Esperienza sulla resistenza interna del generatore e best-fit

francesco.fuso@unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 2 - FF, 19 ottobre 2015)

Questa breve nota riporta i principali risultati ottenuti nell'esperienza della stima della resistenza interna del generatore tramite best-fit. Gli esempi qui illustrati hanno lo scopo primario di mostrare cosa si può ottenere e come si può procedere in questa esperienza. Inoltre essi permettono di commentare brevemente su diversi aspetti potenzialmente rilevanti.

I. ESPERIENZA E MODELLI

L'esperienza, semplicissima sia dal punto di vista concettuale che da quello pratico, prevede di montare il circuito di Fig. 1(a), costituito da un generatore di differenza di potenziale V_0 (misurata a "circuito aperto"), un resistore di resistenza R_j appartenente a un set preliminarmente misurato con tester digitale configurato come ohmetro, e un amperometro che misura la corrente I_j che fluisce nel circuito. In questo esempio si impiega il tester digitale configurato come amperometro per la misure dell'intensità di corrente.

Il circuito può essere modellato usando la legge di Ohm. Sulla base delle conoscenze che abbiamo, possiamo distinguere almeno tre "livelli" (crescenti) di accuratezza nel modello:

1. il modello più semplice, che si riferisce proprio alla Fig. 1(a), prevede che l'*unico* elemento resistivo sia costituito da R_j. Pertanto la legge che descrive questo modello è
$$I = \frac{V_0}{R} , \tag{1}$$
che prevede proporzionalità inversa tra l'intensità di corrente I misurata dall'amperometro e la resistenza R;

2. un modello più raffinato impone di considerare la *resistenza interna* r_G che descrive il generatore di d.d.p. (reale) nell'approccio di Thevenin; poiché questa resistenza è in serie al circuito [vedi Fig. 1(b)], la legge diventa
$$I = \frac{V_0}{R + r_G} ; \tag{2}$$

3. un ulteriore affinamento del modello prevede di includere *anche* la resistenza interna r_A dell'amperometro (reale), secondo quanto schematizzato in Fig. 1(c); in questo caso la legge recita
$$I = \frac{V_0}{R + r_G + r_A} . \tag{3}$$

La gerarchia con cui sono stati elencati i modelli risente, naturalmente, delle conoscenze che già abbiamo. A posteriori verificheremo che effettivamente la resistenza interna del generatore r_G ha un ruolo più importante, almeno per l'esempio qui considerato, della resistenza interna dell'amperometro r_A. Quest'utlima possiamo dedurla dalle informazioni riportate nel manuale del tester (digitale), mentre possiamo immaginare per il momento incognito il valore r_G. Di conseguenza possiamo interpretare questa esperienza come un modo, un po' involuto, per *misurare indirettamente* r_G, con il vantaggio (almeno potenziale) di sfruttare tanti dati e il best-fit per aumentare l'accuratezza della nostra misura.

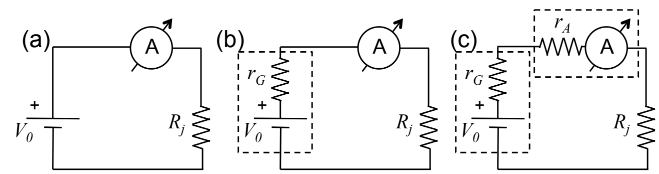

Figura 1. Rappresentazione schematica del circuito considerato (a), con esplicitate la resistenza interna r_G del generatore (b) e r_A dell'amperometro (c). I box tratteggiati racchiudono il generatore di d.d.p. (reale) e l'amperometro (reale).

A. Resistenza interna dell'amperometro

Il manuale del tester digitale indica in $\Delta V_{\mathrm{ins,fs}} = 200$ mV la caduta di potenziale per inserzione dello strumento quando la lettura va a fondo scala. Questo dato è riportato senza incertezza, anche se esso dovrebbe essere corredato di un'opportuna barra di errore. La resistenza interna può essere dedotta dalla legge di Ohm come $r_A = \Delta V_{\mathrm{ins,fs}}/I_{\mathrm{fs}}$, dove I_{fs} è il *fondo scala* della portata di misura in corrente che si sta effettuando. L'esperienza richiede di utilizzare resistenze R_j in un vasto intervallo di valori (oltre sei decadi), in corrispondenza dei quali anche l'intensità di corrente che fluisce nel circuito varia di altrettanti ordini di grandezza. Allo scopo di mantenere la significatività delle misure, nell'esperienza è necessario usare parecchie portate per la misura di corrente. La resistenza interna corrispondente è diversa a seconda della scala impostata.

In particolare si ottiene nominalmente $r_A = \{1, 10, 10^2, 10^3, 10^4\}$ ohm per i fondi scala `{200, 20, 2, 0.2 mA}` e 20 μA, rispettivamente. Fortunatamente, grazie alla dipendenza inversa della corrente con la resistenza espressa dalle leggi scritte prima, i valori più alti di resistenza interna corrispondono ai fondo scala di intensità di corrente che si hanno quando la resistenza R è grande. Questo ci autorizza a trascurare, in prima battuta, l'effetto della resistenza interna dell'amperometro nel circuito sotto esame. Torneremo a posteriori su questa affermazione.

II. DATI E BEST-FIT

Poiché l'esperienza richiede di variare R_j su un vasto intervallo, e poiché anche I_j varia sullo stesso intervallo, è opportuno rappresentare i dati in scala *logaritmica*. In Python questo si ottiene per esempio con i comandi `pylab.xscale('log'); pylab.yscale('log')`. Osservate che, qualora valesse la legge espressa da Eq. 1, i dati dovrebbero essere tutti allineati lungo una retta con coefficiente angolare -1 (sulla scala del grafico). Per agevolare l'individuazione a occhio di questa direzione, i due assi del grafico sono stati regolati in modo da coprire lo stesso intervallo in decadi (sette decadi). Dunque la direzione ricercata è per esempio quella della linea che collega i massimi (punti estremi) degli assi.

Se si osservano i dati riportati in Fig. 2, risulta evidente che essi *non* seguono (tutti) l'andamento previsto da Eq. 1: in particolare, per bassi valori di R_j, la corrente è evidentemente più bassa di quanto ci si aspetterebbe secondo quella legge. La presenza delle resistenze interne può correttamente interpretare l'osservazione sperimentale. La linea continua sovrapposta ai dati di figura è il risultato di un best-fit *numerico* secondo la funzione

$$I = \frac{V_0}{R + r} , \tag{4}$$

con $r = (r_G + r_A)$, lasciando come parametri di best-fit V_0 e r [1]. Notiamo che, ovviamente, *non è possibile* pretendere che l'algoritmo di best-fit distingua tra le due resistenze interne (in altre parole, r_A e r_G sono perfettamente correlati tra loro, e il best-fit deve considerare un'"unica" resistenza interna somma delle due). Dal punto di vista concettuale, questa scelta presenta un problema: infatti sappiamo che r_A *non* è costante per tutte le misure, per cui a rigore non ha senso considerarlo un parametro per l'intero set di dati. Torneremo in seguito su questo punto.

Il best-fit è stato eseguito modificando (in modo molto molto leggero) lo script già impiegato per l'analisi di dati "inventati" e discusso in un'altra nota. A parte dettagli (rappresentazione logaritmica, nomi degli assi, scale), la modifica di maggior rilievo è la definizione della funzione, che in questo caso è data da queste due linee di script:

```
def ff(x, aa, bb):
    return aa/(bb+x)
```

dove `aa` e `bb` hanno il ruolo dei parametri "fisici" (correttamente dimensionati) V_0 e r, i cui valori iniziali possono facilmente essere dedotti dall'analisi del circuito. Per il best-fit di figura sono stati considerate solamente le incertezze ΔI_j sulle correnti (in seguito si tornerà anche su questo punto). I risultati del best-fit sono

$$V_0 = (4.94 \pm 0.02)\ \mathrm{V} \tag{5}$$
$$r = (18.6 \pm 0.6)\ \mathrm{ohm} \tag{6}$$
$$\chi^2/\mathrm{ndof} = 54/13 \tag{7}$$
$$\mathrm{norm.cov.} = 0.38\ . \tag{8}$$

Il valore di V_0 non è compatibile con la misura a circuito aperto eseguita collegando il solo tester digitale, configurato come voltmetro, al generatore di d.d.p.: $V_{0,ap} = (5.04 \pm 0.025)$ V. La correlazione positiva è attesa per come è scritta la funzione (l'aumento di V_0 è "compensato" da un aumento di r) e il χ^2 ridotto è nettamente superiore all'unità.

Prima di proseguire con altre varianti di best-fit, notiamo, con un ragionamento a spanne, che i dati suggeriscono che la resistenza interna dell'amperometro non sia l'(unica) responsabile per gli effetti registrati. Infatti i punti sperimentali che maggiormente si discostano dall'andamento rettilineo (in carta logaritmica) sono stati acquisiti usando il fondo scala `200 mA` per l'amperometro, a cui corrisponde una resistenza interna $r_A = 1$ ohm (nominale). Essendo il valore di r ottenuto dal best-fit superiore di un ordine di grandezza, si può ragionevolmente supporre che la resistenza interna del generatore giochi un ruolo non trascurabile, e anzi predominante.

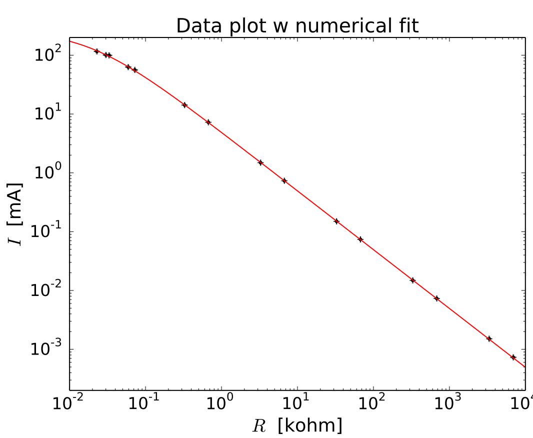

Figura 2. Dati e best-fit numerico secondo la funzione di Eq. 4. Notate che le barre di errore sono state correttamente incluse nel grafico, ma esse sono tali da essere difficilmente visibili.

III. LINEARIZZAZIONE DELL'ANDAMENTO

Come norma generale, sappiamo che un fit analitico è spesso preferibile a un fit numerico. Poiché il fit analitico può essere eseguito solo per funzioni "semplici" (per noi, solo una retta che eventualmente non passi per l'origine), conviene chiedersi se non sia possibile ricondurre l'andamento di Eq. 4 a una funzione lineare. Una buona possibilità è costituita dall'utilizzare, invece che la corrente I, il suo reciproco $Y = 1/I$. Infatti usando questa nuova grandezza (che avrà le dimensioni del reciproco di una intensità di corrente) l'Eq. 4 diventa

$$Y = \frac{R}{V_0} + \frac{r}{V_0} \tag{9}$$

che è proprio l'equazione di una retta $y = a + bx$, con $V_0 = 1/b$ e $r = aV_0 = a/b$.

Questa linearizzazione implica necessariamente di manipolare i dati, operazione che può essere fatta molto agevolmente da Python. Inoltre occorre anche manipolare le incertezze ΔI_j in modo da esprimere, con le ben note regole di propagazione dell'errore, l'incertezza ΔY_j. Una volta eseguite queste operazioni, il best-fit può essere condotto in modo analitico (se si vuole, anche in modo numerico) usando piccole varianti degli script discussi in un'altra nota. L'esito è mostrato in Fig. 3; i risultati del best-fit, riportati ai parametri di interesse fisico (e facendo opportuno uso della propagazione dell'errore massimo), sono:

$$V_0 = (4.943 \pm 0.006)\ \mathrm{V} \tag{10}$$

$$r = (18.5 \pm 0.5)\ \mathrm{ohm} \tag{11}$$

$$\chi^2/\mathrm{ndof} = 53/13 \tag{12}$$

che sono in accordo con quelli determinati in precedenza (con un incremento dell'accuratezza per la determinazione di V_0) [2].

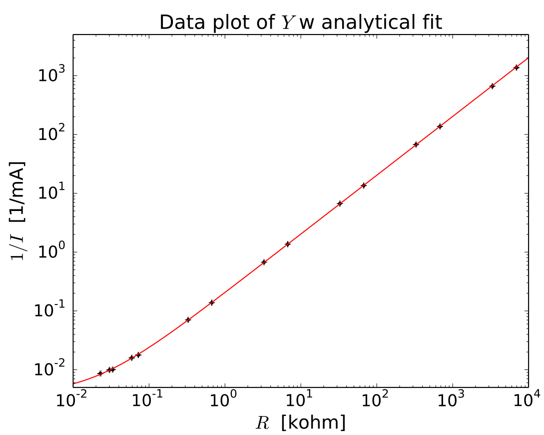

Figura 3. Dati linearizzati secondo quanto discusso nel testo e best-fit analitico secondo la funzione di Eq. 9. Notate che le barre di errore sono state anche in questo caso correttamente incluse nel grafico, ma esse sono tali da essere difficilmente visibili.

A. Incertezze ΔR_j

La misura delle resistenze R_j è eseguita con il tester (digitale), per cui essa è inevitabilmente affetta da errore normalmente dominato dall'incertezza di calibrazione. Questo meccanismo rientra anche nel determinare l'incertezza sulla misura di corrente I_j. Pertanto, almeno in linea di principio, le incertezze ΔR_j non possono essere considerate trascurabili. Di esse possiamo tenere conto nel modo (non elegante e non sicuro) che abbiamo già discusso, basato sulla propagazione dell'errore. Dal punto di vista tecnico, l'operazione è molto semplice se si usano i dati linearizzati, per cui faremo riferimento a questo caso (e, come ulteriore semplificazione, considereremo un best-fit analitico).

Il best-fit così prodotto è riportato in Fig. 4 assieme al grafico dei residui normalizzati. Si osserva come i residui normalizzati siano spesso al di fuori del range atteso (compreso tra -1 e +1), in particolare per bassi valori di R_j: questo è un segno di scarsa affidabilità del best-fit. I risultati sono:

$$V_0 = (4.95 \pm 0.01)\ \mathrm{V} \tag{13}$$

$$r = (18.5 \pm 0.4)\ \mathrm{ohm} \tag{14}$$

$$\chi^2/\mathrm{ndof} = 27/13\ . \tag{15}$$

Essi sono in accordo con quanto trovato in precedenza, a parte un'ovvia diminuzione del χ^2 (stavolta $\chi^2_{rid} \simeq 2$).

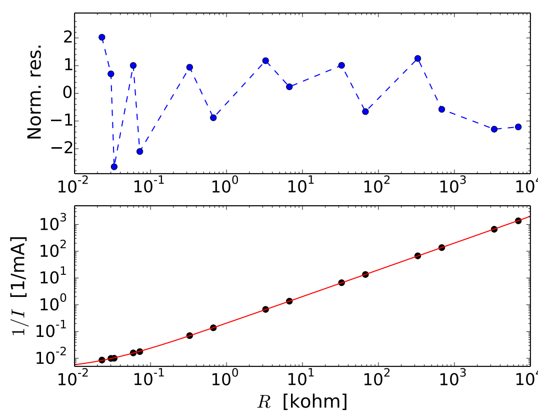

Figura 4. Analogo di Fig. 3 con il best-fit eseguito tenendo conto anche dell'incertezza ΔR_j (attraverso propagazione dell'errore); il pannello superiore mostra il grafico dei residui normalizzati.

B. Inclusione di r_A

Un motivo per cui la "qualità" dei best-fit ottenuti non è particolarmente elevata, come evidenziato dalla discrepanza del valore di V_0 rispetto a quello misurato a circuito aperto, dal χ^2 e dall'analisi dei residui normalizzati, potrebbe essere individuato nel trattamento che abbiamo riservato a r_A. Come già affermato, tale parametro non è costante per l'intero set di dati, ma dipende dalla portata effettivamente impiegata per la misura delle correnti in corrispondenza dei vari valori R_j. Questa limitazione non può essere risolta con il best-fit, dato che esso considera allo stesso modo tutti i dati del set. Dato che conosciamo a priori, almeno nominalmente, il valore di r_A per ciascuna delle portate impiegate, una via semplice per tenerne conto può essere quella di rimpiazzare R_j con $X_j = R_j + r_A$ (con r_A, si ripete, opportunamente determinato ed espresso come valore nominale, senza incertezza). In questo modo la funzione di best-fit, scritta modificando Eq. 2 e tenendo conto di quanto fatto in Eq. 9, diventa

$$Y = \frac{X}{V_0} + \frac{r_G}{V_0} \ , \tag{16}$$

che contiene solo la resistenza interna r_G, supposta costante per l'intero set di dati.

L'ulteriore manipolazione a cui vengono sottoposti i dati può essere facilmente realizzata con Python, per esempio creando un'ulteriore colonna del nostro file di testo che contiene r_A nelle effettive condizioni di misura (portata). Facciamo subito una considerazione importante: questa manipolazione *dovrebbe* essere accompagnata da un aumento dell'incertezza, cioè dovremmo porre $\Delta X_j = \sqrt{(\Delta R_j)^2 + (\Delta r_A)^2}$. Poiché, però, Δr_A non è nota, usiamo i valori nominali accettando di conseguenza una possibile sottostima dell'incertezza.

L'esito dell'operazione è riportato in Fig. 5: si nota una piccola riduzione del valore medio dei residui normalizzati rispetto a Fig. 4, che si riflette in un'ulteriore (piccola) riduzione del χ^2. I risultati sono infatti

$$V_0 = (5.02 \pm 0.02) \text{ V} \tag{17}$$
$$r_G = (18.3 \pm 0.4) \text{ ohm} \tag{18}$$
$$\chi^2/\text{ndof} = 24/13 \ . \tag{19}$$

L'aspetto più interessante, però, è nel valore di V_0 che questa volta è compatibile con $V_{0,ap} = (5.04 \pm 0.025)$ V.

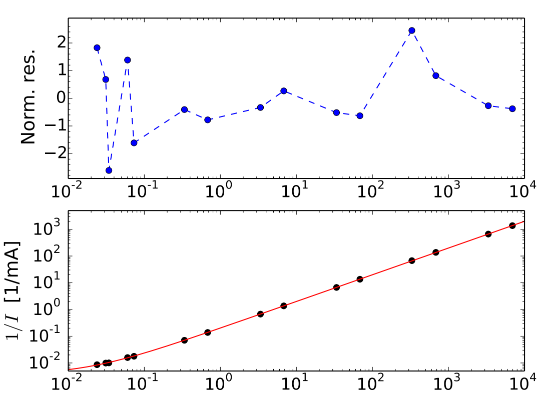

Figura 5. Analogo di Fig. 4, ma considerando per l'asse orizzontale la grandezza $X = R - r_A$, secondo quanto discusso nel testo.

IV. MISURA "ALLA THEVENIN" E COMMENTI

Secondo il cosiddetto *teorema, o modello, di Thevenin*, qualsiasi generatore di d.d.p. (che comprenda solo elementi resistivi) può essere modellato come un generatore ideale di d.d.p. V_{Th} con in serie una resistenza R_{Th}. Il modello prevede delle regole pratiche per determinare V_{Th} e R_{Th} sia nel caso in cui sia noto il circuito sotto esame (questa sarà la situazione che incontrerete in prossime esercitazioni) che in quello in cui il generatore reale è, di fatto, una *scatola nera*. Questa è la situazione della presente esperienza.

In tali condizioni, V_{Th} può essere *misurato* collegando al generatore un voltmetro ideale. Tenendo conto che, grazie alla sua grande resistenza interna ($r_V = 10$ Mohm), il tester digitale approssima piuttosto bene un voltmetro ideale, si ha sostanzialmente $V_{Th} = V_{0,ap}$ (l'aggettivo "aperto" qui richiamato nel pedice fa proprio riferimento al fatto che il tester digitale configurato come voltmetro si comporta come un *circuito aperto*, cioè non passa praticamente corrente attraverso di esso). La resistenza di Thevenin R_{Th} è invece identificabile con r_G. Secondo la ricetta di Thevenin, essa può essere *misurata* collegando un carico resistivo R_L esterno e applicando la legge di Ohm alla serie costituita da r_G e R_L, con la precauzione di impiegare una R_L simile, in valore, a r_G. Questo metodo consente di trascurare la resistenza interna dell'amperometro (non c'è amperometro nel circuito) e dunque di ottenere una valutazione di r_G, ovvero R_{Th}, non affetta dalla potenziale discrepanza tra valore nominale (quello che si conosce dal manuale(e valore effettivo di r_A.

Un modo alternativo, meno corretto e dunque *da evitare* (ma qui usato per praticità), consiste nel dedurre il valore della serie di resistenze ($r_G + r_A + R_L$) dalla misura di corrente che attraversa il circuito. Nella pratica, questo consiste a montare il circuito di Fig. 1(a), ovvero una delle sue varianti dei pannelli (b) e (c), scegliendo R_j sufficientemente bassa. In sostanza, quindi, si può usare una delle misure effettuate nell'esperienza per stabilire, attraverso la soluzione di Eq. 3, ovvero Eq. 2 (con un modello ancora meno accurato), il valore di r_G partendo dalla conoscenza di $R_L = R_j$ (per un certo j), misurata con il tester, e di r_A, dedotta in valore nominale dal manuale del tester digitale.

Nell'esperienza è stato impiegato il dato ottenuto per $R_L = R_j = (22.9 \pm 0.35)$ ohm (una tale resistenza si è realizzata mettendo in parallelo i resistori di valore nominale 33 e 68 ohm). In queste condizioni si misura $I' = (116 \pm 1.3)$ mA (notate che si tiene una cifra ridondante nell'incertezza per minimizzare i problemi di arrotondamento). La soluzione di Eq. 3, supponendo il valore nominale $r_A = 1$ ohm e prendendo $V_{Th} = V_{0,ap} = (5.04 \pm 0.025)$ V, conduce a $r_G = R_{Th} = V_{Th}/I' - (R_L + r_A) = (19.5 \pm 1.0)$ ohm, dove si è correttamente impiegata la propagazione degli errori (e si ricorda ancora che si è preso il valore nominale, senza incertezza, di r_A). Questo valore è in accordo entro l'incertezza con quello ottenuto per r_G dai best-fit, ma, ovviamente, è affetto da un'incertezza più rilevante essendo determinato da una singola misura e non dall'intero set dei dati.

Come ultima conclusione, ripensiamo agli aspetti "fisici" che sono presumibilmente coinvolti nell'esperienza, partendo proprio dalla clausola che è inserita nel modello di Thevenin. In effetti l'alimentatore usato come generatore di d.d.p. non contiene al suo interno solo elementi resistivi. Infatti questo alimentatore è di tipo *switching* (avremo probabilmente modo di accennare al suo funzionamento, molto efficiente, in futuro) ed è realizzato con parecchia circuiteria elettronica comprendente certamente degli elementi "attivi" (transistors). Normalmente dispositivi di questo tipo sono caratterizzati da resistenze interne molto basse, e potenzialmente dipendenti dalle condizioni di operazione, in particolare dalla richiesta di corrente. Dunque è possibile che la nostra descrizione sia inadeguata.

Inoltre l'alimentatore dispone di un fusibile (di tipo "T", cioè a fusione rapida, e corrente massima nominale di 100 mA) posto in serie alla boccola di uscita. Questo componente è sicuramente resistivo (il fusibile è una resistenza che si fonde surriscaldandosi per effetto Joule) e in effetti la sua resistenza è dell'ordine della r_G, ovvero R_{Th}, ottenuta nell'esperimento (kudos to Diego per l'illuminante precisazione). Per come è realizzato, il fusibile certamente si scalda quando la richiesta di corrente approssima (o addirittura supera, nel nostro caso) la corrente massima che esso può sopportare. Riscaldandosi [3], esso cambia la sua resistenza, che dovrebbe aumentare con la temperatura. Di conseguenza, nel corso dell'esperienza la resistenza interna del generatore, dominata da quella del fusibile, è probabilmente non costante. Anche questo è un effetto che, chiaramente, non può essere incluso nei nostri modelli.

---

[1] Affinché la curva del fit sia graficata in modo visivamente accettabile, è bene che il valore della funzione di fit venga calcolato su un array di punti *equispaziati logaritmicamente*. In Python questo si può ottenere con il comando `xx=numpy.logspace(-2,4,100)`, che appunto crea un array (denominato qui `xx`) di 100 punti equispaziati logaritmicamante tra 10^{-2} e 10^4 (state attenti alla sintassi del comando).

[2] Come già fatto in altra occasione, non esprimiamo la correlazione per il fit analitico (per il fit numerico con gli stessi dati linearizzati si ottiene una covarianza normalizzata tra i parametri a e b pari a -0.28, essendo tutti gli altri parametri in accordo con il fit analitico).

[3] Lo stesso effetto, anche se in misura minore, potrebbe avvenire a carico delle R_j e probabilmente anche a carico dei componenti interni al tester. Di conseguenza, è bene che le misure effettuate a piena corrente durino poco tempo.