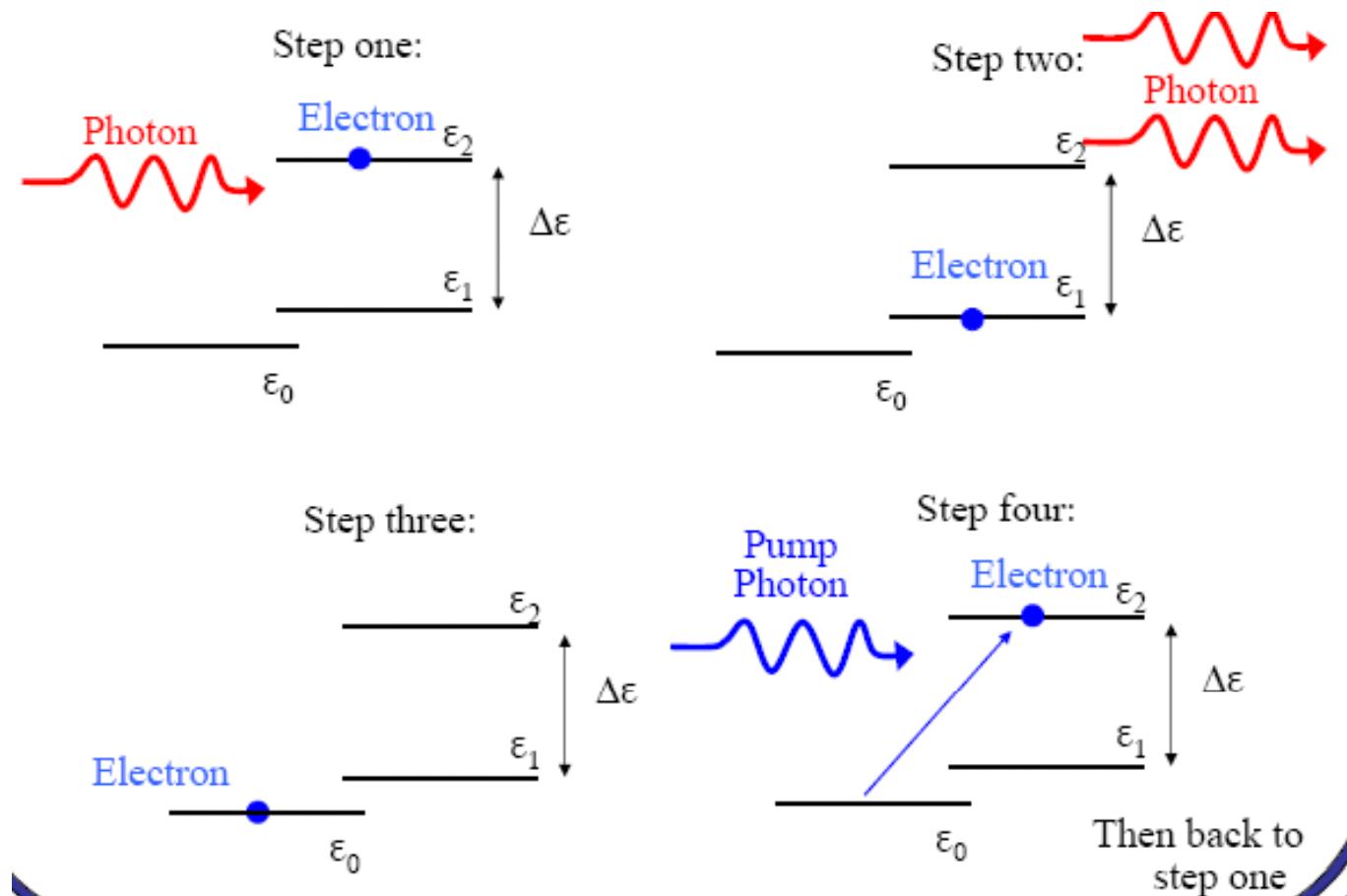
$\rightarrow \Delta N$  raggiunge il valore di soglia e **si stabilizza**



Operazione laser stabile raggiunta in tempi molto brevi (dominati da tempo di transito del risonatore, come vedremo, e da vite medie caratteristiche, 1-100 ns typ.)

Necessario trovare metodo per il pompaggio: non basta inviare radiazione risonante in sistema a due livelli, occorrono più livelli (almeno tre o più)

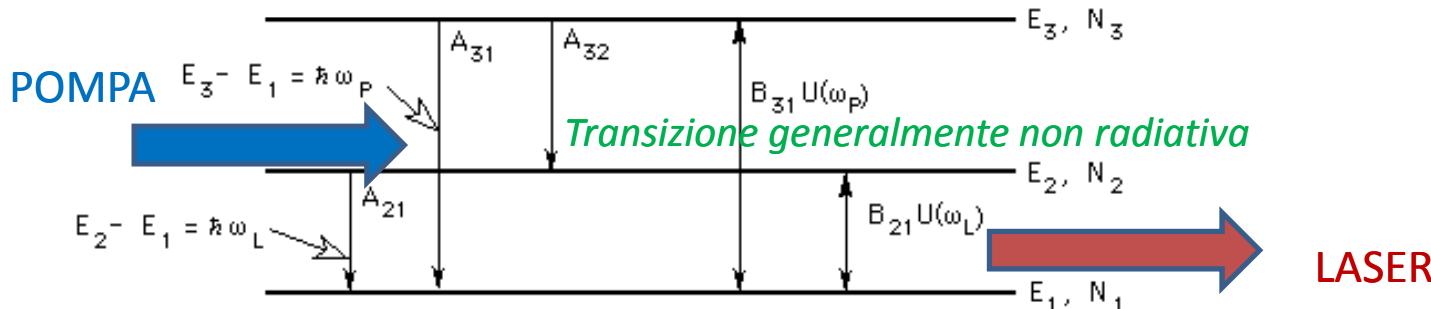
## POMPAGGIO IN SISTEMI A PIÙ LIVELLI



## POMPAGGIO IN SISTEMI A 3 LIVELLI

Occorre sistema a più di due livelli (idealmente ne bastano tre)

ESEMPIO: A "PUMPED" THREE-LEVEL QUANTUM SYSTEM



**A<sub>32</sub> >> A<sub>21</sub>**

Pompa (ottica) a  $\nu_p = (E_3 - E_1)/h \rightarrow$  popola livello  $E_3$   
 $\rightarrow$  popolazione tende a passare sul livello  $E_2$   
 $\rightarrow N_2 > N_1$  (inversione ed azione laser a  $\nu_l = (E_2 - E_1)/h$ )

Master rate equations which include "laser" and "pumping" radiation, but in which thermal radiation is neglected:

$$\frac{d}{dt}N_1 = N_3 A_{31} + N_2 A_{21} + (N_3 - N_1) B_{31} U(\omega_p) + (N_2 - N_1) B_{21} U(\omega_l) \quad [ V-1a ]$$

$$\frac{d}{dt}N_2 = N_3 A_{32} - N_2 A_{21} - (N_2 - N_1) B_{21} U(\omega_l) \quad [ V-1b ]$$

$$\frac{d}{dt}N_3 = -N_3 A_{31} - N_3 A_{32} - (N_3 - N_1) B_{31} U(\omega_p) \quad [ V-1c ]$$

# MASTER EQUATIONS PER SISTEMA A 3 LIVELLI I

Of course, only two of these equations are independent, since we assume that there are a fixed number of systems  $N$  distributed over these energy levels. In what follows, we define

$$R = U(\omega_F) B_{31} (N_1 - N_3)/N \quad \text{Pumping rate}$$

as the pumping rate with  $N_0 = N - N_1 - N_3$ .

We now study the steady state solutions of two independent rate equations -- i.e.

$$\begin{aligned} 0 &= N_3 A_{32} - N_2 A_{21} - (N_2 - N_1) B_{21} U(\omega_I) \\ 0 &= -N_3 (A_{31} + A_{32}) - (N_3 - N_1) B_{31} U(\omega_F) \approx -N_3 (A_{31} + A_{32}) + RN \end{aligned} \quad [V-2a]$$

which may be written

$$\begin{aligned} N_1 [A_{32} - B_{21} U(\omega_I)] + N_2 [A_{32} + A_{21} + B_{21} U(\omega_I)] &= N A_{32} \\ N_1 [A_{31} + A_{32}] + N_2 [A_{31} + A_{32}] &= N (A_{31} + A_{32}) - R N \end{aligned} \quad [V-2b]$$

By messy, but trivial algebra, we find

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{N[R(A_{32} + A_{21} + B_{21} U(\omega_I)) - (A_{31} + A_{32})(A_{21} + B_{21} U(\omega_I))]}{[A_{31} + A_{32}][A_{21} + 2B_{21} U(\omega_I)]} \\ N_2 &= \frac{N[R(A_{32} - B_{21} U(\omega_I)) + (A_{31} + A_{32})B_{21} U(\omega_I)]}{[A_{31} + A_{32}][A_{21} + 2B_{21} U(\omega_I)]} \end{aligned} \quad [V-3]$$

Therefore, the all important population difference may be expressed as

$$N_2 - N_1 = \frac{N[R(2A_{32} + A_{21}) - A_{21}(A_{31} + A_{32})]}{[A_{31} + A_{32}][A_{21} + 2B_{21} U(\omega_I)]} \quad [V-4a]$$

or, with regrouping of terms, as

**Population inversion @ steady state**

$$\begin{aligned} N_2 - N_1 &= \frac{N[R(2A_{32} + A_{21}) - A_{21}(A_{31} + A_{32})]}{A_{21}[A_{31} + A_{32}] \left[ 1 + \frac{2B_{21} U(\omega_I)}{A_{21}} \right]} \\ &= \frac{N[R(2A_{32} + A_{21}) - A_{21}(A_{31} + A_{32})]}{A_{21}[A_{31} + A_{32}] \left[ 1 + \frac{I(z, \omega_I)}{I_{opt}} \right]} \end{aligned} \quad [V-4b]$$

Laser :

sione 3

8

## MASTER EQUATIONS PER SISTEMA A 3 LIVELLI II

where  $I_{\text{ext}} = (c/n)(A_{21}/2B_{11})$ . Since the spatial change in the Poynting vector associated with a beam propagating through the laser medium is equal to the rate of energy dens: the beam, we can show that

$$\frac{1}{I(z, \omega)} \frac{d}{dz} I(z, \omega) = -(N_1 - N_2)(c/n)(\hbar \omega B_{21})(F(\omega)/V) \quad [ V-5 ]$$

where  $F(\omega)$  is the *line shape* function of the  $E_2 - E_1$  absorption line. Using Equation [ V-4b ], we may write

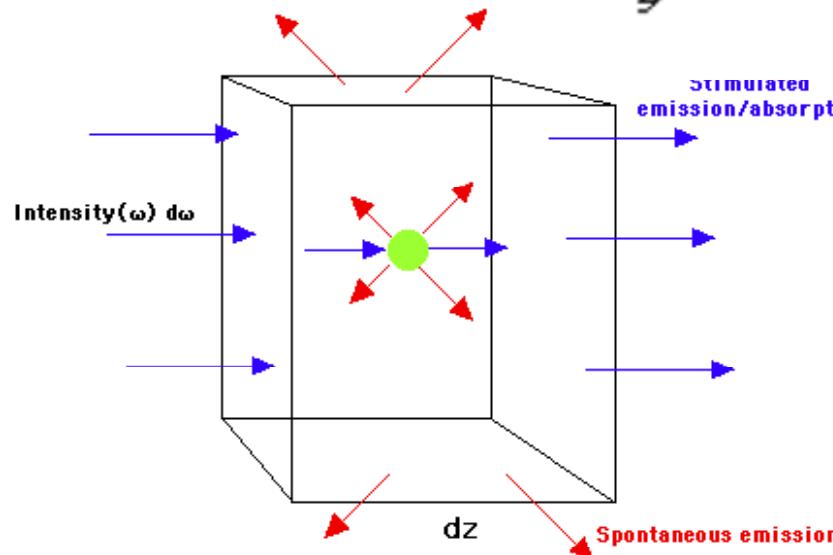
e.m. intensity in the active (pumped) medium

$$\frac{1}{I(z, \omega)} \frac{d}{dz} I(z, \omega) = \frac{R(2A_{32} + A_{21}) - A_{21}(A_{31} + A_{32})}{A_{21}[A_{31} + A_{32}]} \left( \frac{c}{n} \right) \frac{N \hbar \omega B_{21} F(\omega)}{V} \quad [ V-6 ]$$

Thus, we have a interesting and useful model for the "gain behavior" (growth in intensity with position) of a beam as a function of initial intensity

Gain of the active (pumped) medium

$$G = \frac{R(2A_{32} + A_{21}) - A_{21}(A_{31} + A_{32})}{A_{21}[A_{31} + A_{32}]} \left( \frac{c}{n} \right) \frac{N \hbar \omega B_{21} F(\omega)}{V} \quad [ V-7b ]$$



$$\ln\left(\frac{I(z, \omega)}{I_0}\right) + \frac{I(z, \omega) - I_0}{I_{\text{ext}}} = Gz \quad [ V-8 ]$$

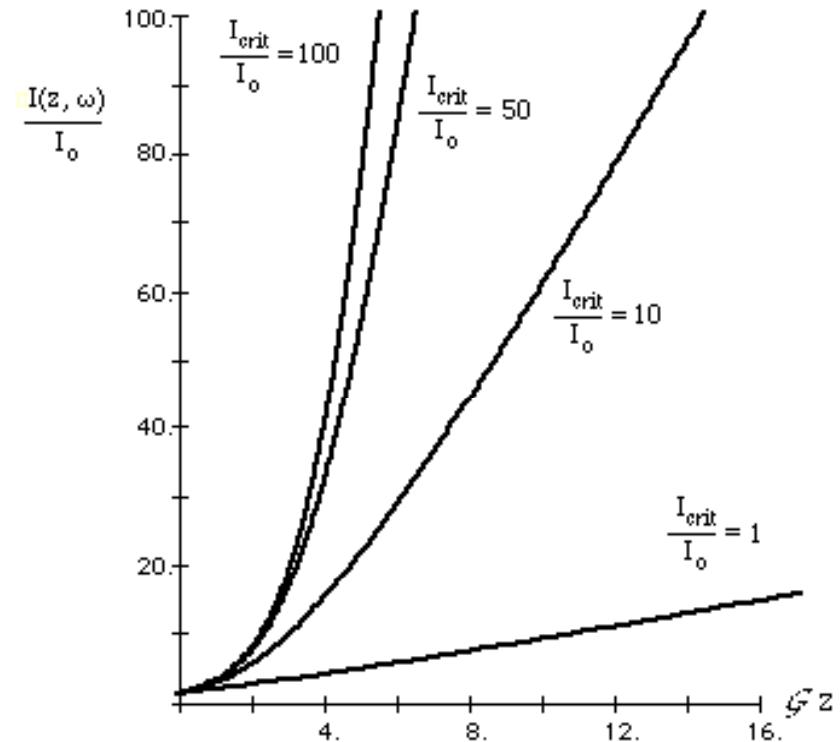
$G > 0$  (per opportuna scelta parametri) →  
Amplificazione intensità di radiazione  
dimostrata in sistema a 3 livelli con pompa

## GUADAGNO DEL SISTEMA A 3 LIVELLI

For  $I_p \ll I_{crit}$   $I(z, \omega) = I_p \exp(-\mathcal{G}z)$  "Inverse Beer's Law"

For  $I_p \gg I_{crit}$   $I(z, \omega) = I_p + I_{crit} \mathcal{G}z$  Linear regime

$I_{crit} = I_S$  : dipende dal sistema considerato  
 $I_p$  : dipende dall'intensità di pompa



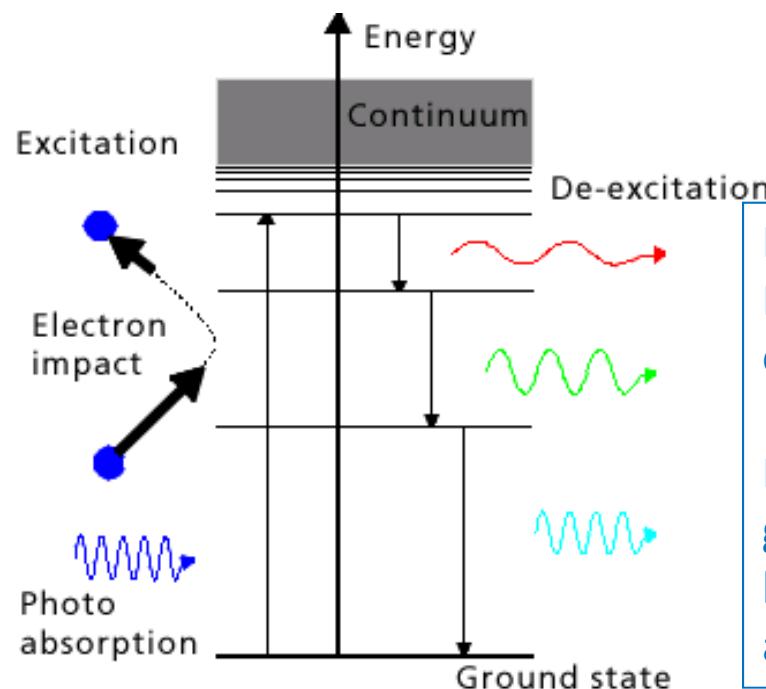
Diversi regimi di amplificazione possono essere ottenuti in funzione della pompa e delle caratteristiche del sistema

## MECCANISMI DI POMPAGGIO

Meccanismi di pompaggio sono specifici per ogni tipo di laser

Principalmente:

- Metodi “puramente” **ottici** (sorgente di pompa “separata”)
- Metodi “**mediati**” (eccitazione ottenuta da fotoni generati nello stesso mezzo attivo oppure prodotta da collisioni)



In ogni caso:  
Pompa trasferisce energia al sistema, in genere di origine elettrica

Efficienza di pompaggio rientra nell'efficienza generale dei sistemi (generalmente decresce con la potenza massima anche a causa di impianti accessori, e.g., raffreddamento)

## TIPI DI LASER

Mezzo attivo (sistema materiale con livelli discreti pompato in modo da produrre amplificazione) è componente essenziale per laser

Una prima classificazione può essere fatta basandosi sullo stato fisico del mezzo attivo

Mezzi attivi solidi:

Rubino, Nd:YAG, ioni di terre rare, centri di colore, Ti:Sa, laser a diodo (li esamineremo a parte!), etc.

Mezzi attivi gassosi:

HeNe, ioni Ar, HeCd, CO<sub>2</sub>, vapori metallici, etc.

Mezzi attivi liquidi:

Coloranti in soluzione (dye lasers)

Molteplici metodi e tecnologie di pompaggio messi a punto negli ultimi decenni

## ALCUNI MEZZI ATTIVI

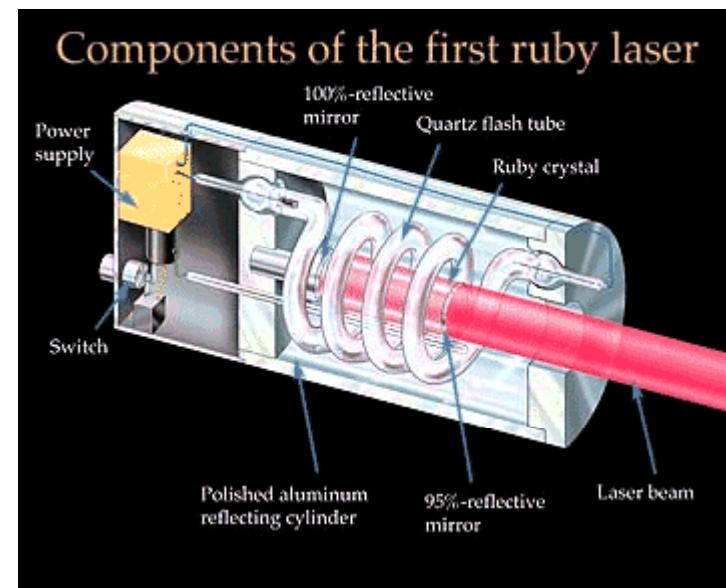
- Neon atoms in a gas (HeNe) 6328 Å
- Chromium atoms in Ruby solid host 6943 Å
- Neodymium atoms in glass/YAG solid host 1.06 μm
- Erbium atoms in glass fiber host 1.5 μm
- Molecular dyes in water or alcohol host 400-1000 Å
- Titanium atoms in a sapphire host 0.7-1.02 μm
- Argon ions in a argon gas 350 – 520 nm
- CO<sub>2</sub> gas 10 μm
- Electrons in semiconductors:
  - Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As 0.7-0.9 μm
  - In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As<sub>1-y</sub>P<sub>y</sub> 1.1-1.6 μm
- OH gas molecules ~ 30 cm

## TIPI DI LASER E POMPAGGIO

	Wavelength	Power	Operating mode	Applications	Pompaggio ottico (O) e “mediato” (M)
<b>Semiconductor diode lasers</b>					
Single diodes	Infrared to visible	1 mW - 100 mW	Continuous and pulsed modes	Optoelectronics	O/M (corrente produce coppie eh che ricombinano emettendo luce)
Diode laser bars	Infrared to visible	up to 100 W	Continuous and pulsed modes	Pumping light source for solid state lasers	
<b>Solid state lasers</b>					
Nd:YAG laser	1.06 µm	1 W - 3 kW	Continuous and pulsed modes	Materials processing, measurement, medicine	O (lampade, generalmente flash cioè impulsive, laser di pompa, e.g., diodi)
Rubin-Laser	red	Several MW	Pulsed mode	Measurement, pulse holography	
<b>Gas lasers</b>					
CO <sub>2</sub> -Laser	10.6 µm	1 W - 40 kW (100 MW in pulsed mode)	Continuous and pulsed modes	Materials processing, medicine, Isotope separation	M (scarica elettrica+collisioni elettroniche)
Excimer laser	193 nm, 248 nm, 308 nm (and others)	1 kW - 100 MW	gepulster Betrieb, Pulslänge 10 ns - 100 ns	Micro-machining, laser chemistry, medicine	M (scarica elettrica+eccimeri)
HeNe laser	632.8 nm (most prominent)	1 mW - 1 W	kontinuierlicher Betrieb	Measurement, holography	
Argon Ion laser	515 458 nm (several)	1 mW - 150 W	Continuous and pulsed modes	Printing technology, pumping laser for dye laser stimulation, medicine	M (scarica elettrica+collisioni elettroniche)
Dye laser	Continuous between infrared and ultraviolet (different dyes)	1 mw - 1 W	Continuous and pulsed modes	Measurement, spectroscopy, medicine	O (laser di pompa)

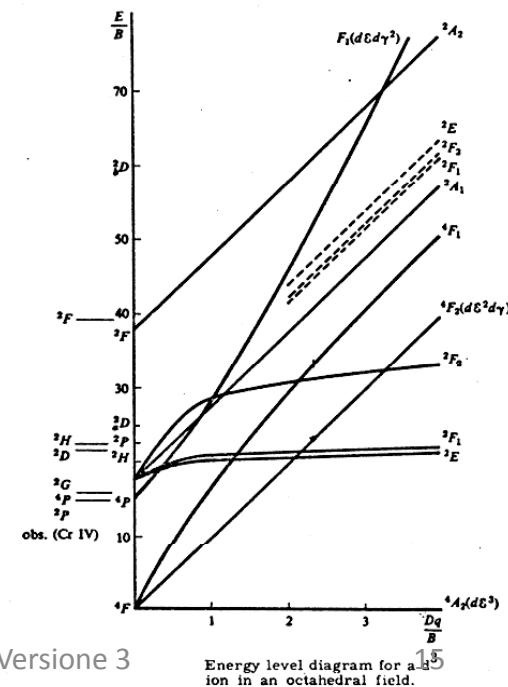
# RUBY LASER I

Primo laser (impulsato): Maiman, 1960



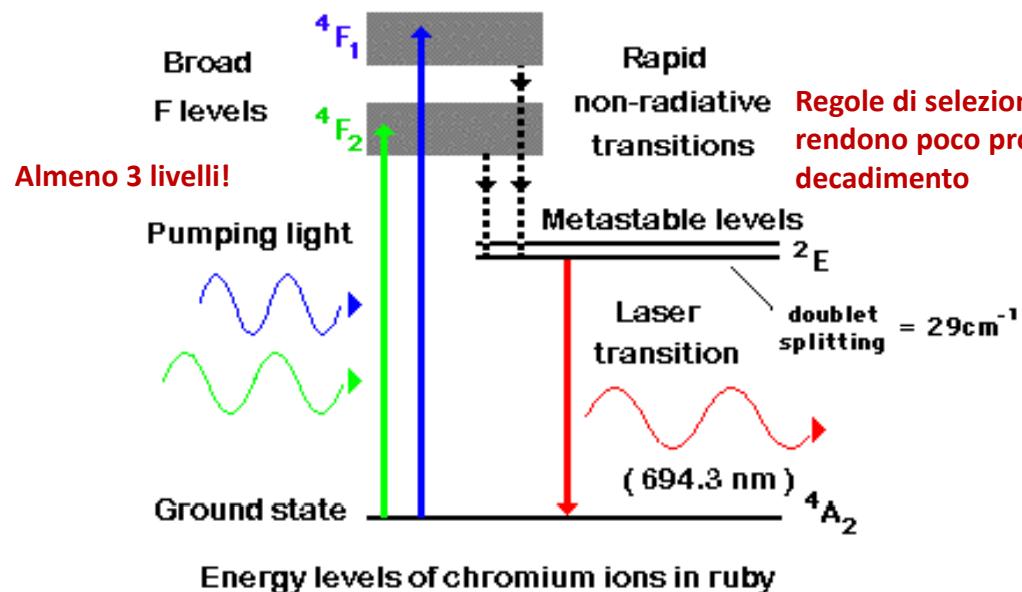
Il rubino è un cristallo di allumina (sesquiossido di alluminio:  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), drogato con circa lo 0.05% di ioni cromo trivale Cr $^{3+}$ , che gli conferiscono il caratteristico color rosso. L'alluminio e l'ossigeno sono otticamente inerti, mentre gli ioni Cr $^{3+}$  sono i centri otticamente attivi.

Il laser a rubino è un sistema a tre livelli ed è meno efficiente di uno a quattro, come ad esempio il laser al Neodimio, che lo ha rimpiazzato nella maggior parte delle applicazioni. Il materiale attivo nel laser a rubino è una barretta di zaffiro sintetico drogato con circa lo 0.01%-0.5% di cromo. Questo droggaggio corrisponde a circa  $10^{19}$  atomi di cromo per centimetro cubo. La luce emessa dagli atomi di cromo colora di rosso o rosa il cristallo. Il materiale è facile da trovare e le barrette di 3-25 mm di diametro sono disponibili a partire da lunghezze di 20 cm. Il rubino resiste bene al danneggiamento ottico e conduce il calore meglio del vetro. La struttura dei livelli energetici nel rubino è mostrata nella Figura 3.1.2. La luce visibile in una delle due bande di pompaggio porta gli ioni cromo $^{3+}$  in una delle due bande eccitate da cui decadono in circa 100 ns a due livelli metastabili con tempo di vita medio a temperatura ambiente di 3 ms. L'emissione è permessa da entrambi i livelli, ma la transizione dal livello E è predominante. Il livello fondamentale è il livello inferiore della transizione laser e questo vuol dire che è necessaria una pompa ad alta potenza per portare la metà degli atomi più uno ai livelli più alti di energia e quindi avere un'inversione di popolazione. Questo innalza la soglia del laser e comporta una bassa efficienza.



## RUBY LASER II

Livelli discreti Cr<sup>3+</sup> in matrice di Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



L'eccesso di energia rimane nel laser sotto forma di calore limitando il ritmo di ripetizione a pochi Hertz eccetto che per barre molto piccole, per cui è necessario un sistema di refrigerazione. Il tempo di vita di 3ms del livello energetico più alto da al laser a rubino la capacità di immagazzinare molta più energia di quella immagazzinata dal laser al Neodimio con una barretta delle stesse dimensioni e genera impulsi di energia più elevata. Il basso ciclo di lavoro, però, è un serio limite alla potenza media del laser.

### Caratteristiche del fascio

L'oscillatore laser a rubino può produrre impulsi di qualche millisecondo da 50 a 100 Joule. Nella configurazione amplificata può emettere più di 100 Joule. La durata degli impulsi dipende dalla lunghezza degli impulsi della lampada di pompaggio e va da frazioni a poche unità di millisecondo. La potenza media dell'impulso non supera le decine di KW. Il basso tasso di ripetizione limita la potenza media di un oscillatore a barretta singola attorno ai 100 W.

L'instabilità nei processi di emissione e di assorbimento causa delle brusche oscillazioni negli impulsi di lunga durata cosicché la potenza istantanea varia considerevolmente. Per ovviare a ciò si usa il Q-switching. Questo processo limita l'energia degli impulsi in un singolo oscillatore a qualche Joule, comprimendo però la durata dell'impulso a 10-35 ns. In questo modo si possono raggiungere picchi di potenza di 100 MW. Per oscillatori amplificati si possono avere picchi di 1 GW ed energie di più di 10 Joule per impulso.

Pompaggio puramente ottico  
(flash lamps)

Impulsi ms potenze medie decine di W

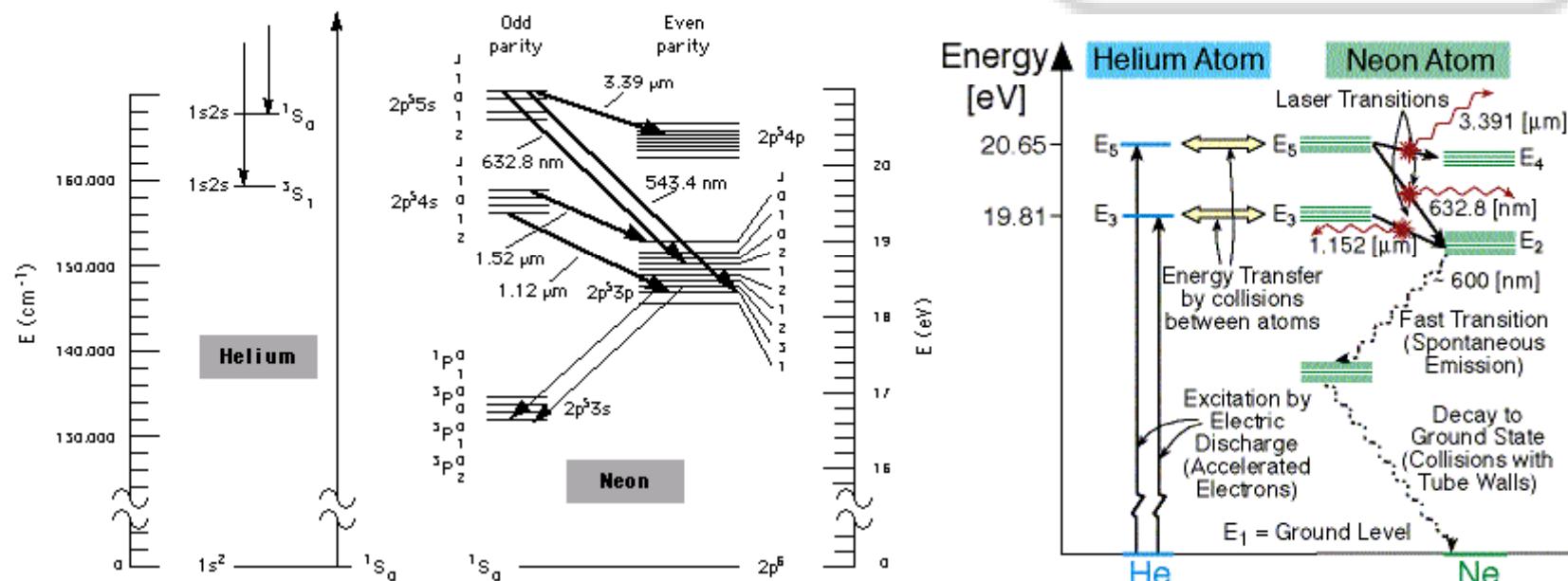
Spesso usato con Q-switching  
(vedremo in seguito)

Pochi impieghi attuali, soprattutto dermatologia (rimozione tattoos)

# HeNe LASER I

Primo laser in continua (1962)

Bassa potenza (< 100 mW), alta stabilità, ottime proprietà ottiche: ancora molto usato (metrologia, olografia, allineamento, etc.)



**The Mechanism:** A dc or rf electrical discharge is established in a gas mixture of helium (~ 90%) and neon (~10%). The helium atoms are excited to long-lived metastable states by a variety of processes involving energetic electron impact. The excitation energy of the helium metastables is transferred to neon atoms by resonance scattering to yield laser-active neon metastables.

## HeNe LASER II

Il mezzo di amplificazione del laser, come suggerisce il nome, è una miscela di gas **elio** e **neon** in proporzioni che vanno da 5:1 a 20:1, contenuti in un tubo di vetro a una pressione variabile a seconda della grandezza del tubo stesso, grosso modo pari a 50 **Pa** per centimetro di lunghezza del risuonatore [2]) contenuto nel tubo di vetro.

L'energia della fonte di pompaggio del laser deriva da una scarica elettrica di circa 1000V fra un **anodo** e un **catodo** posti agli estremi del tubo di vetro, e con correnti variabili da 5 a 100 milliampere nel funzionamento normale ad onda continua. [3].

La cavità ottica del laser è costituita di solito da uno **specchio** altamente riflettente a una estremità e di un accoppiatore (specchio semiriflettente) all'altra estremità, con una trasmissività verso l'esterno dell'1% circa. I laser a elio-neon sono in genere piccoli, con tubi laser da 15 a 50 cm e potenze ottiche in uscita da 1 a 100 milliwatt.

Il fenomeno laser inizia in questo tipo di dispositivo con la collisione degli elettroni con gli atomi di elio: questi eccitano l'elio e lo portano dallo **stato fondamentale** agli stati eccitati  $2^3S_1$  e  $2^1S_0$ , **metastabili** e a lunga vita. Gli atomi eccitati di elio collidono poi con quelli di neon cedendo loro l'energia ricevuta e portando gli elettroni del neon nello stato  $3s_2$  [3]. Questo a causa di una coincidenza dei **livelli energetici** fra gli atomi di elio e quelli di neon.

Questo processo è sintetizzato nella seguente equazione di reazione:



dove (\*) rappresenta uno stato eccitato e  $\Delta E$  è la piccola differenza di energia fra gli stati energetici dei due atomi, dell'ordine di 0.05 **eV** o  $387 \text{ cm}^{-1}$ , che è fornita dall'energia cinetica. [3].

**Meccanismo di pompaggio complesso:  
Scarica → elettroni → He\* → Ne\***

**Tuttavia piuttosto efficiente (10W → 10 mW)**

## HeNe LASER III

Il numero di atomi di neon che entra in stato di eccitazione cresce con il procedere delle collisioni con gli atomi di elio, causando alla fine una [inversione di popolazione](#); l'emissione spontanea e stimolata dalle transizioni fra gli stati  $3s_2$  e  $2p_4$  causa alla fine l'emissione di luce laser della canonica lunghezza d'onda di 632.82 nm. Dopodiché, avviene un rapido decadimento dallo stato  $2p$  allo stato fondamentale  $1s$ : poiché il livello superiore del neon satura con correnti più alte e quello inferiore varia linearmente con la corrente, i laser HeNe sono costretti a generare potenze molto piccole pena la perdita dell'inversione di popolazione.<sup>[3]</sup>.

Con una appropriata scelta degli specchi della cavità è possibile far funzionare i laser HeNe anche su frequenze diverse da quella classica: esistono infatti transizioni fra stati anche nell'[infrarosso](#), a lunghezze d'onda di 3.39  $\mu\text{m}$  e 1.15  $\mu\text{m}$ , ed una varietà di transizioni nello spettro visibile, comprese [verde](#) (543.5 nm, il cosiddetto laser GreeNe), una [gialla](#) (594 nm) e una [arancione](#) (612 nm). La normale lunghezza d'onda rossa a 633 nm ha un guadagno minore delle altre, soprattutto delle linee a 1.15  $\mu\text{m}$  and 3.39  $\mu\text{m}$  lines, ma queste si possono sopprimere usando degli specchi rivestiti apposta per non riflettere luce di quella lunghezza d'onda.

La banda di guadagno del laser HeNe è dominata dall'[allargamento Doppler](#), ed è molto stretta: circa 1.5 GHz per la transizione laser a 633nm<sup>[5][7]</sup> su un singolo [modo longitudinale](#). La visibilità del fascio laser e le sue eccellenti qualità di coerenza spaziale lo rendono una sorgente molto utile per [olografia](#) e come luce di riferimento per la [spettroscopia](#). È anche uno dei sistemi di test per la definizione del metro campione<sup>[8]</sup>.

### Particularly strong emissions

$1s^2 2s^2 2p^5 5s$ :	${}^1P_1 \rightarrow 1s^2 2s^2 2p^5 3p$ :	${}^3S_1$	$l_{\text{vacuo}} = 0.5435 \text{ mm}$	$l_{\text{air}} = 0.5433 \text{ mm}$
$1s^2 2s^2 2p^5 5s$ :	${}^1P_1 \rightarrow 1s^2 2s^2 2p^5 3p$ :	${}^3P_2$	$l_{\text{vacuo}} = 0.6330 \text{ mm}$	$l_{\text{air}} = 0.6328 \text{ mm}$
$1s^2 2s^2 2p^5 4s$ :	${}^1P_1 \rightarrow 1s^2 2s^2 2p^5 3p$ :	${}^3P_2$	$l_{\text{vacuo}} = 1.1526 \text{ mm}$	$l_{\text{air}} = 1.1523 \text{ mm}$
$1s^2 2s^2 2p^5 4s$ :	${}^1P_1 \rightarrow 1s^2 2s^2 2p^5 3p$ :	${}^1S_0$	$l_{\text{vacuo}} = 1.5235 \text{ mm}$	$l_{\text{air}} = 1.5231 \text{ mm}$
$1s^2 2s^2 2p^5 5s$ :	${}^1P_1 \rightarrow 1s^2 2s^2 2p^5 4p$ :	${}^3P_2$	$l_{\text{vacuo}} = 3.3922 \text{ mm}$	$l_{\text{air}} = 3.3913 \text{ mm}$

Caratteristiche fascio legate a cavità ottica (vedremo poi), facile da realizzare con buone proprietà

Possibili diverse righe di emissione (verde, IR, etc.)

## LASER Ar<sup>+</sup> I

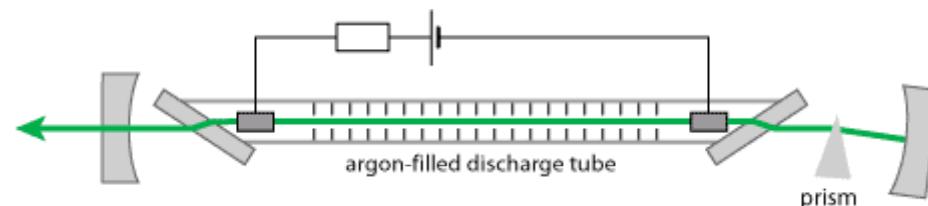
Mezzo attivo: ioni prodotti in una scarica

→ scarsa efficienza complessiva, ma buone potenze (decine di W)

An **ion laser** is a [gas laser](#) which uses an [ionized](#) gas as its lasing medium.<sup>[1]</sup> Like other gas lasers, ion lasers feature a sealed cavity containing the laser medium and mirrors forming a [Fabry-Perot](#) resonator. Unlike [HeNe lasers](#), the energy level transitions that contribute to laser action come from [ions](#). Because of the large amount of energy required to excite the ionic transitions used in ion lasers, the required current is much greater, and as a result all but the smallest ion lasers are [water cooled](#). A small air cooled ion laser might produce, for example, 130mW of light with a tube current of 10A @ 105V. This is a total power draw over 1 kW, which translates into a large amount of heat which must be dissipated.



From left to right: 1 mW Uniphase HeNe on alignment-rig, 2 Watt Lexel 88 Argon Ion laser, and power-supply. To the rear are hoses for [water cooling](#).

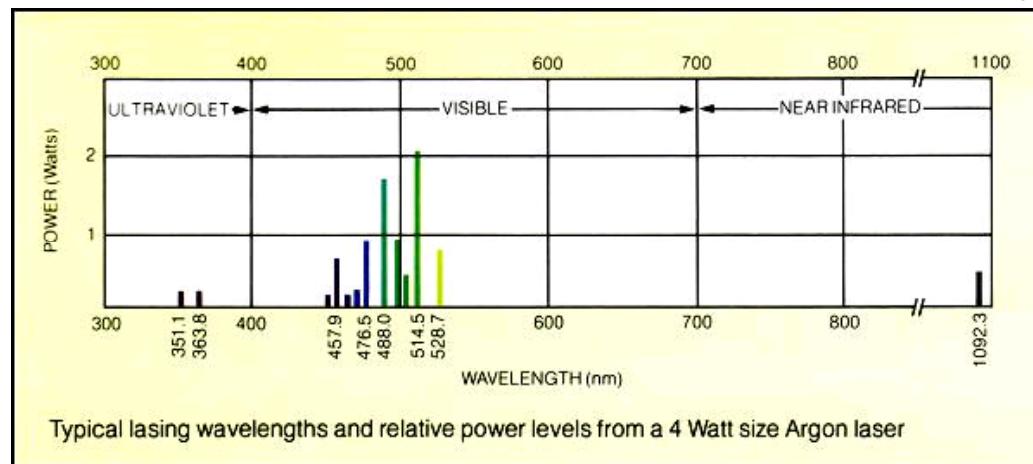
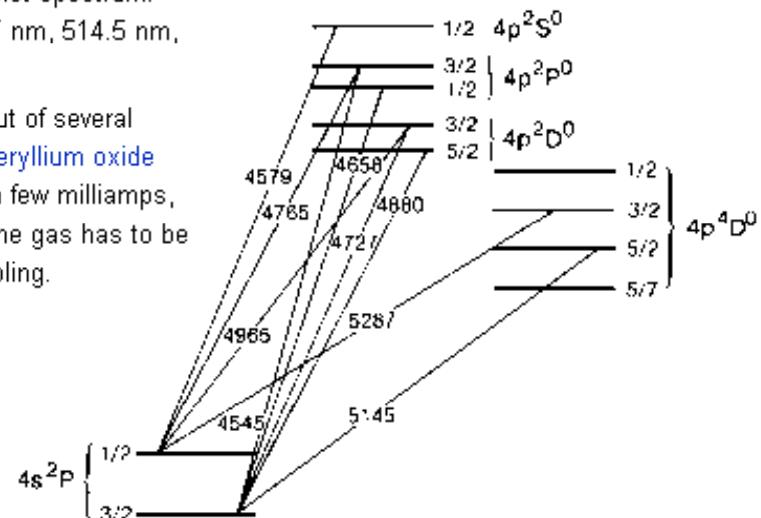


## LASER Ar<sup>+</sup> II

The Argon laser was invented in 1964 by William Bridges at Hughes Aircraft and is one of a family of ion lasers that use a noble gas as the active medium.

Argon lasers are used for [retinal phototherapy](#) (for [diabetes](#)), [lithography](#), and [pumping](#) other lasers. Argon lasers emit at several wavelengths through the visible and ultraviolet spectrum: 351 nm, 454.6 nm, 457.9 nm, 465.8 nm, 476.5 nm, 488.0 nm, 496.5 nm, 501.7 nm, 514.5 nm, 528.7 nm.

Common argon and krypton lasers are capable of emitting continual wave output of several milliwatts to tens of watts continually. Their tubes are usually made of [kovar](#), [beryllium oxide ceramics](#), or [copper](#). In comparison with the [helium-neon lasers](#) requiring just a few millamps, the current used for pumping the krypton laser ranges in several amperes, as the gas has to be ionized. The ion laser tube produces a lot of waste heat and requires active cooling.



Operazione multilinea

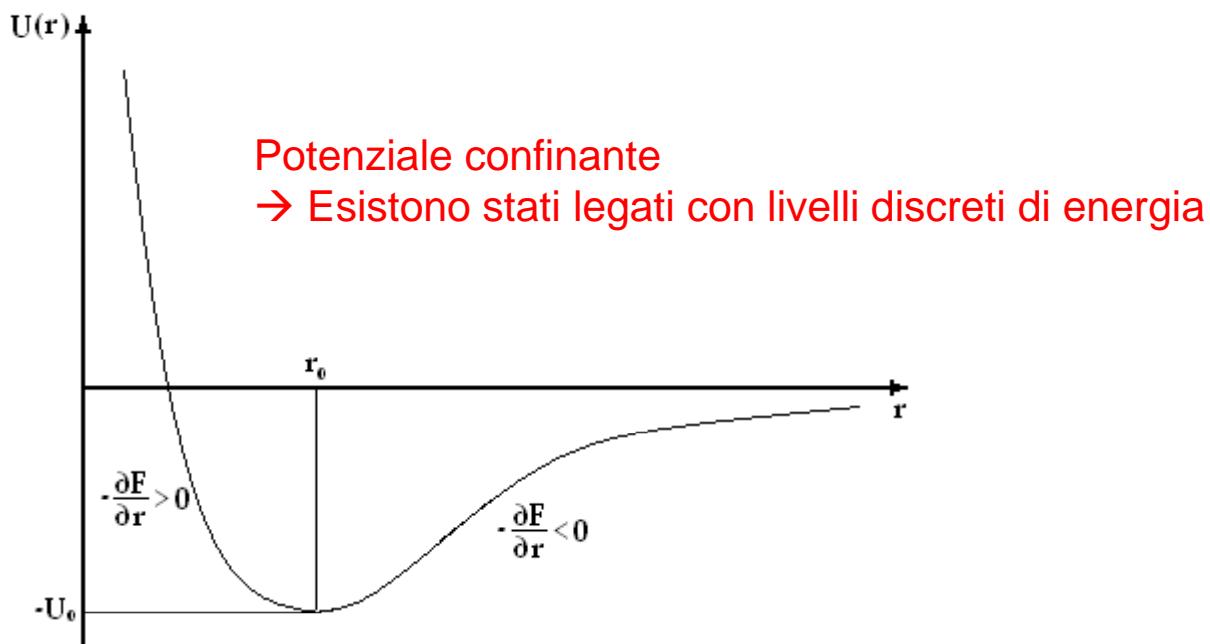
Numerosi impieghi  
biomedici, tecnologici e  
analitici (anche come pompa  
di altri laser)

# POTENZIALI MOLECOLARI

Il **potenziale di Lennard-Jones** è il più noto e il più usato dei potenziali empirici per descrivere l'interazione interatomica ed intermolecolare.

A distanze interatomiche o intermolecolari molto piccole le densità elettroniche si sovrappongono generando forze repulsive molto intense, caratterizzate da un raggio d'azione molto corto e dal fatto che crescono rapidamente all'avvicinarsi delle molecole. Per esse non esiste un'equazione ricavata teoricamente che le descrive, dunque ci si deve affidare ad alcune funzioni potenziali empiriche.

La più famosa di esse (*legge 12-6<sup>[1]</sup>*), che comprende anche la parte attrattiva dovuta all'interazione di van der Waals, è il potenziale proposto nel 1931 da John Lennard-Jones all'Università di Bristol:



# CO<sub>2</sub> (CO) LASER I

## I laser molecolari

Vi sono diversi tipi di laser basati su transizioni tra livelli energetici elettronici, vibrazionali o rotazionali di molecole. Le transizioni rotovibrazionali dello stato elettronico fondamentale hanno lunghezze d'onda nel medio fino al lontano IR (2.5 – 300 μm). La ridotta energia dei livelli energetici coinvolti in queste transizioni porta a un elevato valore del rendimento quantico e a un efficiente meccanismo di eccitazione: tutto ciò produce un rendimento complessivo per questi laser assai alto. Si ottengono, infatti, potenze laser continue di molti kW e energie per impulsi di centinaia di J.

Il laser molecolare più diffuso è quello ad anidride carbonica, CO<sub>2</sub>, che oscilla a 10.6 μm e a altre lunghezze d'onda nella regione 9-11 μm; altri esempi sono il laser a CO a 5 - 6.5 μm e il laser chimico a HF con emissione a 2.7 - 3.3 μm. Quando fu scoperto (1964) il laser a CO<sub>2</sub> erogava poca potenza. Poi ci si accorse che, aggiungendo azoto, si aveva un incremento di potenza, che risultava ancora maggiore con l'aggiunta di elio.

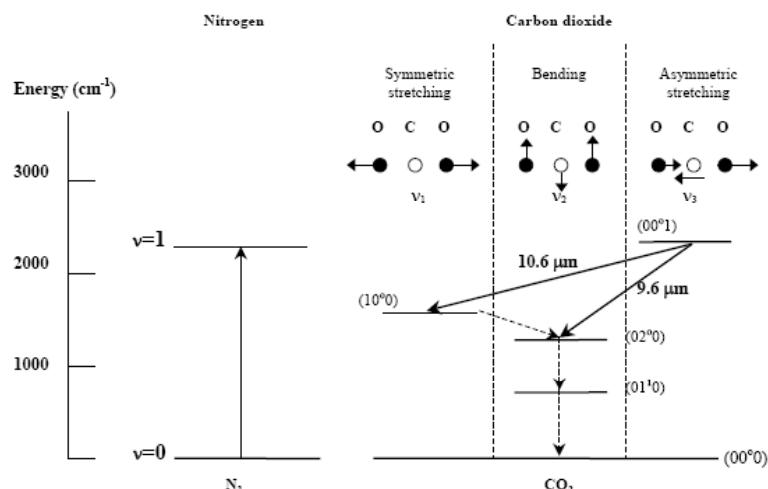


Figura 2.4.1 Modi vibrazionali del CO<sub>2</sub>; livelli vibrazionali più bassi e transizioni laser; trasferimento di energia dal N<sub>2</sub>

Si intuisce quindi che:

- se la scarica degenera in un arco, che equivale, come resistenza, a un corto circuito e quindi non sostiene un campo elettrico, gli elettroni non acquistano energia sufficiente per l'eccitazione delle molecole del gas.
- esiste un valore ottimale del rapporto (alcune decine di KV/cm atmosfera), quello che corrisponde al valore ottimale dell'energia che gli elettroni devono avere per eccitare i livelli coinvolti.

Il maggior problema di questo e degli altri laser a gas di potenza è proprio quello del raffreddamento della scarica per evitare la formazione di archi anche solo localizzati.

Si usano elettrodi conformati in modo opportuno per evitare scariche. L'impiego di elettrodi a rete consente di far fluire il gas in direzione trasversa rispetto all'asse ottico.

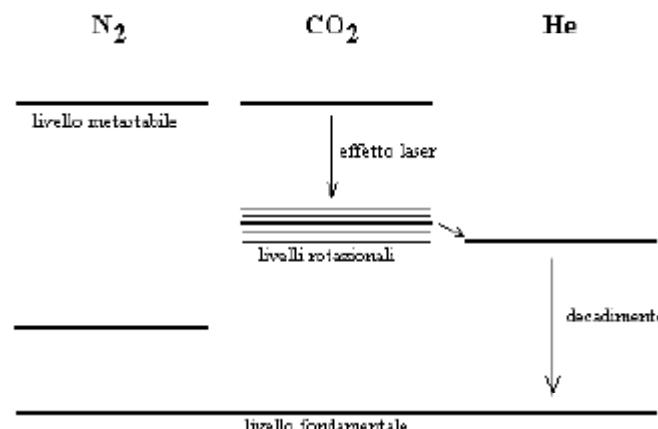


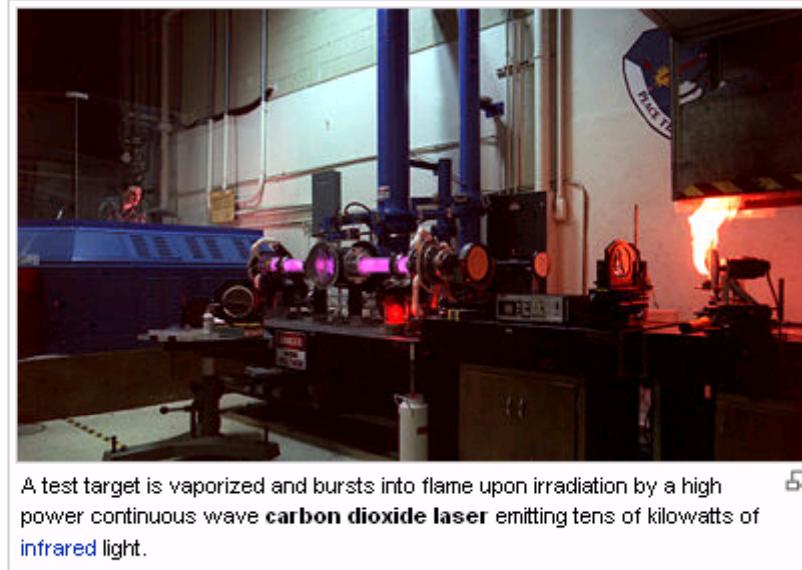
Figura 2.4.2 Livelli energetici del laser a CO<sub>2</sub>

In an electric discharge in a mixture of CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub> and He excitation to the upper 00<sup>0</sup>1 laser level is achieved by electron impact or resonant transfer from vibrationally excited (v = 1) N<sub>2</sub> molecules. The N<sub>2</sub> (v = 1) level is efficiently excited in the discharge and is a long lived metastable state. The role of He in the gas mixture is to de-activate the lower laser level, to control the electron temperature in the discharge, to stabilize the plasma and to cool the CO<sub>2</sub> molecules by conducting heat to the walls of the discharge tube. Anche la ridistribuzione di popolazione tra i livelli rotazionali (termalizzazione dei livelli) contribuisce a svuotare il livello inferiore della transizione.



## CO<sub>2</sub> (CO) LASER II

The **carbon dioxide laser** (CO<sub>2</sub> laser) was one of the earliest **gas lasers** to be developed (invented by **Kumar Patel** of Bell Labs in 1964<sup>[1]</sup>), and is still one of the most useful. Carbon dioxide lasers are the highest-power continuous wave **lasers** that are currently available. They are also quite efficient: the ratio of output power to pump power can be as large as 20%.



A test target is vaporized and bursts into flame upon irradiation by a high power continuous wave **carbon dioxide laser** emitting tens of kilowatts of **infrared** light.

The **active laser medium** (laser gain/amplification medium) is a **gas discharge** which is air cooled (water cooled in higher power applications). The filling gas within the discharge tube consists primarily of:

- **Carbon dioxide** (CO<sub>2</sub>) (around 10–20 %)
- **Nitrogen** (N<sub>2</sub>) (around 10–20%)
- **Hydrogen** (H<sub>2</sub>) and/or **xenon** (Xe) (a few percent; usually only used in a sealed tube.)
- **Helium** (He) (The remainder of the gas mixture)

The specific proportions vary according to the particular laser.

The **population inversion** in the laser is achieved by the following sequence:

1. **Electron** impact excites vibrational motion of the nitrogen. Because nitrogen is a **homonuclear molecule**, it cannot lose this energy by **photon** emission, and its excited vibrational levels are therefore **metastable** and live for a long time.
2. Collisional energy transfer between the nitrogen and the carbon dioxide molecule causes vibrational excitation of the carbon dioxide, with sufficient efficiency to lead to the desired population inversion necessary for laser operation.

The CO<sub>2</sub> laser can be constructed to have CW powers between **milliwatts** (mW) and hundreds of **kilowatts** (kW).<sup>[2]</sup> It is also very easy to actively **Q-switch** a CO<sub>2</sub> laser by means of a rotating mirror or an electro-optic switch, giving rise to Q-switched peak powers up to **gigawatts** (GW) of peak power<sup>[3]</sup>.

Because the laser transitions are actually on vibration-rotation bands of a linear triatomic molecule, the rotational structure of the P and R bands can be selected by a tuning element in the **laser cavity**. Because transmissive materials in the infrared are rather lossy, the **frequency** tuning element is almost always a **diffraction grating**. By rotating the diffraction grating, a particular rotational line of the vibrational transition can be selected. The finest frequency selection may also be obtained through the use of an **etalon**. In practice, together with **isotopic substitution**, this means that a continuous comb of frequencies separated by around 1 cm<sup>-1</sup> (30 GHz) can be used that extend from 880 to 1090 cm<sup>-1</sup>. Such "line-tunable" carbon dioxide lasers are principally of interest in research applications.

# Nd-YAG LASER I

## Rare Earth Ion Solid State Lasers:

Neutral atom electronic configurations:

noble gas core xenon:  $[Xe] = 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6$

rare earth atoms:  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^n 5s^2 5p^6 6s^2 = [Xe] 4f^n 6s^2$

Trivalent ion electronic configurations of common laserable rare earth ions:

praseodymium ( $Pr^{+3}$ ):  $= [Xe] 4f^2$  Ground state:  $3H_4$

neodymium ( $Nd^{+3}$ ):  $= [Xe] 4f^3$  Ground state:  $4I_{9/2}$

europerium ( $Eu^{+3}$ ):  $= [Xe] 4f^6$  Ground state:

holmium ( $Ho^{+3}$ ):  $= [Xe] 4f^{10}$  Ground state:

erbium ( $Er^{+3}$ ):  $= [Xe] 4f^{11}$  Ground state:  $4I_{15/2}$

thulium ( $Tm^{+3}$ ):  $= [Xe] 4f^{12}$  Ground state:  $3H_6$

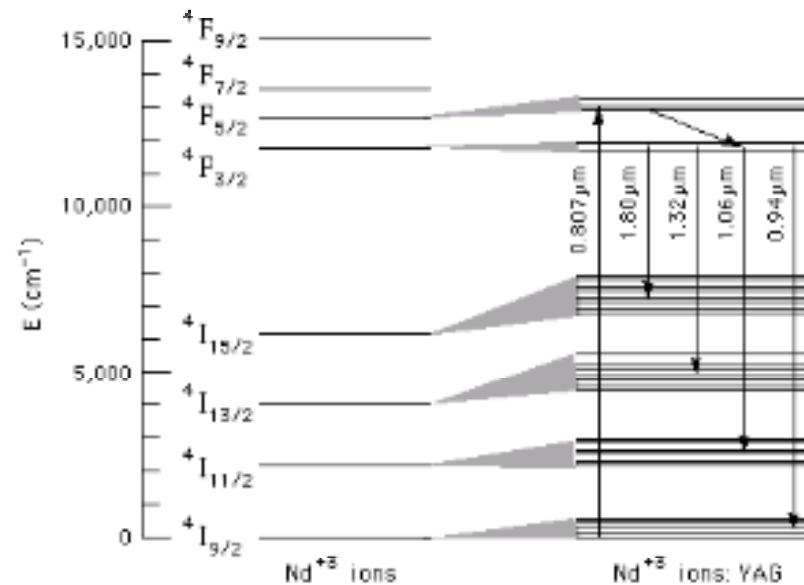
ytterbium ( $Yb^{+3}$ ):  $= [Xe] 4f^{13}$



Nd sostituisce Y in reticolo come drogante

Ioni terre rare in matrice: elettroni esterni (5s e 5p) schermano gli elettroni interni (4f) dal campo cristallino

Laser a.a. 2010/11 – <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida> - Parte 5 - Versione 3



Simile a rubino

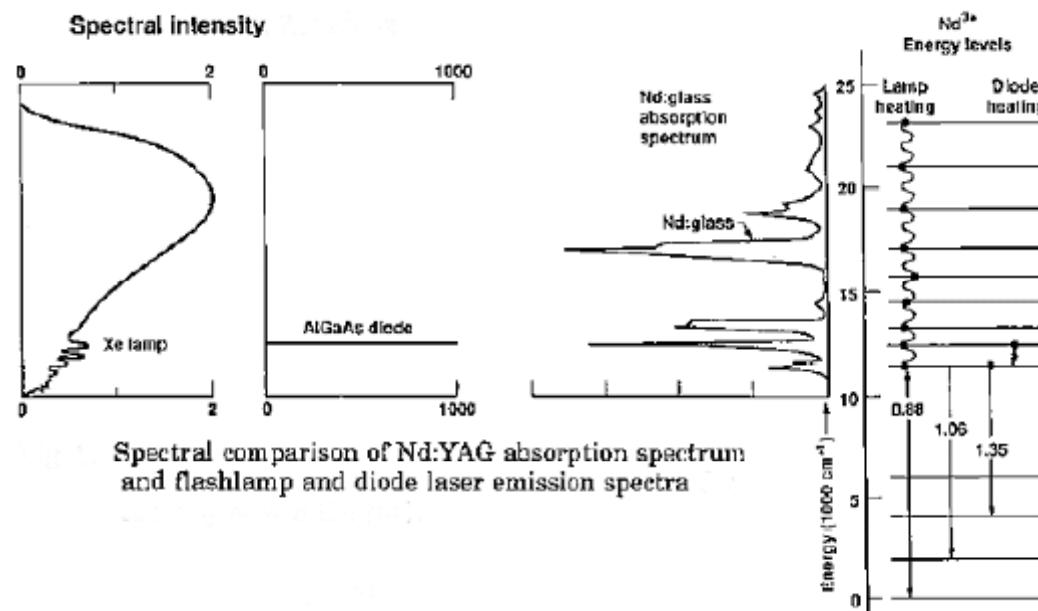
Generalmente impulsato  
(flash-lamps) con impulsi  
10 ps-100 ns

Spesso sfruttate le armoniche  
(II, III, IV) generate da  
cristalli nonlineari

## Nd-YAG LASER II

Si tratta di uno dei più diffusi laser a stato solido. Il mezzo attivo è costituito da un cristallo di  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ , detto comunemente YAG, drogato con Neodimio ( $\text{Nd}^{3+}$  che sostituisce  $\text{Y}^{3+}$ ). Costituisce un sistema a 4 livelli che emette a  $1.06 \mu\text{m}$  (vicino infrarosso) con pompaggio ottico tramite lampada a Krypton. Il cristallo ha una ottima conduttività termica, il che gli permette di operare senza problemi in continua o ad alte frequenze di ripetizione. Esiste una variante più economica di questo laser, che è il Nd:vetro, dove i centri attivi di neodimio sono ospitati invece che in un cristallo di YAG in un vetro. E' più economico, ma ha una peggiore conducibilità termica, per cui viene utilizzato solo in regime impulsato a basse frequenze di ripetizione.

Il cristallo di Nd:YAG è materiale ideale per un laser a 4 livelli. La vita media del livello laser superiore è relativamente lunga ( $250 \mu\text{s}$ ) e la transizione laser a  $1.064 \mu\text{m}$  termina a circa  $2000 \text{ cm}^{-1}$  al disopra dello stato fondamentale, per cui la popolazione termica del livello laser inferiore a  $300 \text{ K}$  è inferiore a  $10^{-4}$  e può essere trascurata. Il pompaggio a  $809 \text{ nm}$  può essere efficacemente ottenuto con un laser a diodo AlGaAs di alta potenza.



Pompabile con laser a diodo

## ALTRI FIGLI DI RUBY

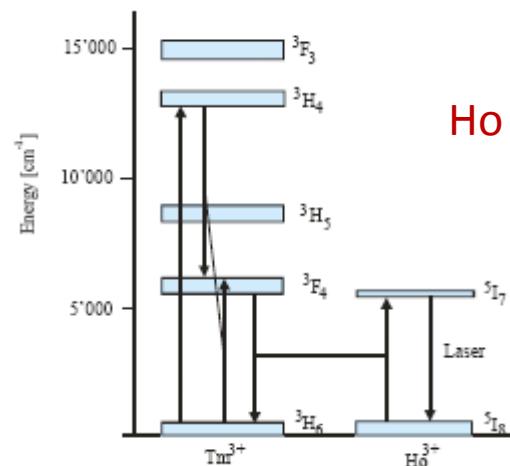


Figura 3.3.1: Energy level scheme of  $\text{Ho}^{3+}$ :YAG co-doped with  $\text{Tm}^{3+}$ . Pumping with a wavelength of about 785 nm leads to excitation of the  $\text{Tm}^{3+}$   $^3\text{H}_4$  level. Excited  $\text{Tm}^{3+}$   $^3\text{H}_4$  and ground state  $^3\text{H}_5$  ions can exchange energy leading to a two fold population of  $^3\text{F}_4$ . From there a second energy transfer excites the  $\text{Ho}^{3+}$  upper laser level.

Nei cristalli drogati con gli ioni dei metalli di transizione si verificano forti interazioni tra gli stati elettronici e le vibrazioni reticolari (fononi). Queste interazioni elettronico-vibrazionali (*vibroniche*) producono un notevole allargamento omogeneo dei livelli elettronici, rendendoli bande continue. Similmente ai laser a coloranti, i laser vibronici offrono emissione laser a lunghezza d'onda accordabile e un'ampiezza di banda tale da poter generare impulsi ultra-brevi.

I laser della seguente tabella sono tutti a quattro livelli e presentano carattere vibronico.

MATERIALE LASER	SORGENTE POMPAGGIO	MODO DI FUNZIONAMENTO	INTERVALLO DI ACCORDABILITÀ (NM)
Alessandrite	lampade ad arco	CW	730 - 810
Alessandrite	lampade flash	impulsato	701 - 858
Ce: YLF	laser a eccimeri KrF	impulsato	309 - 325
Co: MgF <sub>2</sub>	1320-Nd:YAG	impulsato	1750 - 2500
Cr: LICAF	laser o lampade	impulsato o CW	720 - 840
Cr: LISAF	laser o lampade	impulsato o CW	760 - 920
Cr: Smeraldo	laser	impulsato o CW	720 - 842
Cr: Forsterite	laser	impulsato o CW	1167 - 1345
Thulium: YAG	laser	CW	1870 - 2160
Ti: Zaffiro	laser	impulsato o CW	660 - 1180

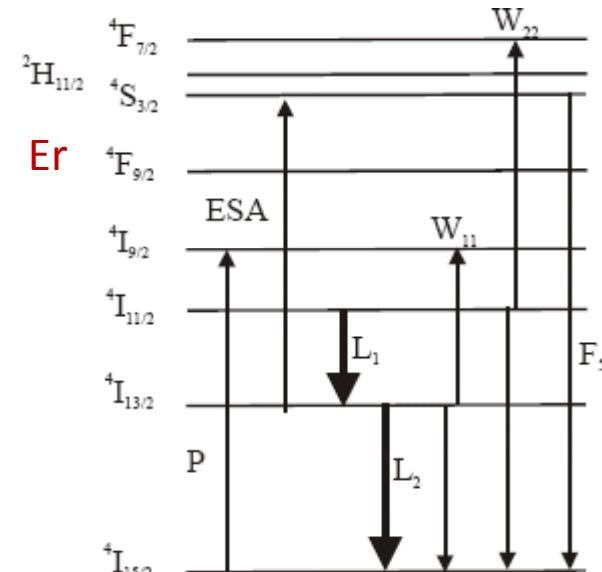


Figura 3.3.2: Energy level scheme of  $\text{Er}^{3+}$ :YAG

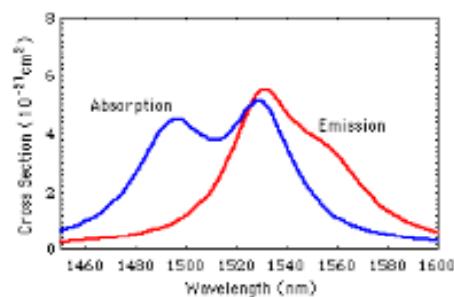
### Laser vibronici

Utili per sintonizzabilità e impulsi ultra brevi (lo vedremo)

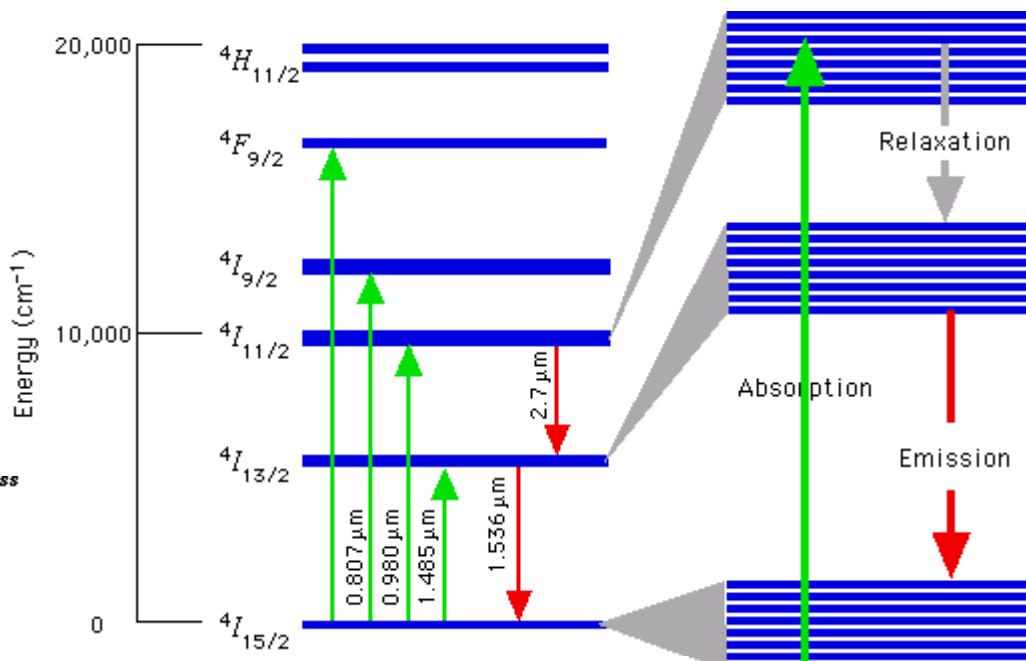
## Er-Doped Fiber Amplifier (EDFA LASER)



2. EDFA (Erbium Doped Fiber Amplifier):  $\text{Er}^{+3}$  randomly distributed in glass



The absorption and emission cross sections for the  ${}^4\text{I}_{15/2} \rightarrow {}^4\text{I}_{13/2}$  transition in  $\text{Er}^{+3}$ .



Terra rara come drogante del vetro

Dispositivi anche in continua, pompati da laser a diodo

# EXCIMER LASER I

## 2.7 Laser a Eccimeri

Il termine *eccimero* indica "dimero eccitato", cioè una molecola, composta da due specie chimiche, che esiste solo nello stato eccitato mentre nello stato fondamentale non risulta legata chimicamente. Nel senso più generale, indica una molecola biatomica o triatomica esistente soltanto nello stato eccitato.

Le molecole  $\text{Xe}_2$  e  $\text{He}_2$  sono un classico esempio di eccimeri. Queste infatti, una volta formatesi, tendono a decadere liberando energia; ritornano così allo stato energetico basso (non eccitato) ed alla configurazione di atomi indipendenti.

### Sistema di pompaggio

Il pompaggio della miscela può avvenire tramite scarica elettrica, microonde oppure per mezzo di un fascio di elettroni.

Nel caso della scarica elettrica si ha un basso rendimento di eccitazione poiché solo il 5% dell'energia prodotta dalla scarica stessa può essere convertita in energia utile all'emissione laser. Inoltre l'instabilità delle scariche limita la lunghezza degli impulsi a poche decine di nanosecondi nonostante la struttura interna possa sostenere impulsi di centinaia di nanosecondi. Pregio di questo tipo di eccitazione è la relativa semplicità di realizzazione. Per avere una scarica uniforme e stabile

### Potenza di uscita

Il laser a KrF può produrre impulsi di 300 ns di durata con frequenza di ripetizione fino a 1 kHz con potenze medie fino a 1 kW.

I laser a KrCl producono impulsi di energia e potenze dell'ordine di un decimo di quelli dei laser a KrF.

Per applicazioni generali che hanno bisogno di impulsi ultravioletti ad alta energia la scelta usuale cade sui laser a KrF o quelli a XeCl. I laser a XeCl sono meno potenti ma più soddisfacenti poiché non contengono fluoro (molto corrosivo), hanno lunghezze d'onda di emissione grandi (quindi basta una minor precisione nelle ottiche) ed il tempo di vita della miscela è molto elevato. Nei laser ad eccimeri l'energia dell'impulso decresce quando la frequenza di ripetizione supera un certo valore soglia, leggermente al di sopra del quale si ha la massima potenza media (Fig. 2.6.3).

Miscela attiva	Emissione (nm)
ArF	193
KrCl	222
KrF	248
XeF	308
XeCl	350
F <sub>2</sub>	157

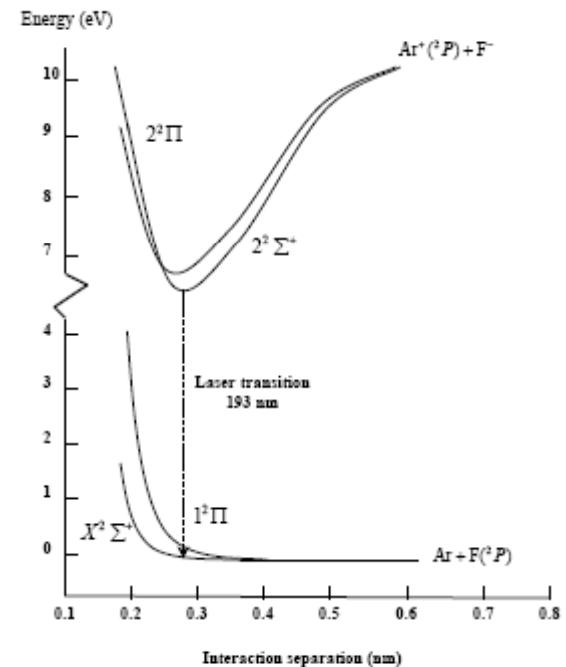
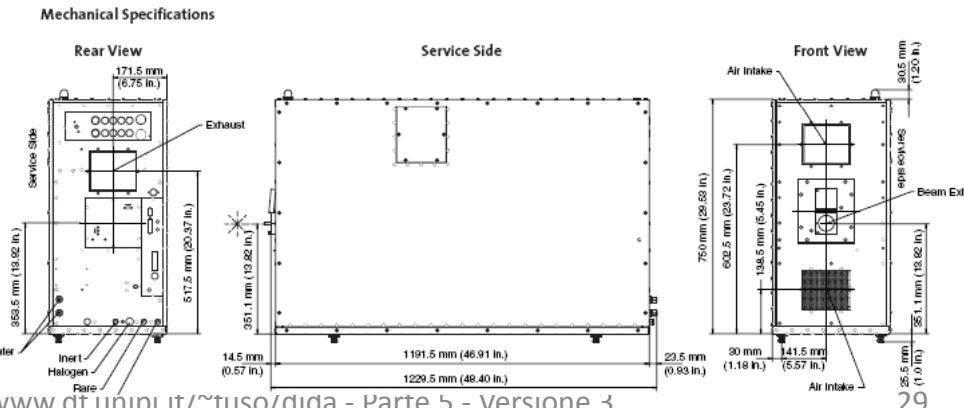


Fig. 2.6.1 Diagramma dell'energia potenziale dell'eccimero ArF.  
E' mostrato lo stato legato transitorio dell'ArF e la transizione laser a 193 nm.

**Funzionamento impulsato (durata max ~ vita media effettiva eccimero, typ 10ps – 20ns)**  
**Alta o altissima energia di picco, buona efficienza**



## EXCIMER LASER II

### Cavità ottica

Uno degli specchi della cavità è altamente riflettente. L'alto guadagno di questo laser elimina il bisogno di uno specchio in uscita. Alcuni laser usano delle ottiche allo zaffiro. Si può inoltre inserire un reticolo di diffrazione nella cavità per sintonizzare le lunghezze d'onda d'uscita nella larghezza di banda del guadagno.

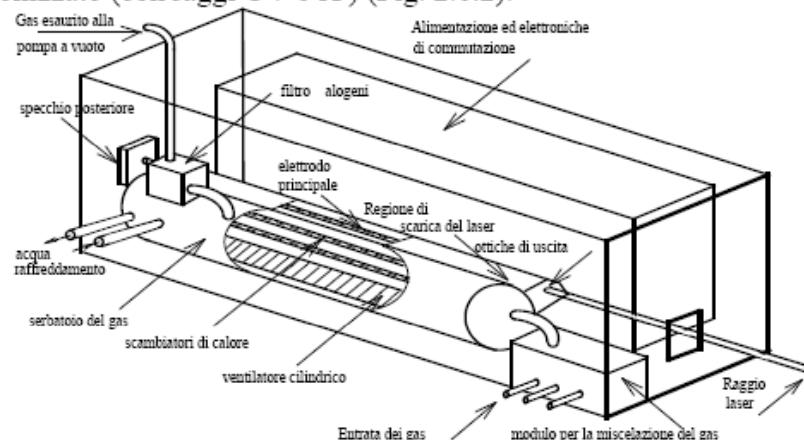
### Potenza di uscita

Il laser a KrF può produrre impulsi di 300 ns di durata con frequenza di ripetizione fino a 1 kHz con potenze medie fino a 1 kW.

I laser a KrCl producono impulsi di energia e potenze dell'ordine di un decimo di quelli dei laser a KrF.

Per applicazioni generali che hanno bisogno di impulsi ultravioletti ad alta energia la scelta usuale cade sui laser a KrF o quelli a XeCl. I laser a XeCl sono meno potenti ma più soddisfacenti poiché non contengono fluoro (molto corrosivo), hanno lunghezze d'onda di emissione grandi (quindi basta una minor precisione nelle ottiche) ed il tempo di vita della miscela è molto elevato. Nei laser ad eccimeri l'energia dell'impulso decresce quando la frequenza di ripetizione supera un certo valore soglia, leggermente al di sopra del quale si ha la massima potenza media (Fig. 2.6.3).

Nel caso della scarica elettrica si ha un basso rendimento di eccitazione poiché solo il 5% dell'energia prodotta dalla scarica stessa può essere convertita in energia utile all'emissione laser. Inoltre l'instabilità delle scariche limita la lunghezza degli impulsi a poche decine di nanosecondi nonostante la struttura interna possa sostenere impulsi di centinaia di nanosecondi. Pregio di questo tipo di eccitazione è la relativa semplicità di realizzazione. Per avere una scarica uniforme e stabile il mezzo viene pre-ionizzato (con raggi UV o X) (Fig. 2.6.2).



# LASER A COLORANTE I

Laser action in a solution of an organic dye molecule **chloroaluminium phthalocyanine** was demonstrated in **1966** by Sorokin and Lankard and independently in **1967** by Schaefer et al. **diethylthiatricarbocyanine bromide** in methanol.

These were the **first dye liquid lasers** and were excited by a pulsed **ruby laser** at 694nm and gave laser emission near **755nm**. These discoveries were quickly followed over the next few years by demonstration of laser operation in **many organic dye molecules** using alternative excitation sources.

**Continuous operation** of the dye laser was not achieved until **1970** when an **argon ion laser** operating at **515 nm** was used to excite **rhodamine 6G** in water solution. The availability of shorter wavelength lasers as pump sources, such as the **337.1nm** nitrogen laser, the excimer lasers with UV output or the higher harmonics of solid-state lasers, enabled **dye lasers** operating at **shorter wavelengths** to be devised. The **strong absorption** and **emission** cross-sections of the dye molecules of about  $10^{-16}\text{cm}^2$  and the corresponding lifetimes of the laser emitting state of a **few nanoseconds** means that a **high pumping** intensity is required. This is achieved optically by **intense flashlamps** or by **another laser**. The development of the dye laser is closely linked generally to the evolution of laser technology over the last forty years.

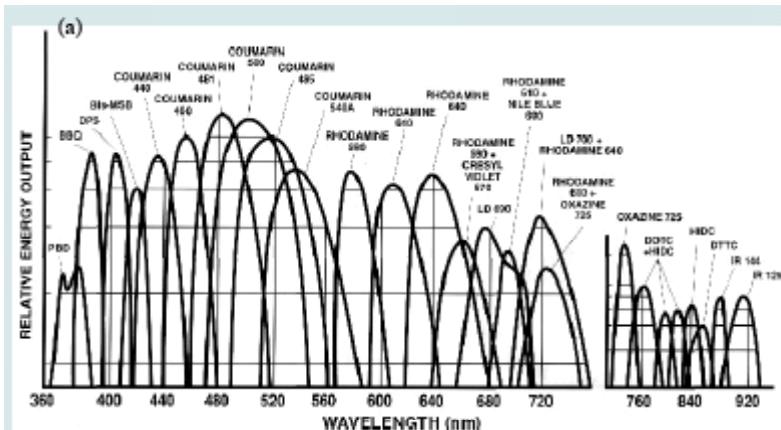
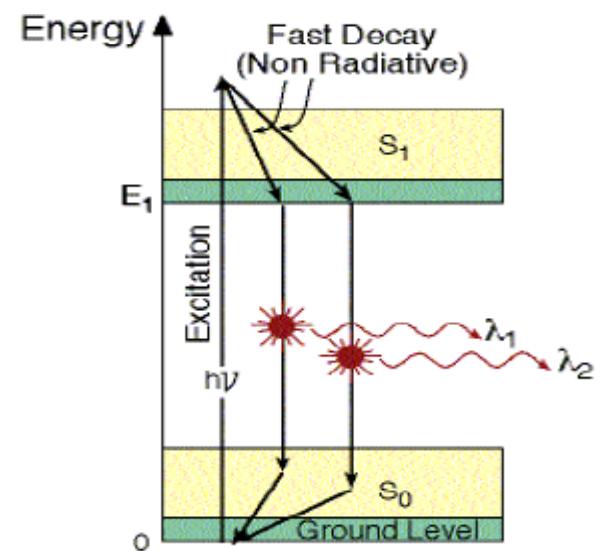
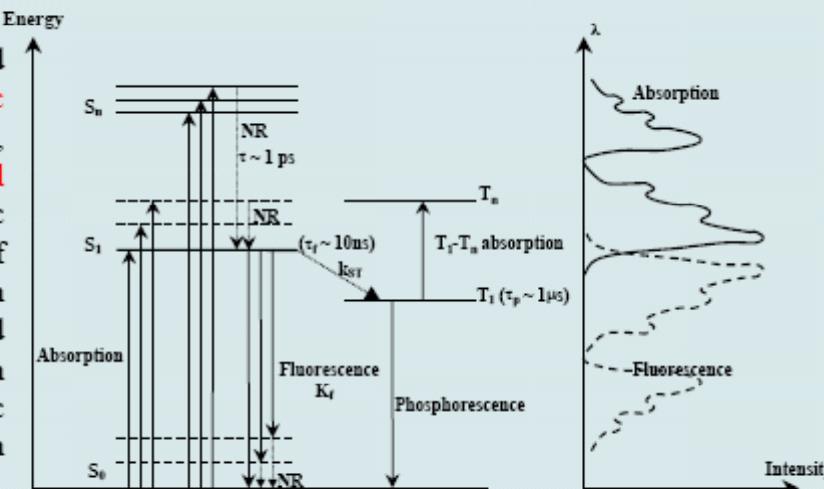


Figure 3. Tuning performance of dye lasers with pumping by  
(a) **nitrogen lasers**  
(Exciton Inc.).

# LASER A COLORANTE II

## Basic principles

The most common liquid state laser contains **organic dye** molecules in a **solvent**, typically **ethyl or methyl alcohol** or **water**. Organic dyes possess a backbone of carbon atoms with conjugated double bonds and delocalised  $\pi$  electrons which confer their characteristic absorption and emission properties.



## Absorption and emission characteristics of dye molecules

The electronic energy levels of a dye molecule are shown in Figure 1. The outer  $2s^22p^2$  electrons of the carbon atom are hybridized into three  $sp^2$  trigonal orbitals to form planar and structural bonds. The fourth p electron is in a delocalized  $\pi$  molecular orbital; in a carbon chain these form two planar distributions above and below the molecular plane and which are able to move freely within the chain. The  $\pi$  electrons determine the electronic states for the outer electrons. The states are simply arranged into a set of singlet states ( $S_0, S_1, S_2 \dots$ ) having a total spin equal to zero, and a set of triplet states having a total spin of one. To each electronic state there corresponds molecular vibrational modes (indicated in Figure 1) and also rotational modes.

## Pulsed dye lasers

The pulsed dye lasers produce tunable, narrow bandwidth, high energy pulses. Pulsed dye lasers at up to a **few tens of W average power** may be excited by several pump lasers, including nitrogen, Nd:YAG, excimer and copper vapour lasers. These provide the necessary high pump intensity around **100 kWcm<sup>-2</sup>** while operating on a time scale in which triplet-triplet absorption and thermal distortion of the laser medium is minimal.

Moltissime applicazioni:

- Spettroscopia laser
- dermatologia
- fisica fondamentale

Operazione complicata:

- Uso di soluzioni
- necessità di pompa (laser)

Pump Source	Tuning Range (nm)	Pulse Duration (ns)	Peak Power (W)	Pulse Energy (mJ)	Repetition Rate (Hz)	Average Power (W)
Flashlamp	300-800	300-10 <sup>4</sup>	10 <sup>2</sup> -10 <sup>4</sup>	< 5000	1-100	0.1-200
Ar <sup>+</sup> or Kr <sup>+</sup>	400-1100	CW	CW	--	CW	0.1-5
N <sub>2</sub>	370-1020	1-10	<10 <sup>3</sup>	<1	<10 <sup>3</sup>	0.01-0.1
Excimer	370-985	10-200	<10 <sup>7</sup>	≤300	20-2000	0.1-10
Nd:YAG	400-920	10-20	10 <sup>5</sup> -10 <sup>7</sup>	10-100	10-30	0.1-1
CVL	530-890	30-50	10 <sup>4</sup> -10 <sup>5</sup>	≈1	≈10 <sup>4</sup>	≤10

## CONCLUSIONI

Introducendo pompaggio un mezzo attivo può effettivamente comportarsi da amplificatore di radiazione sfruttando emissione stimolata

Molti schemi di pompaggio sviluppati negli scorsi decenni, basati su sistemi a tre o più livelli

Molti mezzi attivi e tecnologie di pompaggio sviluppate negli scorsi decenni

Molti tipi di laser sono oggi disponibili, con specifici metodi di pompaggio e mezzi attivi allo stato solido, gassoso, liquido (parleremo a parte dei laser a diodo)

Ampia gamma di lunghezze d'onda, potenze, modalità di operazione (continua o impulsata) disponibili sfruttando questi mezzi attivi

Occhio: non basta un mezzo attivo pompato per fare un laser (caso mai basta per fare un amplificatore)!!

## FONTI

O. Svelto and P. Hanna, Principles of Lasers (Plenum Press, 1998)

<http://www.wikipedia.org>

R. Pratesi, *Dispense di Fisica dei Laser*, Università di Firenze ed INO,  
(<http://www.ino.it/home/pratesi/DispenseL&A.htm>).

[http://people.seas.harvard.edu/~jones/ap216/lectures/ls\\_2/ls2\\_u5/ls2\\_unit\\_5.pdf](http://people.seas.harvard.edu/~jones/ap216/lectures/ls_2/ls2_u5/ls2_unit_5.pdf)