

# Ponti

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 3 - FF, 22 aprile 2016)

Questa nota tratta dell'argomento generale dei ponti di misura. L'argomento è molto interessante dal punto di vista storico e concettuale, benché non molto attuale e, purtroppo, non facilmente verificabile dal punto di vista sperimentale. Tuttavia è molto utile farne una breve trattazione.

## I. INTRODUZIONE

L'uso delle configurazioni a ponte per misurare grandezze elettriche (resistenze, capacità, induttanze) ha un ruolo storico di rilievo. Infatti, come vedremo, la configurazione a ponte permette di aumentare la sensibilità della misura senza fare uso di componenti "attivi" (amplificatori di segnale), un po' come tutti quei sistemi che permettono di "esaltare" la precisione (pensate a uno strumento a lancetta con una lancetta molto lunga: un piccolo spostamento angolare diventa un grande spostamento tangenziale, facile da misurare).

Con lo sviluppo della tecnologia elettronica, analogica e digitale, i ponti di misura in quanto tali sono stati abbondantemente confinati a un ruolo "storico", dato che si sono resi disponibili metodi più raffinati per garantire la stessa sensibilità, o per averla addirittura migliore, evitando allo stesso tempo le complicazioni e la delicatezza strumentale che è intrinseca alle configurazioni a ponte. Per altro, complicazioni e delicatezza sono anche i motivi che rendono difficile realizzare praticamente esercitazioni sui ponti che abbiano un esito soddisfacente.

In ogni caso ci sono motivi concettuali e anche pratici (oltre che per la misura di grandezze elettriche, le configurazioni a ponte sono spesso usate per misurare il "bilanciamento" tra segnali, cioè per misurare piccole differenze tra segnali di bassa intensità) per cui è utile soffermarsi anche su questo argomento.

## II. IL PONTE, IN GENERALE

In termini molto generali, la configurazione a ponte prevede di collegare (almeno) quattro componenti dotati di quattro impedenze, generalmente complesse,  $Z_{1-4}$ , secondo lo schema di Fig. 1. Il circuito prevede poi il collegamento a un generatore  $V_{\omega in}$ , generalmente alternato e sinusoidale (quindi il problema è trattabile con il metodo simbolico), e la lettura di un segnale  $V_{\omega}$ , anch'esso generalmente alternato e sinusoidale, secondo quanto riportato nello schema.

I rami A e B, costituiti rispettivamente dalle serie  $Z_1, Z_4$  e  $Z_2, Z_3$ , sono collegati tra loro in parallelo. Il segnale  $V_{\omega}$ , è pari alla "caduta di potenziale" ai capi dell'impedenza 3 meno quella ai capi dell'impedenza 4, cioè:  $V_{\omega} = Z_3 I_{\omega B} - Z_4 I_{\omega A}$ , dove  $I_{\omega A}$  e  $I_{\omega B}$  sono i fasori delle intensità di corrente dei due rami. A causa del collegamento in parallelo tra di loro, si ha un partitore di corrente,

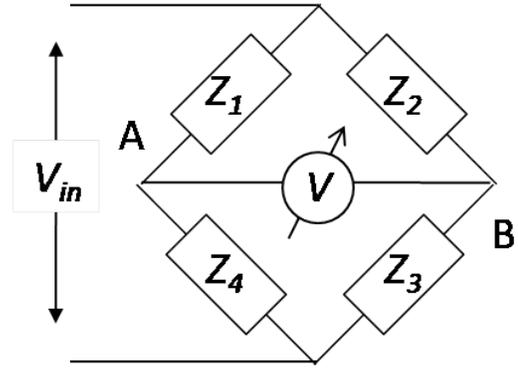


Figura 1. Topologia generale di una configurazione circuitale a ponte.

cioè  $I_{\omega B}/I_{\omega A} = (Z_1 + Z_4)/(Z_2 + Z_3)$ . Di conseguenza:

$$V_{\omega} = I_{\omega A} \left( Z_3 \frac{Z_1 + Z_4}{Z_2 + Z_3} - Z_4 \right) = \frac{I_{\omega A}}{Z_2 - Z_3} (Z_1 Z_3 - Z_2 Z_4). \quad (1)$$

Nell'uso della configurazione a ponte per eseguire misure si è normalmente interessati a determinare le condizioni in cui  $|V_{\omega}| = 0$ . Questo si verifica quando  $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$ . Se guardate lo schema, vedete che questa equazione equivale a dire, a parole, che *sono uguali i prodotti delle impedenze che si trovano su lati "opposti" del ponte*. Per il momento, non ci preoccupiamo di specificare il significato matematico dell'equazione appena scritta nel caso in cui le impedenze considerate siano complesse, cioè non puramente reali o immaginarie. Vedremo caso per caso quali conseguenze si possono trarre dall'uguaglianza appena scritta.

Nel seguito esamineremo tre configurazioni a ponte particolarmente famose, che si differenziano fra loro per la tipologia di componenti impiegati e per le finalità della misura che è resa possibile.

### A. Ponte di Wheatstone

Il ponte di Wheatstone è nient'altro che un ponte in cui le 4 impedenze sono tutte reali, cioè i 4 componenti sono 4 resistori (o composizioni di resistori). Visto che per i resistori non ci sono sfasamenti tra tensione e corrente, usare un generatore alternato non porta vantaggi rispetto a un generatore continuo, che è quello che immaginiamo di impiegare come  $V_{in}$ .

Supponiamo anche, come in genere si fa (ceva), che uno dei resistori abbia una resistenza incognita, per esempio  $R_1$ , e che un altro dei resistori abbia un valore variabile, per esempio  $R_4$ , che dunque potrebbe essere un *potenziometro*. La condizione di bilanciamento tra i rami, cioè quella per cui  $|V_\omega| = 0$ , si ottiene quando  $R_1 = R_4 R_2 / R_3$ . Quindi il valore, supposto incognito, di  $R_1$  si può ottenere conoscendo quello degli altri resistori. In particolare, esso risulta dal valore di  $R_4$ , che per esempio può essere aggiustato girando la manopola del potenziometro (che si può opportunamente calibrare misurando una volta per tutte la sua resistenza in funzione della rotazione della manopola), moltiplicato per il *fattore di scala*  $R_2 / R_3$ , che negli strumenti di misura poteva essere facilmente modificato per permettere di cambiare la portata. Scegliendolo in modo opportuno, la sensibilità di misura veniva opportunamente aumentata. Inoltre, grazie all'uso di strumenti (a lancetta, ovviamente) che potevano apprezzare differenze di potenziale, o correnti, di un segno o dell'altro, era sperimentalmente agevole determinare la condizione di bilanciamento osservando che la lancetta passasse proprio per la posizione di zero, tipicamente quella centrale.

Questo, a grandi linee, è quanto si faceva per e con un ponte di misura per le resistenze.

### B. Ponte di de Sauty

In questo caso l'obiettivo è misurare una capacità. Immaginiamo dunque che un condensatore, di capacità incognita, occupi il posto del componente 1, la cui impedenza sarà quindi  $Z_1 = 1/(j\omega C_1)$ . È evidente che in questo caso si deve usare un generatore alternato. Infatti in continua un condensatore si comporta come un circuito aperto e non potrebbe passare corrente per il ramo A. La condizione di bilanciamento sarebbe possibile solo sostituendo con un circuito aperto almeno uno dei componenti del ramo B. Si avrebbe bilanciamento, ma, chiaramente, non si potrebbe determinare il valore di  $C_1$ . Inoltre  $Z_1$  è immaginaria, e quindi è necessario che almeno un altro componente del ponte abbia impedenza immaginaria, altrimenti il bilanciamento sarebbe impossibile da ottenere. Nella configurazione di de Sauty tale componente si trova nel ramo B, e noi supponiamo sia il componente 2, che è un condensatore di valore noto e ha quindi impedenza  $Z_2 = 1/(j\omega C_2)$ . Per gli altri due componenti scegliamo ancora dei resistori, uno dei quali, per esempio il componente 4, supponiamo sia un potenziometro. La condizione di bilanciamento, da verificarsi ovviamente con uno strumento in grado di leggere segnali alternati, è allora  $C_1 = C_2 R_3 / R_4$ , che, agendo sul potenziometro  $R_4$ , permette di ricavare  $C_1$  a partire dalla conoscenza degli altri tre valori.

Notate un paio di aspetti molto importanti: si vede come la condizione di bilanciamento sia indipendente dalla frequenza. Naturalmente ciò si verifica solo se le capacità considerate sono indipendenti dalla frequenza, affer-

mazione che non è sempre e necessariamente del tutto vera. Dunque una misura con un ponte in cui si può modificare la frequenza del generatore costituisce un valido test finalizzato proprio a verificare entro quali limiti l'approssimazione di capacità indipendente dalla frequenza è valida.

Altro aspetto interessante dal punto di vista pratico: il bilanciamento potrebbe essere ottenuto anche immaginando di usare un condensatore variabile  $C_3$  e una coppia di resistori fissi. Questa implementazione avrebbe degli svantaggi pratici, poiché non è semplice costruire condensatori variabili che funzionino bene (tanti anni fa si usavano condensatori variabili ad aria negli apparecchi radio fatti con settori semicircolari rotanti che fungevano da armature) e possano essere calibrati in maniera affidabile. Dunque il ponte di de Sauty permette di superare questa difficoltà usando, invece, un potenziometro, che è molto più semplice da costruire e può essere calibrato in modo piuttosto affidabile.

### C. Il ponte di Maxwell

Vediamo ora cosa succede se si vuole utilizzare un ponte per misurare un'induttanza. Supponiamo allora che il componente 1 sia un induttore. Se fosse possibile costruire un induttore che ha un'impedenza puramente immaginaria (detta anche reattanza), il problema sarebbe formalmente analogo a quello dei condensatori e l'interesse concettuale scemerebbe. Purtroppo un induttore ha sempre anche una componente reale della sua impedenza, dovuta alla resistenza ohmica del filo che lo costituisce. Raramente si verifica che tale resistenza sia trascurabile, magari a frequenze alte, dove però generalmente il valore della resistenza interna di un induttore aumenta, ad esempio per l'effetto di prossimità, come già abbiamo incontrato. Dato che anche la resistenza interna di un induttore incognito è incognita, è evidente che in questo caso bisogna escogitare un qualche sistema che permetta di eseguire due misure ( $R_1$  e  $L_1$ ) invece che una sola.

Prima di arrivare a quello che si definisce generalmente (noi definiamo) ponte di Maxwell vero e proprio, vediamo qualche possibilità alternativa, mettendo in luce i limiti pratici o concettuali che vi sono coinvolti. Ricordiamo che per l'induttore (reale) da misurare è  $Z_1 = j\omega L_1 + R_1$ . I casi di cui si parla qui nel seguito sono rappresentati in Fig. 2, che riporta un'illustrazione adattata dalle trasparenze della Prof. Andreozzi (anno accademico 2010/11).

#### 1. Caso 1

Immaginiamo qui:  $Z_2 = j\omega L_2 + R_2$ ,  $Z_3 = R_3$ ,  $Z_4 = R_4$ , quest'ultima supposta variabile (il componente 2 è un induttore noto, il 3 e il 4 sono dei resistori, l'ultimo dei quali variabile per permettere il bilanciamento).

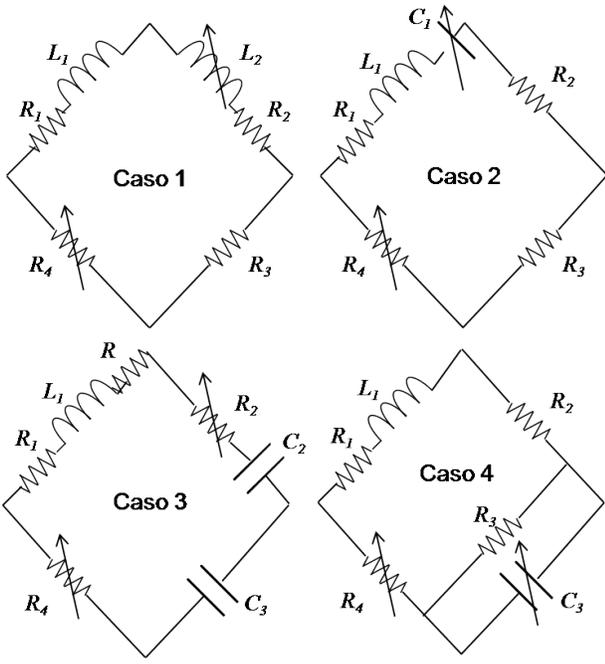


Figura 2. I quattro casi, ovvero configurazioni, discussi nel testo. Il caso 4 è quello che noi indichiamo generalmente come ponte di Maxwell.

Per il bilanciamento si deve verificare:  $(j\omega L_1 + R_1)R_3 = (j\omega L_2 + R_2)R_4$ , cioè, esaminando separatamente le componenti immaginarie e reali:  $L_1 = L_2 R_4 / R_3$  e  $R_1 = R_2 R_4 / R_3$ . Queste due condizioni possono essere esplorate separatamente, usando rispettivamente un generatore alternato o uno continuo. Ma c'è un problema pratico non da poco: i rapporti  $L_1/L_2$  e  $R_1/R_2$  devono essere uguali. Ora  $R_1$  è supposto incognito tanto quanto  $L_1$ , e quindi non è possibile costruire un induttore di riferimento che abbia  $L_2$  e  $R_2$  tali da soddisfare sempre e comunque la condizione. Possibilità alternativa è quella di supporre anche  $L_2$  variabile (e magari  $R_2$  fissa, oppure variabile indipendentemente da  $L_2$ ). Si può fare, ma è piuttosto complicato (pensate a come si può realizzare un componente con induttanza variabile) ed è difficile che il tutto funzioni bene. Inoltre, per un fenomeno che già conoscete, gli induttori tendono a “parlare” tra di loro attraverso la mutua induzione, cioè il loro comportamento dipende anche dalla presenza, a breve distanza, degli altri induttori, per cui lo strumento rischia di essere perturbato in maniera dipendente dalle condizioni di uso.

Questi motivi sono sufficienti a decretare la scarsa funzionalità di questa configurazione.

## 2. Caso 2

Supponiamo qui di “compensare” la reattanza  $L_1$  mettendo in serie al componente 1 un condensatore variabile di capacità  $C_1$  (supponiamo di poter disporre di

un buon condensatore variabile). Allora immaginiamo  $Z_1 = j\omega L_1 + R_1 + 1/(j\omega C_1)$ . Scegliamo poi tutti gli altri componenti come resistivi, cioè  $Z_2 = R_2$ ,  $Z_3 = R_3$ ,  $Z_4 = R_4$ , supposta variabile.

Le condizioni di bilanciamento impongono:  $(j\omega L_1 + R_1 + 1/(j\omega C_1))R_3 = R_2 R_4$ , ovvero, separando le componenti immaginarie e reali:  $R_1 = R_2 R_4 / R_3$  e  $L_1 = 1/(\omega^2 C_1)$ . Quest'ultima espressione ci mostra che la misura di  $L_1$  richiederebbe di conoscere  $\omega$ , cioè sarebbe funzione di  $\omega$ , cosa contraria allo spirito della misura a ponte, almeno nella filosofia convenzionale di queste misure. Infatti l'uso pratico dei ponti di misura risale a un'epoca nella quale la misura della frequenza, come anche la generazione di segnali a una data frequenza, era poco agevole, non essendo disponibile la tecnologia digitale che è alla base del funzionamento dei moderni frequenzimetri, e anche dei moderni generatori di funzione. Inoltre ci sarebbe un altro problema: la presenza del condensatore  $C_1$  rende impossibile utilizzare il ponte in continua (non passerebbe corrente lungo il ramo A), per cui le due condizioni di cui sopra non possono essere verificate indipendentemente. Quindi questa configurazione è assai poco funzionale e va scartata.

## 3. Caso 3

Supponiamo qui di collegare in serie all'induttore reale incognito una resistenza ulteriore, che chiamiamo  $R$ . Inoltre il componente 2 è la serie di un condensatore ( $C_2$ ) e una resistenza (supposta variabile e indicata come  $R_2$ ), mentre componente 3 e 4 sono rispettivamente un condensatore  $C_3$  e una resistenza variabile  $R_4$ . Osservate subito un buon vantaggio pratico della configurazione: gli elementi variabili sono solo resistenze. Notate però anche lo svantaggio, comune al caso 2, consistente nell'impossibilità di usare il ponte in continua (non passerebbe corrente nel ramo B).

Le impedenze sono:  $Z_1 = j\omega L_1 + R_1 + R$ ,  $Z_2 = 1/(j\omega C_2) + R_2$ ,  $Z_3 = 1/(j\omega C_3)$  e  $Z_4 = R_4$ . La condizione di bilanciamento è:  $(j\omega L_1 + R_1 + R)/(j\omega C_3) = (R_2 + 1/(j\omega C_2))R_4$ , ovvero, separando le componenti:  $L_1 = R_4 R_2 C_3$  e  $R_1 = R_4 (C_3 / C_2) - R$ . Si ritrova l'indipendenza dalla frequenza, che è cosa buona, ma si incontra un ulteriore problema. Il bilanciamento di tutte e due le componenti deve avvenire in alternata e la determinazione di  $R_1$  richiede di aggiustare la resistenza variabile (eventualmente calibrata)  $R_4$ . Però il valore di  $R_4$  influenza anche la misura di  $L_1$ . Se ci pensate un po', potete facilmente concludere che l'uso di questa configurazione è complicato: avete due manopole, dovete operare sempre in alternata, una manopola, quella di  $R_4$ , serve per misurare  $R_1$  ma serve anche, moltiplicata per  $R_2$ , che è pure variabile, per misurare  $L_1$ . In altre parole, componente reattiva e resistiva dell'induttore 1 non possono essere misurate in modo indipendente tra loro, e ciò ci induce a scartare anche questa configurazione.

#### 4. Caso 4 - Ponte di Maxwell

In questa configurazione la principale particolarità che salta all'occhio è che il componente 3 è costituito da un parallelo tra un condensatore (variabile)  $C_3$  e una resistenza  $R_3$ . Come nel caso 1, il ponte che si costruisce può operare sia in continua che in alternata. Inoltre questo caso ha il vantaggio pratico rispetto al caso 1 dovuto alla circostanza che c'è un solo induttore (quindi la mutua induzione non disturba).

Le impedenze sono:  $Z_1 = j\omega L_1 + R_1$ ,  $Z_2 = R_2$ ,  $Z_3 = R_3/(1 + j\omega R_3 C_3)$  (resistore e condensatore sono in pa-

rallelo tra loro),  $Z_4 = R_4$ , supposta variabile. Il bilanciamento richiede:  $(j\omega L_1 + R_1)(R_3/(1 + j\omega R_3 C_3)) = R_2 R_4$ . Separando le componenti immaginaria e reale, a cui si può accedere usando un generatore alternato o continuo, si ha:  $L_1 = R_4 C_3 R_2$  e  $R_1 = R_2 R_4 / R_3$ .

L'indipendenza dalla frequenza è soddisfatta. Inoltre è vero che anche qui le manopole sono due ed è il loro prodotto a determinare le misure di interesse, ma stavolta si può pensare di aggiustare prima una (per esempio  $R_4$ ) e poi l'altra (per esempio  $C_2$ ) manopola bilanciando prima in continua e poi in alternata, o viceversa.

Tutto questo rende(va) molto funzionale la configurazione, al punto di farle meritare il nome di ponte di Maxwell.