

# Risonanze

fuso@df.unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 5 - FF, 21 dicembre 2014)

Questa breve nota tratta alcuni aspetti (soprattutto di calcolo) relativi alle esercitazioni sull'oscillatore RLC forzato e smorzato. Inoltre, vista l'importanza dell'argomento toccato dalle esercitazioni, in questa nota si fanno alcuni collegamenti con altre situazioni fisiche di interesse generale, uniti a qualche considerazione di carattere altrettanto generale sul fenomeno della risonanza.

## I. INTRODUZIONE

Il fenomeno della risonanza è probabilmente tra quelli che hanno la più ampia applicazione in fisica e anche in tante altre discipline (ehm, si direbbe nel linguaggio comune che la risonanza ha la più ampia risonanza...). Inutile fare un elenco delle situazioni in cui la risonanza occupa un posto di rilievo ed è anche inutile ricordare gli effetti eclatanti della risonanza (per esempio, i ponti che crollano che campeggiano nei libri delle scuole medie). L'aspetto più importante del fenomeno è che, in risonanza, si stabilisce un efficace trasferimento di energia da una sorgente (la forzante) a un sistema (modellato come un oscillatore armonico smorzato).

L'esempio più semplice nell'ambito della meccanica è quello di una molla con costante elastica  $k$  a un cui estremo è vincolata una massa  $m$  (l'altro estremo è fisso). Se si suppone che il moto della massa sia soggetto a una forza di attrito viscoso  $F_A = -\beta v$  (il sistema è unidimensionale, e quindi non c'è bisogno di usare vettori), si fa in modo che non agiscano altre forze, e si prende l'origine dell'asse lungo cui avviene il moto (asse  $X$ ) in corrispondenza della lunghezza di riposo della molla, cioè della posizione di equilibrio, l'equazione del moto si scrive:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

dove  $\gamma = \beta/m$  è il coefficiente di smorzamento (a parte eventuali fattori) e  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  è la *frequenza (angolare) propria* dell'oscillatore. Questa equazione è quella di un oscillatore armonico smorzato, e la sua soluzione nel caso sotto-smorzato è ben nota. Essa prevede che la massa oscilla con frequenza angolare  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 4\gamma^2}$  e che l'ampiezza delle oscillazioni si riduca esponenzialmente nel tempo secondo la funzione  $\exp(-2\gamma t)$ .

Supponiamo ora che ci sia una forzante, cioè che sulla massa agisca una forza  $F_{ext}(t)$ , e immaginiamo che tale forza (naturalmente di direzione concorde con quella del moto, cioè diretta lungo  $X$ ) dipenda dal tempo in modo armonico, cioè sia  $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$  (notate che per semplicità si è scelta l'origine dei tempi in modo tale che all'istante  $t = t_0 = 0$  la forza abbia intensità massima). Al secondo membro dell'Eq. 2 va allora aggiunto un termine oscillante, del tipo  $K \cos(\omega t)$ , con  $K = F_0/m$ . Si ottiene in questo modo l'equazione di un oscillatore

forzato e smorzato:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = K \cos(\omega t). \quad (2)$$

A *regime*, cioè dopo aver aspettato un tempo sufficiente perché gli effetti della forzante prevalgano, l'equazione ha una soluzione che oscilla a frequenza  $\omega$ :  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ .

La determinazione di  $A$  e  $\phi$  e della loro dipendenza da  $\omega$  si può, almeno in linea di principio, ottenere derivando rispetto al tempo la  $x(t)$ , sostituendo e imponendo che valga l'uguaglianza sancita dall'equazione differenziale Eq. 2. Come sapete, questa operazione può diventare un po' laboriosa e conviene in genere servirsi di qualche truccetto basato su assunzioni ragionevoli, come per esempio l'uso del "polinomio caratteristico". In questa nota ci serviremo del metodo simbolico ("fasori"), che, in definitiva, è equivalente concettualmente ai metodi che già conoscete, offrendo in più il vantaggio di una semplice individuazione delle grandezze di interesse.

## II. EQUAZIONE DEL CIRCUITO NEL DOMINIO DEL TEMPO E DELLA FREQUENZA

Per fare riferimento specifico a quanto svolto nell'esperienza pratica, il circuito che si comporta da oscillatore smorzato e forzato, mostrato in Fig. 1, comprende due resistori che tengono conto della resistenza interna dell'induttore,  $r$ , e di una resistenza esterna,  $R$ . Inoltre lo schema mostra anche la presenza di un ulteriore elemento resistivo, la resistenza interna del generatore  $r_G$  (non si mostra invece la resistenza interna dello strumento di misura, l'oscilloscopio, che riteniamo produca effetti trascurabili). Sono anche indicati i segnali (differenze di potenziale) misurate nell'esperienza,  $V_{in}$  e  $V_{out}$ .

Detta  $V_{0G} \cos(\omega t) = V_G(t)$  la differenza di potenziale applicata alla maglia, l'equazione del circuito nel dominio del tempo è:

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{R'}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{V_{0G}}{L} \cos(\omega t), \quad (3)$$

con  $R' = r + R + r_G$ . Si vede subito come essa sia formalmente identica all'Eq. 2, e si intuisce anche come il coefficiente di smorzamento dipenda da  $R'/L$  e la frequenza (angolare) propria sia  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . La frequenza angolare di oscillazione è  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ , con

$\tau = 2L/R'$ . Nell'approssimazione di oscillatore sotto-smorzato, che supporremo valida per i nostri scopi, si può porre  $\omega' \simeq \omega_0$ .

Dunque l'andamento temporale della carica sull'armatura del condensatore,  $Q(t)$ , seguirà lo stesso andamento della posizione della massa  $x(t)$ , mentre l'intensità di corrente, che della carica è la derivata temporale, andrà come la velocità della massa,  $v(t)$ .

Se ci restringiamo a considerare la soluzione a regime, allora possiamo fare ottimo uso del metodo simbolico, che consiste, in sostanza, nell'indicare come grandezze complesse (oscillanti) tensioni e correnti. L'equazione del circuito in questo contesto si scrive:

$$V_{\omega G} = (R' + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L)I_{\omega} = \frac{j\omega R'C + 1 - \omega^2 LC}{j\omega C} I_{\omega}, \quad (4)$$

dove  $V_{\omega G}$  e  $I_{\omega}$  sono i fasori che rappresentano rispettivamente il segnale prodotto dal generatore e la corrente che circola nella maglia.

$V_{out}$  di figura è (supponendo l'impedenza interna dell'oscilloscopio molto più grande delle altre impedenze in gioco, come in genere si verifica) la caduta di tensione ai capi della resistenza  $R$ . Dunque, tornando alla notazione simbolica e facendo un po' di pulizia, si ha

$$V_{out} = \frac{j\omega RC}{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{\omega G}, \quad (5)$$

con  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Possiamo quindi determinare una *funzione di trasferimento* complessa  $T_G(\omega)$  tale che  $V_{out} = T_G(\omega)V_{\omega G}$ :

$$T_G(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (6)$$

Si vede subito che, per  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , un pezzo del denominatore si annulla, cosa che almeno intuitivamente ha a che fare con la risonanza.

Nella pratica, generalmente si preferisce definire la funzione di trasferimento come quella che lega i segnali osservati sperimentalmente, cioè  $V_{out}$  e  $V_{in}$ ; quest'ultimo segnale differisce da  $V_G$  per la caduta di potenziale attraverso la resistenza interna del generatore  $r_G$ , cioè si ha, per i fasori corrispondenti:

$$V_{in} = V_{\omega G} - r_G I_{\omega} = V_{\omega G} \left( 1 - r_G \frac{j\omega C}{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} \right), \quad (7)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione di  $I_{\omega}$  trovata prima.

Invertendo l'equazione e usando un minimo di algebra si trova

$$V_{\omega G} = \frac{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{in}, \quad (8)$$

che, sostituita nell'Eq. 5, conduce a

$$V_{out} = \frac{j\omega RC}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{in}. \quad (9)$$

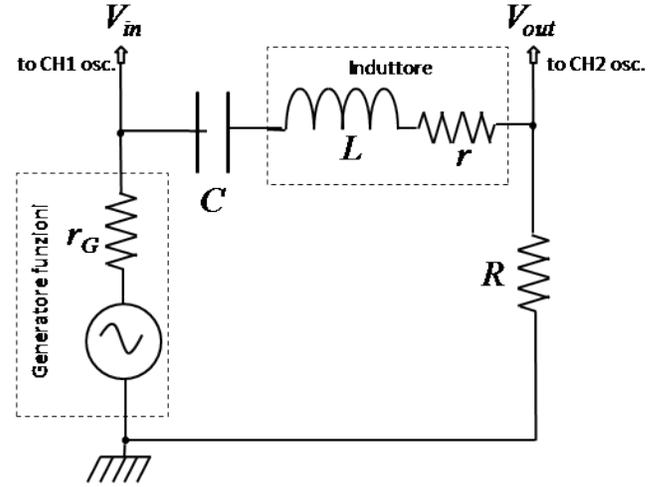


Figura 1. Circuito dell'oscillatore risonante (serie) considerato nel testo.

La funzione di trasferimento complessa  $T(\omega)$  tale che  $V_{out} = T(\omega)V_{in}$  è allora

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (10)$$

È evidente che essa approssima e viene approssimata da quella espressa in Eq. 6 se  $R' \sim (R+r)$ , cioè, come atteso, se la resistenza interna del generatore è trascurabile, ovvero  $r_G \ll (R+r)$ .

#### A. Risonanza nella serie e nel parallelo condensatore/induttore

Prima di proseguire con quel poco di matematica che serve a caratterizzare la risonanza, ricordiamo qui da dove questo fenomeno ha origine nella tipologia di circuiti di cui ci stiamo occupando con lo scopo di puntualizzare tutti gli aspetti più semplici e immediati da capire. A questo scopo, facciamo riferimento a una situazione ideale, in cui immaginiamo che sia possibile avere un induttore in cui la resistenza interna dovuta all'avvolgimento del filo sia completamente trascurabile. In altre parole, immaginiamo di avere un componente che presenta un'impedenza solo *reattiva*, con un'induttanza di valore  $L$ . Supponiamo che questo componente sia *in serie* a un condensatore  $C$ . L'impedenza complessiva della serie è  $Z_{tot} = 1/(j\omega C) + j\omega L = (1/(j\omega C))(1 - \omega^2 LC)$ : per un certo valore della frequenza (angolare),  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , cioè l'impedenza si annulla.

Se ragionate in termini di rappresentazione dell'impedenza sul piano complesso, la situazione è semplice da descrivere: l'impedenza del condensatore è un vettore disposto lungo l'asse immaginario e orientato verso il basso (verso negativo), quella dell'induttore è un vettore di analoga direzione ma verso opposto. I moduli di questi

vettori, cioè delle impedenze considerate, dipendono dalla frequenza: a una certa frequenza, cioè a risonanza, essi sono uguali e la somma dei due vettori, che è l'impedenza risultante, si annulla.

Vediamo brevemente cosa succede se i due componenti considerati vengono collegati in parallelo. Stavolta l'impedenza totale è  $Z_{tot} = (j\omega C + 1/(j\omega L))^{-1} = (j\omega L)/(1 - \omega^2 LC)$ : in questo caso alla risonanza l'impedenza tende a infinito, cioè non c'è corrente che passa attraverso il parallelo dei due componenti. Se pensate che la corrente che interessa il condensatore e quella che passa per l'induttanza sono sfasate rispetto alla differenza di potenziale applicata al parallelo del valore  $\pm\pi/2$ , potete facilmente capire che l'annullamento della corrente complessiva è dovuto alla sovrapposizione di due correnti sfasate fra loro di  $\pi$ .

Ovviamente se aggiungiamo un elemento resistivo, fosse anche solo la resistenza interna  $r$  dell'induttore, le affermazioni appena fatte si modificano in maniera rilevante. Per esempio è facile rendersi conto che nel circuito serie anche a risonanza c'è un'impedenza non nulla (la  $r$ , che è in serie a tutto il resto) e che nel circuito in parallelo anche a risonanza l'impedenza è finita (la  $r$  che è in serie alla  $L$ , ovvero in parallelo a  $C$ ). Di conseguenza, nel caso reale ci si aspetta che gli effetti della risonanza siano meno eclatanti. Infatti, come ben sapete dallo studio di altre situazioni fisiche, considerare una "dissipazione" (e la resistenza è un componente che "dissipa" per effetto Joule), cioè un attrito, conduce sempre ad attenuare gli effetti della risonanza.

## B. Risposta in frequenza

La funzione di trasferimento  $T(\omega)$  di Eq. 10, che è complessa, fornisce informazioni sia sull'attenuazione che sullo sfasamento del segnale in uscita rispetto a quello in ingresso attraverso rispettivamente il suo modulo, che indichiamo con  $A(\omega)$ , e il rapporto tra parte immaginaria e parte reale, che indichiamo con  $\tan(\Delta\phi)$ .

Razionalizzando la funzione espressa nell'Eq. 10 si ha

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC[(1 - (\omega/\omega_0)^2) - j\omega(R+r)C]}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega(R+r)C)^2}. \quad (11)$$

Lo sfasamento tra  $V_{out}$  e  $V_{in}$  dipende dalla frequenza secondo la:

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{Im(T(\omega))}{Re(T(\omega))} = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{\omega(R+r)C}. \quad (12)$$

Si vede subito un aspetto molto molto significativo: *lo sfasamento si annulla a risonanza* e cambia di segno passando per la risonanza stessa ( $\phi \rightarrow \pm\pi/2$  rispettivamente per  $\omega \rightarrow 0$  o  $\omega \rightarrow \infty$ ). Ciò ha una conseguenza estremamente interessante in termini *sperimentali*: a risonanza, lo sfasamento è nullo. Lo sfasamento può essere osservato facilmente (e con ottima sensibilità) usando diversi strumenti, il più semplice dei quali consiste nel visualizzare

i segnali  $V_{in}$  e  $V_{out}$  all'oscilloscopio in modalità X-Y: sullo schermo appare in genere una ellisse che, a risonanza, degenera in un segmento *inclinato*. Questo consente di individuare rapidamente la frequenza di risonanza di un oscillatore armonico forzato.

Vale la pena di tornare sull'affermazione, fatta in introduzione, che l'aspetto più significativo del fenomeno della risonanza sta nella possibilità di avere un efficace trasferimento di energia dal generatore all'oscillatore. La potenza, cioè la derivata temporale dell'energia (scusate il linguaggio poco corretto, ma ci si capisce), dipende proprio dallo sfasamento tra corrente e tensione, essendo proporzionale al *fattore di potenza*  $\cos(\Delta\phi)$ . Se lo sfasamento si annulla, è massima la potenza che si trasferisce all'oscillatore: essa viene in parte "dissipata" per effetto Joule dalla resistenza, ma in parte viene alternativamente immagazzinata sotto forma di energia elettrostatica e magnetica nel condensatore e nell'induttore.

Veniamo ora alla determinazione di  $A(\omega)$ , cioè troviamo quella che spesso si chiama la *curva di risonanza* del nostro oscillatore. Si ha:

$$A(\omega) = |T(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega(R+r)C)^2 + (1 - (\omega/\omega_0)^2)^2}}. \quad (13)$$

A risonanza un pezzo del denominatore si annulla e si ha  $A(\omega = \omega_0) = R/(R+r) = A_{max}$ . Osservate che, a causa della presenza della resistenza interna dell'induttore,  $r$ , e del fatto che essa comunque "dissipa" potenza, ovvero che si forma un partitore di tensione, questa funzione ha un valore massimo minore di uno, tanto più simile all'unità quanto più  $r$  è trascurabile rispetto a  $R$ .

Dato che spesso è più pratico esprimere la risposta dell'oscillatore in termini della frequenza  $f$  invece che della frequenza angolare  $\omega$  (è sempre  $\omega = 2\pi f$ ), conviene scrivere esplicitamente anche la funzione  $A(f)$ :

$$A(f) = \frac{2\pi f RC}{\sqrt{(2\pi f(R+r)C)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}}, \quad (14)$$

dove  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  è la frequenza propria dell'oscillatore.

## III. CURVA DI RISONANZA E QUALCHE SUA PROPRIETÀ

Scegliamo dei valori verosimili per le grandezze in gioco in modo da poter graficare con Python la  $A(f)$ , ovvero la curva di risonanza dell'oscillatore; prendiamo  $L = 0.5$  H,  $C = 0.1$   $\mu$ F,  $R = 680$  ohm,  $r = 30$  ohm. In queste condizioni si ha  $f_0 = 712$  Hz.

Avendo posto dei valori per le grandezze in gioco, possiamo controllare quantitativamente le approssimazioni utilizzate in precedenza. L'approssimazione di sotto-smorzamento è piuttosto ben verificata, dato che  $\tau = 2L/R' \approx 1$  ms, per cui  $1/\tau^2 \approx 10^6$  s<sup>-2</sup>, mentre  $\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 \approx 2 \times 10^7$  s<sup>-2</sup>. Inoltre possiamo anche notare che sia  $r_C$  che  $r$  sono minori di  $R$  e della impedenza

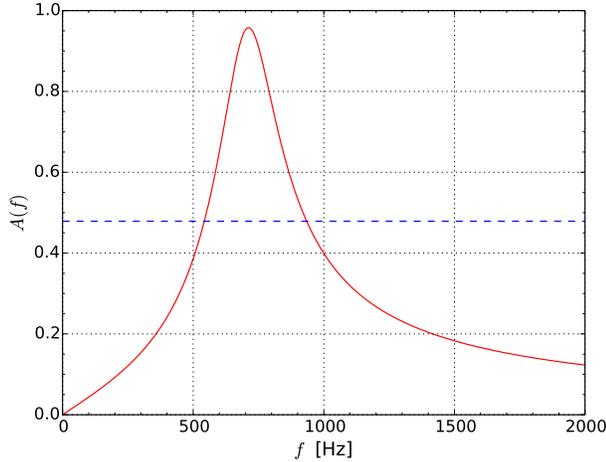


Figura 2. Curva di risonanza calcolata per l'oscillatore descritto nel testo. L'asse verticale riporta il modulo della funzione di trasferimento,  $A(f)$ , quello orizzontale la frequenza,  $f$ . La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore metà del massimo,  $A_{max}/2$ . Grafico realizzato ovviamente con Python.

complessiva del circuito a risonanza (che è ovviamente pari a  $R'$ ), per cui, volendo, avremmo potuto anche utilizzare una funzione di trasferimento costruita considerando solo  $R$ , che sarebbe stato più semplice dal punto di vista della matematica.

La Fig. 2 mostra il risultato del calcolo di  $A(f)$  secondo l'Eq. 14: si osserva una bella campana, centrata su  $f_0$  e decisamente *asimmetrica*. Il picco di questa campana vale  $R/(R+r) = 0.958$ .

Un possibile best-fit per i dati sperimentali, da acquisire in un intervallo di frequenze sufficientemente vasto (guardate la scala orizzontale della figura), può essere condotto usando la funzione Eq. 14. I parametri da lasciare liberi nel fit dovrebbero essere in prima battuta quelli contenenti  $C$ ,  $L$ ,  $r$ , che non possono essere determinati con sufficiente accuratezza da misure. Dunque la funzione di fit potrebbe essere del tipo  $g(x) = c_1 x / (\sqrt{(c_2 x)^2 + (1 - (x/c_3)^2)^2})$ , con  $c_{1-3}$  da determinare. Poiché, però,  $c_1 \approx c_2$ , il numero di parametri liberi del fit potrebbe essere ragionevolmente ridotto a due, in modo da diminuire la covarianza tra di essi e quindi aumentare l'"affidabilità" del best-fit. In alternativa, si potrebbe imporre il valore della frequenza di risonanza  $f_0$  (ovvero il valore del parametro  $c_3$ ), scegliendolo pari alla frequenza di risonanza misurata in modo diretto, osservando lo sfasamento tra  $V_{in}$  e  $V_{out}$ . Tutte queste possibilità possono essere esplorate praticamente e confrontate tra loro attraverso il paragone del  $\chi^2$  ottenuto e della covarianza.

Studiamo con un po' di matematica la campana ottenuta. Per caratterizzarne la larghezza  $\Delta f$  usiamo il cosiddetto valore fwhm (*full width at half maximum*, larghezza a metà altezza). La metà altezza  $A_{max}/2$  è rappresentata

nel grafico dalla linea tratteggiata: possiamo individuare due frequenze, che chiameremo  $f_{\mp}$ , che si trovano rispettivamente "a sinistra" e "a destra" di  $f_0$ , per le quali si ha  $A(f = f_{\mp}) = A_{max}/2$ . Queste frequenze sono dunque quelle a cui il modulo della funzione di trasferimento vale la metà del valore massimo. Dal punto di vista *sperimentale*, tali valori possono essere individuati in maniera piuttosto immediata, variando la frequenza del generatore e osservando all'oscilloscopio quando l'ampiezza di  $V_{out}$  è la metà di quella di  $V_{out,max}$ .

Nel fare le misure sul circuito occorre naturalmente tenere conto del fatto che l'ampiezza di  $V_{in}$  non rimane costante in tutto l'intervallo di frequenza considerato. Infatti, a risonanza la caduta di potenziale attraverso  $r_G$  è non necessariamente trascurabile. Essa può essere determinata considerando che, a risonanza, cioè nelle condizioni che implicano una caduta di potenziale più marcata, l'impedenza complessiva della maglia vale  $R'$ . Applicando la regola dei partitori di tensione alla serie costituita da  $r_G$  e da "tutto il resto", si ha  $|V_{\omega in}| = (R+r)/R' |V_{\omega G}| \simeq 0.93 |V_{\omega G}|$ . Supponendo che il generatore sia regolato in modo da ottenere un'ampiezza di 10 V (a circuito aperto, ovvero lontano dalla risonanza), la caduta di potenziale attraverso  $r_G$  è di circa 0.7 V, tutt'altro che trascurabile.

In ogni caso, individuate in modo opportuno le frequenze  $f_-$  e  $f_+$ , si ha semplicemente  $\Delta f_{fwhm} = f_+ - f_-$ , che rappresenta un'ottima descrizione (convenzionale) della larghezza della campana. Naturalmente se volessimo esprimere la larghezza fwhm in termini di frequenza angolare avremmo  $\Delta \omega_{fwhm} = 2\pi \Delta f_{fwhm}$ . Notiamo che sono in uso comune anche altre definizioni per la larghezza di una campana di risonanza. Per esempio talvolta si impiega la definizione  $\Delta f_{rms}$ , che rappresenta la distanza tra le frequenze in cui  $V_{out}$  è  $1/\sqrt{2}$  volte il valore massimo  $V_{out,max}$ , ovvero la distanza tra le frequenze a cui l'attenuazione  $A(f)$  del circuito è  $-3$  dB (ricordate la definizione di attenuazione in dB). Tenendo conto del fatto che il quadrato della curva di risonanza da noi utilizzata rappresenta in pratica la curva di trasferimento di potenza (la potenza media è proporzionale al quadrato di d.d.p. o corrente), si può capire quale sia la motivazione che è dietro una simile definizione. In ogni caso, si trova con un po' di algebra che  $\Delta f_{rms} \propto \Delta f_{fwhm}$ , dove il fattore di proporzionalità, che potete provare a determinare, è minore di uno.

Torniamo dunque ad esaminare la larghezza  $\Delta f_{fwhm}$  e facciamo due conticini per vedere dove cadono i valori di  $f_{\mp}$ . Si deve risolvere l'equazione algebrica

$$\frac{2\pi f_{\mp} RC}{\sqrt{(2\pi f_{\mp} (R+r)C)^2 + (1 - (f_{\mp}/f_0)^2)^2}} = \frac{1}{2} \frac{R}{R+r}. \quad (15)$$

Facendo il quadrato dei due membri e rimaneggiando si ottiene la seguente equazione:

$$4(2\pi f_{\mp} (R+r)C)^2 = (2\pi f_{\mp} (R+r)C)^2 + (1 - (f_{\mp}/f_0)^2)^2. \quad (16)$$

Poniamo ora  $\alpha = (\sqrt{3})2\pi(R+r)C$  e  $f_{\mp}^2 = x$ . L'espressione precedente può essere riscritta nella forma di un'equazione algebrica di secondo grado per  $x$ :

$$x^2 - x(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4) + f_0^4 = 0. \quad (17)$$

Le soluzioni sono:

$$x_{1,2} = \frac{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4) \pm \sqrt{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)^2 - 4f_0^4}}{2} = (18)$$

$$= \frac{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)}{2} \pm \alpha f_0^3 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 f_0^2}{4}}. \quad (19)$$

Notiamo che, per la nostra scelta dei componenti, si ha  $\alpha = 7.7 \times 10^{-4}$  s, mentre  $f_0 = 712$  Hz. Pertanto la radice quadrata può essere approssimata con l'unità. A questo punto possiamo definire la larghezza (fwhm) della variabile ausiliaria  $x$  come  $\Delta x_{fwhm} = x_1 - x_2 \approx 2\alpha f_0^3$ . Per questa variabile è stata definita, si ha  $\Delta x_{fwhm} = 2f_0 \Delta f_{fwhm}$ . Si trova quindi  $\Delta f_{fwhm} \approx \alpha f_0^2 = (\sqrt{3})2\pi(R+r)Cf_0^2$ . Questa è la prima "proprietà" rilevante della curva di risonanza. Per la curva di risonanza graficata in Fig. 2 si ottiene  $\Delta f_{fwhm} = 390$  Hz.

Poiché, ricordiamo,  $f_0^2 = 1/(2\pi\sqrt{LC})^2$ , si ottiene anche  $\Delta f_{fwhm} \approx (\sqrt{3})((R+r)/L)/(2\pi)$ ; essendo il coefficiente di smorzamento del nostro oscillatore proporzionale al rapporto tra resistenza e induttanza, si verifica quello che già, probabilmente, sapevate dalla meccanica, cioè che *la larghezza della campana di risonanza è proporzionale all'entità dello smorzamento*.

C'è poi un'ulteriore "proprietà" rilevante. Si vede facilmente come si abbia  $x_1 x_2 = f_0^4$ , che conduce a  $f_+ f_- = f_0^2$ . Deve sempre verificarsi che il prodotto tra i valori di frequenza ai quali la curva vale un mezzo del valore massimo sia pari al quadrato della frequenza di risonanza. Tutte e due queste "proprietà" sono facilmente verificabili nell'esperienza pratica.

Infine osservate che l'asimmetria della campana è tanto minore quanto più il termine  $(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)$  che compare in Eq. 18 è trascurabile rispetto a  $\sqrt{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)^2 - 4f_0^4}$ . Si vede abbastanza facilmente che questo si verifica, e quindi la campana tende a essere simmetrica, quando lo smorzamento è piccolo. Per trovare una relazione matematica che tenga in debito conto delle dimensioni, questo significa che *la campana tende a essere simmetrica* per  $\alpha f_0 \ll 1$ .

Da ultimo, la Fig. 3 riporta diverse curve di risonanza e i corrispondenti sfasamenti in funzione della frequenza per alcuni diversi valori dei componenti  $R$  e  $C$ .

#### IV. CIRCUITO "ANTIRISONANTE"

Come potete facilmente capire, i circuiti con resistori, induttori, capacitori sono un ottimo banco di prova per verificare, studiare, analizzare le condizioni di risonanza. A differenza degli analoghi meccanici, qui si può godere

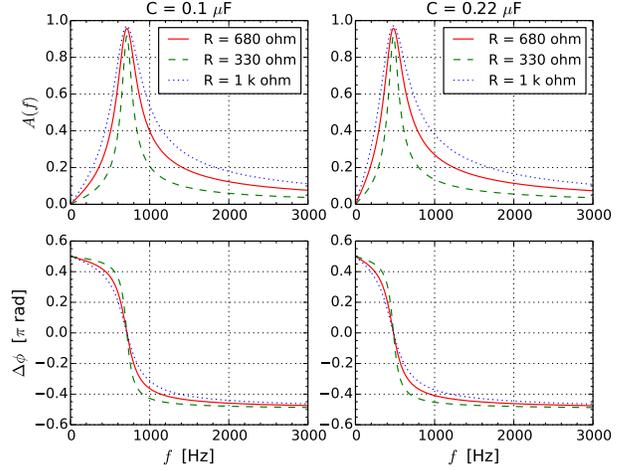


Figura 3. Diverse curve di risonanza e sfasamenti corrispondenti calcolati per diverse scelte di  $R$  e  $C$  (si suppone  $L = 0.5$  H e  $r = 30$  ohm per tutte le curve). Grafici ovviamente realizzati con Python.

di un'ampia libertà nel definire le condizioni di operazione del circuito (sempre a patto che le approssimazioni considerate si mantengano valide).

Un esempio della versatilità ed efficacia dei circuiti di questo tipo è rappresentato dallo schema di Fig. 4, che rappresenta quello che talvolta si chiama *oscillatore antirisonante*. La denominazione intende mettere in luce che, in tale circuito, a risonanza l'ampiezza di  $V_{out}$  diminuisce, cioè ha un picco orientato "verso il basso" laddove prima questo era orientato "verso l'alto".

Esaminiamo brevemente anche questo circuito. La differenza fondamentale rispetto al precedente è che stavolta induttore e capacitore sono in parallelo fra loro. L'impedenza di questo parallelo è

$$Z_{par} = \frac{r + j\omega L}{j\omega r C + (1 - \omega^2 LC)}. \quad (20)$$

Per proseguire con un po' di matematica semplice, occorre imporre che *sia trascurabile la resistenza interna dell'induttore rispetto a  $\omega L$* , cioè  $r \ll \omega L$  (a posteriori vedrete come questa approssimazione valga piuttosto bene). Infatti, come si può facilmente dimostrare, in caso contrario la frequenza di risonanza viene spostata sensibilmente rispetto al valore proprio dell'oscillatore e la matematica diventa ancora più pesante.

Nell'approssimazione fatta, e assumendo per semplicità anche  $r_C$  trascurabile, per cui  $V_{\omega G} = V_{win}$ , si ottiene abbastanza rapidamente la seguente funzione di trasferimento:

$$T(\omega) = \frac{V_{\omega out}}{V_{win}} = \frac{j\omega r C + (1 - (\omega/\omega_0)^2)}{j\omega(L/R + rC) + (1 - (\omega/\omega_0)^2)}, \quad (21)$$

con, come al solito,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . In questo circuito la risonanza implica che l'impedenza del parallelo tenda a un massimo; di conseguenza a risonanza diminuisce

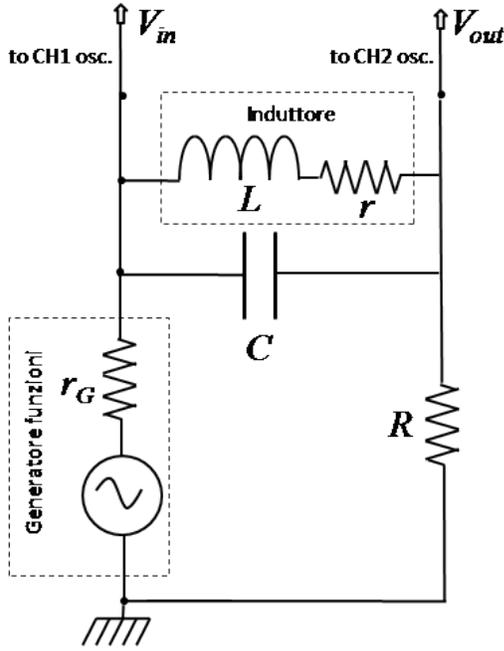


Figura 4. Circuito dell'oscillatore "antirisonante" (parallelo) considerato nel testo.

la corrente che passa nel circuito e quindi  $V_{out}$  ha un minimo.

Infatti il modulo della funzione di trasferimento, scritto anche stavolta in funzione di  $f = \omega/(2\pi)$ , è

$$A(f) = |T(f)| = \sqrt{\frac{(2\pi f r C)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}{(2\pi f (rC + L/R))^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}} \quad (22)$$

Questa funzione è decisamente meno comprensibile di quella espressa in Eq. 14, però ci si rende conto abbastanza facilmente che essa presenta un *minimo* per  $f = f_0$ . La Fig. 5 mostra un grafico della funzione  $A(f)$  per valori dei componenti analoghi a quelli usati in precedenza. Tralascio le verifiche matematiche, ma anche in questo caso si ottiene che a risonanza lo sfasamento passa per zero e cambia di segno. Inoltre anche qui la larghezza della campana dipende dal coefficiente di smorzamento (ma, attenzione, l'espressione di  $\Delta f_{fwhm}$  è diversa rispetto a quella trovata prima e la larghezza della campana è ben maggiore, come si vede anche dal grafico), e valgono "proprietà" simili a quelle trovate prima per l'oscillatore risonante. In particolare si ha ancora  $f_- f_+ = f_0^2$ .

Notate che l'andamento "spigoloso" e il quasi annullamento della funzione per  $f \approx f_0$  sono entrambi conseguenze delle approssimazioni fatte, in particolare  $r \ll \omega L$ , che d'altra parte è utile per semplificare la matematica. Infatti il calcolo del modulo della funzione di trasferimento nel caso senza approssimazioni non è facilmente maneggiabile, ovvero l'espressione di  $A(f)$  senza approssimazioni è molto complicata. In situazioni di questo tipo è nettamente più conveniente lavorare con software in grado di gestire numericamente valori complessi: Py-

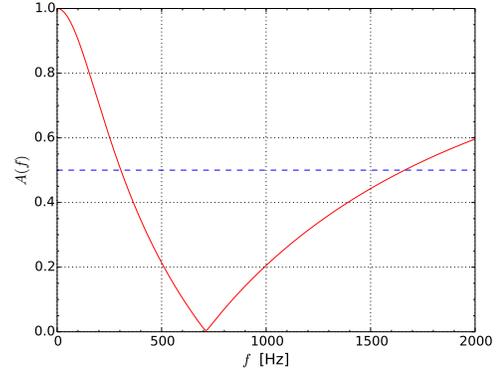


Figura 5. Curva di "antirisonanza" calcolata per l'oscillatore (parallelo) descritto nel testo. L'asse verticale riporta il modulo della funzione di trasferimento,  $A(f)$ , quello orizzontale la frequenza,  $f$ . La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore metà del massimo,  $A_{max}/2$ . Grafico realizzato ovviamente con Python.

thon è in grado di farlo e, probabilmente, vedremo cosa se ne può ricavare in futuro. In ogni caso, la spigolosità e il valore minimo prossimo a zero della  $A(f)$  espressa in Eq. 22 vengono rimossi se le approssimazioni vengono evitate.

## V. FATTORE DI MERITO (Q-FACTOR)

Visto il lavoro che abbiamo svolto sull'oscillatore risonante (lasciamo perdere l'"antirisonante", perché troppo complicato dal punto di vista matematico), vale sicuramente la pena di soffermarsi su un'ulteriore importante caratteristica della curva di risonanza. Infatti la sua larghezza può essere caratterizzata da una quantità specifica, che si chiama *fattore di merito*, ovvero *fattore di qualità*, o, ancora, *Q-factor*, e che indicheremo proprio come  $Qf$ .

Come mostreremo qui nel seguito,  $Qf$  è proporzionale al rapporto  $f_0/\Delta f_{fwhm}$ . Quindi tale quantità serve per esprimere quanto è stretta la curva di risonanza: un Q-factor grande indica in particolare una curva molto piccata attorno a  $f_0$ .

Una buona definizione di fattore di merito è la seguente:

$$Qf = \frac{E_{\text{stored}}}{E_{\text{lostpercycle}}}, \quad (23)$$

dove  $E_{\text{stored}}$  è l'energia immagazzinata a un certo istante nell'oscillatore e  $E_{\text{lostpercycle}}$  è quella che viene persa in un ciclo di oscillazione, cioè in un periodo. Se ricordate l'esperienza sull'oscillatore smorzato RLC, in quella esperienza era evidente che l'energia immagazzinata inizialmente nell'oscillatore (l'energia elettrostatica del condensatore che veniva inizialmente caricato e l'energia magnetica dell'induttore) si perdeva ("dissipava" per effetto

Joule) dopo un certo numero di cicli. Infatti l'oscillazione si smorzava. In quell'esperienza la resistenza era più piccola di quella usata qui (nella seconda parte dell'esperienza si poneva  $R = 47$  ohm), per cui l'effetto della dissipazione era minore e il numero di cicli di oscillazione che si osservavano era dell'ordine di alcune decine.

In un oscillatore forzato gli effetti dello smorzamento, come abbiamo già osservato, determinano la larghezza della curva di risonanza. Infatti la presenza della forzante impedisce di vedere direttamente lo smorzamento delle oscillazioni. Il fattore di merito mette in evidenza questo aspetto, la cui conoscenza è molto rilevante in tante situazioni fisiche. Per esempio, quando si usano *cavità risonanti*, in laser o in altri dispositivi/esperimenti di ottica quantistica, il fattore di merito stabilisce le condizioni di funzionamento e definisce in modo netto le caratteristiche dell'esperimento.

Vediamo di trovare un'espressione di  $Qf$  per il nostro oscillatore armonico. Per semplicità, eviterò di utilizzare la notazione simbolica (fasori), garantendovi comunque che il risultato non dipende dalla semplificazione che farò. Nel nostro oscillatore armonico l'energia viene continuamente "rimbalzata" tra energia di origine elettrostatica (nel condensatore) e di origine magnetica (nell'induttore). Questo è del tutto analogo all'oscillatore meccanico, dove l'energia viene continuamente "rimbalzata" tra potenziale (della molla) e cinetica. Ci sarà un istante in cui il condensatore è scarico. In questo istante l'energia immagazzinata è  $E_{\text{stored}} = LI_{\text{max}}^2/2$ , dove  $I_{\text{max}}$  è il valore massimo della corrente che fluisce nel circuito (a un dato istante). L'energia persa può essere espressa a partire dalla potenza "dissipata" per effetto Joule:

$P_{\text{Joule}} = RI_{\text{max}}^2/2$ , dove il fattore 2 a dividere tiene conto dell'operazione di media temporale su una grandezza periodica e abbiamo usato la nozione che la dissipazione avviene attraverso le resistenze. Evidentemente è allora  $E_{\text{lostpercycle}} = P_{\text{Joule}}T = P_{\text{Joule}}/f_0$ , dove abbiamo usato che il periodo di oscillazione  $T$  è pari al reciproco della frequenza di risonanza  $f_0$ .

Si ha quindi

$$Qf = \frac{LI_{\text{max}}^2/2}{RI_{\text{max}}^2/2} f_0 = \frac{L}{R} f_0 . \quad (24)$$

È facile notare allora che vale la relazione  $Qf \propto f_0/\Delta f_{\text{whm}}$ ; il fattore di proporzionalità, che vale  $2\pi/\sqrt{3}$ , è legato alla definizione di larghezza a metà altezza. In particolare, la nostra definizione prevedeva di usare l'intervallo tra le frequenze a cui l'ampiezza si riduceva di un fattore 2, mentre la definizione che vige per  $Qf$  richiede di individuare le frequenze a cui l'ampiezza si riduce di un fattore  $\sqrt{2}$ , cioè quelle in cui il quadrato dell'ampiezza (che esprime la potenza trasferita dal generatore all'oscillatore) vale 1/2 del valore massimo a risonanza. Inoltre il  $2\pi$  esce come conseguenza del fatto che abbiamo ragionato in termini di  $f$  invece che di  $\omega$ .

Facendo due canticini, per l'oscillatore costruito con i componenti citati prima si ha  $Qf \approx 7$ , che non è proprio un granché se confrontato con i valori tipici per oscillatori "al quarzo" (fino a parecchie migliaia), per non dire delle cavità risonanti in uso in alcuni esperimenti di ottica quantistica. Questo vuole anche dire che, se a un dato istante la forzante venisse improvvisamente spenta, vedremmo solo poche oscillazioni prima che l'energia si "perda" completamente per effetto Joule.