

# Risonanze

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 7 - FF, 14 aprile 2016)

Questa breve nota tratta alcuni aspetti (soprattutto di calcolo) relativi alle esercitazioni sull'oscillatore RLC forzato e smorzato. Inoltre, vista l'importanza dell'argomento toccato dalle esercitazioni, in questa nota si fanno alcuni collegamenti con altre situazioni fisiche di interesse generale, uniti a qualche considerazione di carattere altrettanto generale sul fenomeno della risonanza.

## I. INTRODUZIONE

Il fenomeno della risonanza è probabilmente tra quelli che hanno la più ampia applicazione in fisica e anche in tante altre discipline (ehm, si direbbe nel linguaggio comune che la risonanza ha la più ampia risonanza...). Inutile fare un elenco delle situazioni in cui la risonanza occupa un posto di rilievo ed è anche inutile ricordare gli effetti eclatanti della risonanza (per esempio, i ponti che crollano che campeggiano nei libri delle scuole medie). L'aspetto più importante del fenomeno è che, in risonanza, si stabilisce un efficace trasferimento di potenza da una sorgente (la forzante) a un sistema (qui modellato come un oscillatore armonico smorzato).

L'esempio più semplice nell'ambito della meccanica è quello di una molla con costante elastica  $k$  a un cui estremo è vincolata una massa  $m$  (l'altro estremo è fisso). Se si suppone che il moto della massa sia soggetto a una forza di attrito viscoso  $F_A = -\beta v$  (il sistema è unidimensionale, e quindi non c'è bisogno di usare vettori), si fa in modo che non agiscano altre forze, e si prende l'origine dell'asse lungo cui avviene il moto (asse  $X$ ) in corrispondenza della posizione di equilibrio, cioè della lunghezza di riposo della molla, l'equazione del moto si scrive

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

dove  $\gamma = \beta/m$  è il coefficiente di smorzamento (a parte eventuali fattori) e  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  è la *frequenza (angolare) propria* dell'oscillatore. Questa equazione è quella di un oscillatore armonico smorzato, e, come abbiamo già avuto modo di discutere, la sua soluzione nel caso sottosmorzato è ben nota. Essa prevede che la massa oscilla con frequenza angolare  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 4\gamma^2}$  e che l'ampiezza delle oscillazioni si riduca esponenzialmente nel tempo secondo la funzione  $\exp(-2\gamma t)$ .

Supponiamo ora che ci sia una forzante, cioè che sulla massa agisca una forza  $F_{ext}(t)$ , e immaginiamo che tale forza (naturalmente di direzione concorde con quella del moto, cioè diretta lungo  $X$ ) dipenda dal tempo in modo armonico, cioè sia  $F_{ext}(t) = F_0 \cos(\omega t)$  (notate che per semplicità si è scelta l'origine dei tempi in modo tale che all'istante  $t = t_0 = 0$  la forza abbia intensità massima). Al secondo membro dell'Eq. 2 va allora aggiunto un termine oscillante, del tipo  $K \cos(\omega t)$ , con  $K = F_0/m$ . Si ottiene in questo modo l'equazione di un oscillatore

forzato e smorzato:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = K \cos(\omega t). \quad (2)$$

A *regime*, cioè dopo aver aspettato un tempo sufficiente perché gli effetti della forzante prevalgano, ovvero un tempo maggiore rispetto al tempo di smorzamento  $\tau = 1/(2\gamma)$ , l'equazione ha una soluzione che oscilla a frequenza  $\omega$ :  $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ .

La determinazione di  $A$  e  $\phi$  e della loro dipendenza da  $\omega$  si può, almeno in linea di principio, ottenere derivando rispetto al tempo la  $x(t)$ , sostituendo e imponendo che valga l'uguaglianza sancita dall'equazione differenziale Eq. 2. Come sapete, questa operazione può diventare un po' laboriosa e conviene in genere servirsi di qualche truccetto basato su assunzioni ragionevoli. Il modo più elegante e adatto per analizzare il comportamento di un oscillatore *RLC* è sicuramente il metodo simbolico ("fasori"), che qui impiegheremo.

## II. EQUAZIONE DEL CIRCUITO NEL DOMINIO DEL TEMPO E DELLA FREQUENZA

Per fare riferimento specifico a quanto svolto nell'esperienza pratica, il circuito che si comporta da oscillatore smorzato e forzato, mostrato in Fig. 1, comprende due resistori che tengono conto della resistenza interna dell'induttore,  $r$ , e di una resistenza esterna,  $R$ . Inoltre lo schema mostra anche la presenza di un ulteriore elemento resistivo, la resistenza interna del generatore  $r_G$  (non si mostra invece la resistenza interna dello strumento di misura, l'oscilloscopio, che riteniamo produca effetti trascurabili). Sono anche indicati i segnali (differenze di potenziale) misurate nell'esperienza,  $V_{in}$  e  $V_{out}$ .

Detta  $V_{0G} \cos(\omega t) = V_G(t)$  la differenza di potenziale applicata alla maglia, l'equazione del circuito nel dominio del tempo è:

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{R'}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{V_{0G}}{L} \cos(\omega t), \quad (3)$$

con  $R' = r + R + r_G$ . Si vede subito come essa sia formalmente identica all'Eq. 2, e si intuisce anche come il coefficiente di smorzamento dipenda da  $R'/L$  e la frequenza (angolare) propria sia  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . La frequenza angolare dell'oscillatore è  $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ , con

$\tau = 2L/R'$ . Nell'approssimazione di oscillatore sotto-smorzato, che supporremo valida per i nostri scopi, si può porre  $\omega' \simeq \omega_0$ .

Dunque l'andamento temporale della carica sull'armatura del condensatore,  $Q(t)$ , seguirà lo stesso andamento della posizione della massa  $x(t)$ , mentre l'intensità di corrente, che della carica è la derivata temporale (segna a parte), andrà come la velocità della massa,  $v(t)$ .

Se ci restringiamo a considerare la soluzione a regime, allora possiamo fare ottimo uso del metodo simbolico, che consiste, in sostanza, nell'indicare come grandezze complesse (oscillanti) tensioni e correnti. L'equazione del circuito in questo contesto si scrive

$$V_{\omega G} = Z_{tot} I_{\omega} \quad (4)$$

dove  $V_{\omega G}$  e  $I_{\omega}$  sono i fasori che rappresentano rispettivamente il segnale prodotto dal generatore e la corrente che circola nella maglia e

$$Z_{tot} = R' + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = \frac{j\omega R'C + 1 - \omega^2 LC}{j\omega C} \quad (5)$$

è l'impedenza totale del circuito, dato dalla serie dei componenti che costituiscono la maglia.

In sostanza, quindi

$$V_{\omega G} = \frac{j\omega R'C + 1 - \omega^2 LC}{j\omega C} I_{\omega}. \quad (6)$$

Il segnale indicato con  $V_{out}$  in figura è (supponendo l'impedenza interna dell'oscilloscopio molto più grande delle altre impedenze in gioco, come in genere si verifica) la caduta di tensione ai capi della resistenza  $R$ . Dunque, tornando alla notazione simbolica e facendo un po' di pulizia, si ha

$$V_{\omega out} = \frac{j\omega RC}{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{\omega G}, \quad (7)$$

con  $\omega_0^2 = 1/LC$ . Possiamo quindi determinare una *funzione di trasferimento* complessa  $T_G(\omega)$  tale che  $V_{\omega out} = T_G(\omega)V_{\omega G}$ :

$$T_G(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (8)$$

Si vede subito che, per  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , un pezzo del denominatore si annulla, cosa che, almeno intuitivamente, ha a che fare con la risonanza.

Nella pratica, generalmente si preferisce definire la funzione di trasferimento come quella che lega i segnali osservati sperimentalmente, cioè  $V_{out}$  e  $V_{in}$ ; quest'ultimo segnale differisce da  $V_G$  per la caduta di potenziale sulla resistenza interna del generatore  $r_G$ , cioè si ha, per i fasori corrispondenti:

$$V_{\omega in} = V_{\omega G} - r_G I_{\omega} = V_{\omega G} \left( 1 - r_G \frac{j\omega C}{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} \right), \quad (9)$$

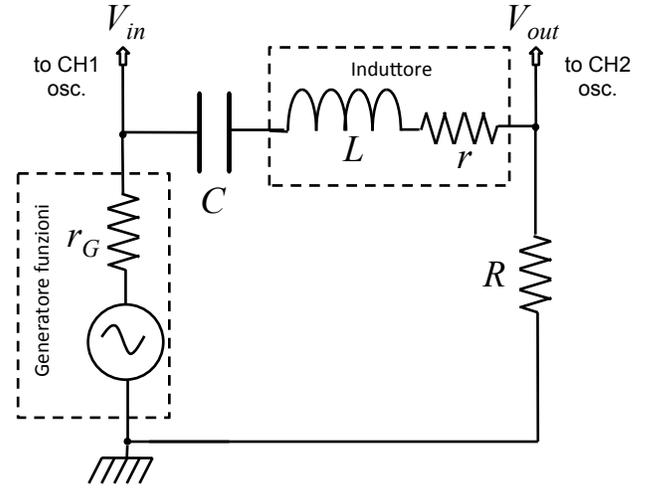


Figura 1. Circuito dell'oscillatore risonante (serie) considerato nel testo.

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'espressione di  $I_{\omega}$  trovata prima.

Invertendo l'equazione e usando un minimo di algebra si trova

$$V_{\omega G} = \frac{j\omega R'C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{\omega in}, \quad (10)$$

che, sostituita nell'Eq. 7, conduce a

$$V_{\omega out} = \frac{j\omega RC}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2} V_{\omega in}. \quad (11)$$

La funzione di trasferimento complessa  $T(\omega)$  tale che  $V_{\omega out} = T(\omega)V_{\omega in}$  è allora

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega(R+r)C + 1 - (\omega/\omega_0)^2}. \quad (12)$$

È evidente che essa approssima e viene approssimata da quella espressa in Eq. 8 se  $R' \sim (R+r)$ , cioè, come atteso, se la resistenza interna del generatore è trascurabile, ovvero  $r_G \ll (R+r)$ .

### A. Risonanza nella serie e nel parallelo condensatore/induttore

Prima di proseguire con quel poco di matematica che serve a caratterizzare la risonanza, ricordiamo qui da dove questo fenomeno ha origine nella tipologia di circuiti di cui ci stiamo occupando, con lo scopo principale di puntualizzare tutti gli aspetti più semplici e immediati da capire. A questo scopo, facciamo riferimento a una situazione ideale, in cui immaginiamo che sia possibile avere un induttore in cui la resistenza interna dovuta all'avvolgimento del filo sia completamente trascurabile. In altre parole, immaginiamo di avere un componente che

presenta un'impedenza solo *reattiva*, con un'induttanza di valore  $L$ . Supponiamo che questo componente sia *in serie* a un condensatore  $C$ . L'impedenza complessiva della serie è  $Z_{tot} = 1/(j\omega C) + j\omega L = (1/(j\omega C))(1 - \omega^2 LC)$ : per un certo valore della frequenza (angolare), cioè per  $\omega = 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ , l'impedenza totale  $Z_{tot}$  si annulla.

Se ragionate in termini di rappresentazione dell'impedenza sul piano complesso, la situazione è semplice da descrivere: l'impedenza del condensatore è un vettore disposto lungo l'asse immaginario e orientato verso il basso (verso negativo), quella dell'induttore è un vettore di analoga direzione ma verso opposto. I moduli di questi vettori, cioè delle impedenze considerate, dipendono dalla frequenza: a una certa frequenza, cioè a risonanza, essi sono uguali e la somma dei due vettori, che è l'impedenza risultante, si annulla.

Vediamo brevemente cosa succede se i due componenti considerati vengono collegati in parallelo. Stavolta l'impedenza totale è  $Z_{tot} = (j\omega C + 1/(j\omega L))^{-1} = (j\omega L)/(1 - \omega^2 LC)$ : in questo caso alla risonanza l'impedenza tende a infinito, cioè non c'è corrente che passa attraverso il parallelo dei due componenti. Se pensate che la corrente che interessa il condensatore e quella che passa per l'induttanza sono sfasate rispetto alla differenza di potenziale applicata al parallelo del valore  $\pm\pi/2$ , potete facilmente capire che l'annullamento della corrente complessiva è dovuto alla sovrapposizione di due correnti sfasate fra loro di  $\pi$ .

Ovviamente se aggiungiamo un elemento resistivo, fosse anche solo la resistenza interna  $r$  dell'induttore, le affermazioni appena fatte si modificano in maniera rilevante. Per esempio è facile rendersi conto che nel circuito serie anche a risonanza c'è un'impedenza non nulla (la  $r$ , che è in serie a tutto il resto) e che nel circuito in parallelo anche a risonanza l'impedenza è finita (la  $r$  che è in serie alla  $L$ , ovvero in parallelo a  $C$ ). Di conseguenza, nel caso reale ci si aspetta che gli effetti della risonanza siano meno eclatanti. Infatti, come ben sapete dallo studio di altre situazioni fisiche, considerare una "dissipazione" (e la resistenza è un componente che "dissipa" per effetto Joule), cioè un attrito, conduce sempre ad attenuare gli effetti della risonanza.

## B. Risposta in frequenza

La funzione di trasferimento  $T(\omega)$  di Eq. 12, che è complessa, fornisce informazioni sia sull'attenuazione, o guadagno, del circuito, che sullo sfasamento del segnale in uscita rispetto a quello in ingresso attraverso rispettivamente il suo modulo, che indichiamo con  $A(\omega)$ , e il rapporto tra parte immaginaria e parte reale, che indichiamo con  $\tan(\Delta\phi)$ .

Razionalizzando la funzione espressa nell'Eq. 12 si ha

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC[(1 - (\omega/\omega_0)^2) - j\omega(R+r)C]}{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + (\omega(R+r)C)^2}. \quad (13)$$

Lo sfasamento tra  $V_{out}$  e  $V_{in}$  dipende dalla frequenza secondo la:

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{\text{Im}\{T(\omega)\}}{\text{Re}\{T(\omega)\}} = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{\omega(R+r)C}. \quad (14)$$

Si vede subito un aspetto molto molto significativo: *lo sfasamento si annulla a risonanza* e cambia di segno passando per la risonanza stessa ( $\phi \rightarrow \pm\pi/2$  rispettivamente per  $\omega \rightarrow 0$  o  $\omega \rightarrow \infty$ ). Ciò ha una conseguenza estremamente interessante in termini *sperimentali*: a risonanza, lo sfasamento è nullo. Lo sfasamento può essere osservato facilmente (e con ottima sensibilità) usando diversi strumenti, il più semplice dei quali consiste nel visualizzare i segnali  $V_{in}$  e  $V_{out}$  all'oscilloscopio in modalità X-Y: sullo schermo appare in genere una ellisse che, a risonanza, degenera in un segmento *inclinato*. Questo consente di individuare rapidamente la frequenza di risonanza di un oscillatore armonico forzato.

Veniamo ora alla determinazione di  $A(\omega)$ , cioè troviamo quella che spesso si chiama la *curva di risonanza*, o lo *spettro di risonanza*, o, ancora, la *forma di riga* del nostro oscillatore. Si ha:

$$A(\omega) = |T(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega(R+r)C)^2 + (1 - (\omega/\omega_0)^2)^2}}. \quad (15)$$

A risonanza un pezzo del denominatore si annulla e si ha  $A(\omega = \omega_0) = R/(R+r) = A_{max}$ . Osservate che, a causa della presenza della resistenza interna dell'induttore,  $r$ , e del fatto che essa comunque "dissipa" potenza, ovvero che si forma un partitore di tensione, questa funzione ha un valore massimo minore di uno, tanto più simile all'unità quanto più  $r$  è trascurabile rispetto a  $R$ .

Dato che spesso è più pratico esprimere la risposta dell'oscillatore in termini della frequenza  $f$  invece che della frequenza angolare  $\omega$  (è sempre  $\omega = 2\pi f$ ), conviene scrivere esplicitamente anche la funzione  $A(f)$ :

$$A(f) = \frac{2\pi f RC}{\sqrt{(2\pi f(R+r)C)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}}, \quad (16)$$

dove  $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  è la frequenza propria dell'oscillatore.

## III. CURVA DI RISONANZA E QUALCHE SUA PROPRIETÀ

Scegliamo dei valori verosimili per le grandezze in gioco in modo da poter graficare con Python la  $A(f)$ , ovvero la curva di risonanza, o spettro, dell'oscillatore; prendiamo  $L = 0.5$  H,  $C = 0.1$   $\mu$ F,  $R = 330$  ohm,  $r = 40$  ohm. In queste condizioni si ha  $f_0 = 712$  Hz. Naturalmente, volendo fare una sorta di simulazione del comportamento del circuito, ci disinteressiamo qui delle incertezze, o tolleranze, sui vari valori impiegati, che quindi vanno intesi come nominali.

Avendo posto dei valori numerici per le grandezze in gioco, possiamo controllare quantitativamente le approssimazioni utilizzate in precedenza. L'approssimazione di sotto-smorzamento è piuttosto ben verificata, dato che  $\tau = 2L/R' = 2L/(R + r + r_G) \approx 2$  ms, per cui  $1/\tau^2 \approx 2 \times 10^5$  s<sup>-2</sup>, mentre  $\omega_0^2 = (2\pi f_0)^2 \approx 2 \times 10^7$  (rad/s)<sup>2</sup>. Inoltre possiamo anche notare che sia  $r_G$  che  $r$  sono minori di  $R$  e della impedenza complessiva del circuito a risonanza (che è ovviamente pari a  $R'$ ).

La Fig. 2 mostra il risultato del calcolo di  $A(f)$  secondo l'Eq. 16: si osserva una bella campana, centrata su  $f_0$  e di forma *asimmetrica*. Il picco di questa campana, che è ovviamente centrata su  $f = f_0$ , vale, per la scelta di valori di questo esempio,  $R/(R + r) = 0.892$ . Il pannello superiore della figura riporta invece lo sfasamento  $\Delta\phi$  ottenuto dall'Eq. 14 (calcolando l'arctan di quella espressione): come atteso, lo sfasamento passa per zero cambiando di segno a risonanza, cioè per  $f = f_0$ , tende a  $\pi/2$  per  $f \rightarrow 0$  e a  $-\pi/2$  per  $f \rightarrow \infty$ .

Se, per i dati acquisiti con l'oscillatore armonico smorzato, avete provato a calcolare numericamente, tramite FFT la trasformata di Fourier del segnale  $V_C(t)$  risolto nel tempo, potete facilmente verificare che la curva di risonanza qui ottenuta è parente molto stretta di quella trasformata di Fourier.

Un possibile best-fit per i dati sperimentali di  $A(f)$ , da acquisire in un intervallo di frequenze sufficientemente vasto (tanto più ampio quanto maggiore è il valore di  $R$  che avete scelto), può essere condotto usando la funzione di Eq. 16. I parametri da lasciare liberi nel fit dovrebbero essere, in prima battuta, quelli contenenti  $C$ ,  $L$ ,  $r$ , che non possono essere determinati con sufficiente accuratezza da misure indipendenti. Dunque la funzione di fit potrebbe essere del tipo  $g(x) = c_1 x / (\sqrt{(c_2 x)^2 + (1 - (x/c_3)^2)^2})$ , con  $c_{1-3}$  da determinare. Poiché, però,  $c_1 \approx c_2$  (infatti  $c_2 = c_1 + 2\pi r C$ , con  $rC < c_1 = 2\pi RC$ ), specie nel caso in cui sia stata scelta una resistenza  $R$  sufficientemente grande, il numero di parametri liberi del fit potrebbe essere ragionevolmente ridotto a due, in modo da diminuire la covarianza tra di essi e quindi aumentare l'"affidabilità" del best-fit. In alternativa, si potrebbe imporre il valore della frequenza di risonanza  $f_0$  (ovvero il valore del parametro  $c_3$ ), scegliendolo pari alla frequenza di risonanza misurata in modo diretto, per esempio dalla osservazione dello sfasamento tra  $V_{in}$  e  $V_{out}$ . Tutte queste possibilità possono essere esplorate praticamente e confrontate tra loro attraverso il paragone del  $\chi^2$  ottenuto (e della covarianza), in modo da stabilire empiricamente quale funzione modello è più adatta per descrivere le osservazioni sperimentali.

Studiamo con un po' di matematica la campana ottenuta. Per caratterizzarne la larghezza  $\Delta f$  usiamo il cosiddetto valore fwhm (*full width at half maximum*, larghezza a metà altezza). La metà altezza  $A_{max}/2$  è rappresentata nel grafico dalla linea tratteggiata: possiamo individuare due frequenze, che chiameremo  $f_{\mp}$ , che si trovano rispettivamente "a sinistra" e "a destra" di  $f_0$ , per le quali si ha  $A(f = f_{\mp}) = A_{max}/2$ . Queste frequenze sono dun-

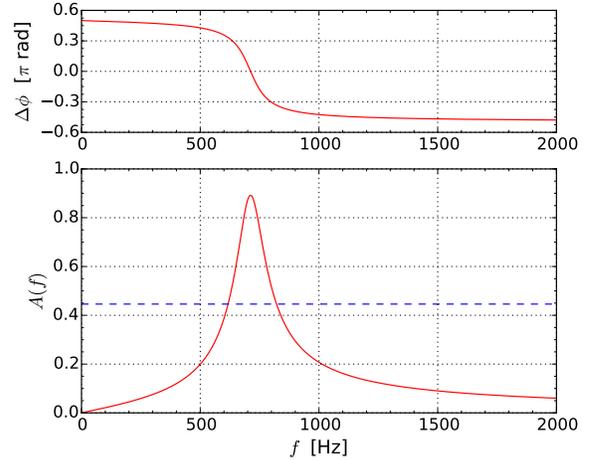


Figura 2. Curva di risonanza calcolata per l'oscillatore descritto nel testo. L'asse verticale riporta il modulo della funzione di trasferimento,  $A(f)$ , quello orizzontale la frequenza,  $f$ . La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore metà del massimo,  $A_{max}/2$ . Il pannello superiore mostra lo sfasamento  $\Delta\phi$  calcolato per lo stesso oscillatore.

que quelle a cui il modulo della funzione di trasferimento vale la metà del valore massimo. Dal punto di vista *sperimentale*, tali valori possono essere individuati in maniera piuttosto immediata variando la frequenza del generatore e osservando all'oscilloscopio quando l'ampiezza di  $V_{out}$  è la metà di quella di  $V_{out,max}$ .

Nel fare le misure sul circuito occorre naturalmente tenere conto del fatto che l'ampiezza di  $V_{in}$  non rimane costante in tutto l'intervallo di frequenza considerato. Infatti, a risonanza la caduta di potenziale attraverso  $r_G$  è non necessariamente trascurabile. Essa può essere determinata considerando che, a risonanza, cioè nelle condizioni che implicano una caduta di potenziale più marcata, l'impedenza complessiva della maglia vale  $R'$ . Applicando la regola dei partitori di tensione alla serie costituita da  $r_G$  e da "tutto il resto", si ha, per i valori considerati in questo esempio,  $|V_{win}| = ((R + r)/R')|V_{\omega G}| \simeq 0.88|V_{\omega G}|$ . Dunque il generatore di forme d'onda si comporta, in questo caso, in modo non molto ideale. Infine, sono noti i problemi di termalizzazione che affliggono gli strumenti disponibili in laboratorio, che rendono instabile (generalmente decrescente) l'ampiezza del segnale in uscita con il passare del tempo, almeno per il primo periodo di funzionamento a freddo. Di conseguenza  $V_{in}$  deve essere continuamente monitorata.

In ogni caso, individuate in modo opportuno le frequenze  $f_-$  e  $f_+$ , si ha semplicemente  $\Delta f_{fwhm} = f_+ - f_-$ , che rappresenta un'ottima descrizione (convenzionale) della larghezza della campana. Naturalmente se volessimo esprimere la larghezza fwhm in termini di frequenza angolare avremmo  $\Delta\omega_{fwhm} = 2\pi\Delta f_{fwhm}$ . Notiamo che sono in uso comune anche altre definizioni per la larghezza di una campana di risonanza. Per esempio spesso

si impiega la definizione  $\Delta f_{-3dB}$ , che rappresenta la distanza tra le frequenze in cui  $V_{out}$  è  $1/\sqrt{2}$  volte il valore massimo  $V_{out,max}$ , ovvero la distanza tra le frequenze a cui l'attenuazione, o guadagno,  $A(f)$  del circuito è  $-3$  dB (ricordate la definizione di attenuazione in dB). Il motivo di questa possibile scelta vi sarà chiaro nel seguito; per il momento limitiamoci a notare che, con un po' di algebra si trova facilmente  $\Delta f_{-3dB} \propto \Delta f_{fwhm}$ , dove il fattore di proporzionalità, che potete provare a determinare sulla falsariga di quanto verrà esposto tra breve, vale  $1/\sqrt{3}$ .

Torniamo dunque ad esaminare la larghezza  $\Delta f_{fwhm}$  e facciamo due canticini per vedere dove cadono i valori di  $f_{\mp}$ . Si deve risolvere l'equazione algebrica

$$\frac{2\pi f_{\mp} RC}{\sqrt{(2\pi f_{\mp}(R+r)C)^2 + (1 - (f_{\mp}/f_0)^2)^2}} = \frac{1}{2} \frac{R}{R+r}. \quad (17)$$

Facendo il quadrato dei due membri e rimaneggiando si ottiene la seguente equazione:

$$4(2\pi f_{\mp}(R+r)C)^2 = (2\pi f_{\mp}(R+r)C)^2 + (1 - (f_{\mp}/f_0)^2)^2. \quad (18)$$

Poniamo ora  $\alpha = (\sqrt{3})2\pi(R+r)C$  e  $f_{\mp}^2 = x$ . L'espressione precedente può essere riscritta nella forma di un'equazione algebrica di secondo grado per  $x$ :

$$x^2 - x(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4) + f_0^4 = 0. \quad (19)$$

Le soluzioni sono:

$$x_{1,2} = \frac{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4) \pm \sqrt{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)^2 - 4f_0^4}}{2} = \frac{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)}{2} \pm \alpha f_0^3 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 f_0^2}{4}}. \quad (21)$$

Notiamo che, per la nostra scelta dei componenti, si ha  $\alpha \simeq 5 \times 10^{-4}$  s, mentre  $f_0 = 712$  Hz. Pertanto la radice quadrata può essere approssimata con l'unità. A questo punto possiamo definire la larghezza (fwhm) della variabile ausiliaria  $x$  come  $\Delta x_{fwhm} = x_1 - x_2 \approx 2\alpha f_0^3$ . Per come questa variabile è stata definita, si ha  $\Delta x_{fwhm} \approx 2f_0 \Delta f_{fwhm}$ . Si trova quindi

$$\Delta f_{fwhm} \approx \alpha f_0^2 = 2\pi\sqrt{3}(R+r)Cf_0^2. \quad (22)$$

Questa è la prima "proprietà" rilevante della curva di risonanza. Per la curva di risonanza graficata in Fig. 2 si ottiene  $\Delta f_{fwhm} = 204$  Hz. Naturalmente questa è anche la larghezza che esce da un'analisi del grafico di Fig. 2, in particolare dalla valutazione della distanza fra le intercette della curva di risonanza con la linea tratteggiata  $A_{max}/2$ .

Poiché, ricordiamo,  $f_0^2 = 1/(2\pi\sqrt{LC})^2$ , si ottiene anche

$$\Delta f_{fwhm} \approx \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{R+r}{L}; \quad (23)$$

essendo il coefficiente di smorzamento del nostro oscillatore proporzionale al rapporto tra resistenza e indut-

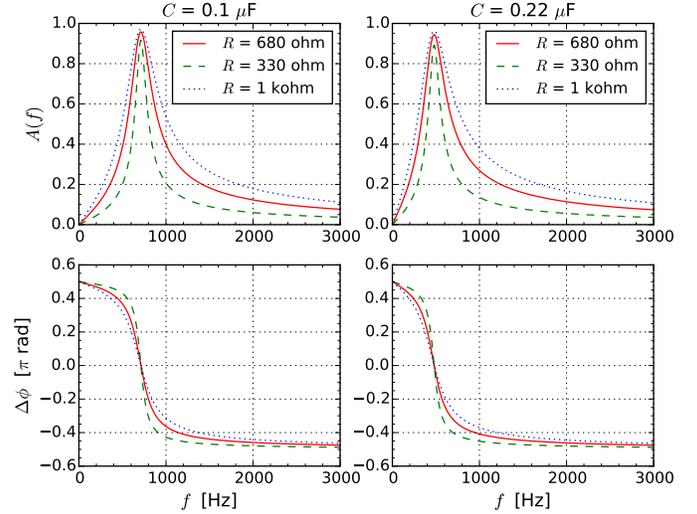


Figura 3. Diverse curve di risonanza e sfasamenti corrispondenti calcolati per diverse scelte di  $R$  e  $C$  (si suppone  $L = 0.5$  H e  $r = 40$  ohm per tutte le curve).

tanza, si verifica quello che già, probabilmente, sapeva dalla meccanica, cioè che *la larghezza della campana di risonanza è proporzionale all'entità dello smorzamento*. In particolare, essa è *inversamente proporzionale* (le dimensioni devono tornare) al tempo di smorzamento  $\tau = 2L/R' \simeq 2L/(R+r)$  (supponendo  $r_C$  trascurabile rispetto a  $R+r$ ).

C'è poi un'ulteriore "proprietà" rilevante. Si vede facilmente come si abbia  $x_1 x_2 = f_0^4$ , che conduce a

$$f_+ f_- = f_0^2. \quad (24)$$

Deve sempre verificarsi che il prodotto tra i valori di frequenza ai quali la curva vale un mezzo del valore massimo sia pari al quadrato della frequenza di risonanza. Tutte e due queste "proprietà" sono facilmente verificabili, entro le incertezze sperimentali, nell'esperienza pratica.

Infine osservate che l'asimmetria della campana è tanto minore quanto più il termine  $(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)$  che compare in Eq. 20 è trascurabile rispetto a  $\sqrt{(2f_0^2 + \alpha^2 f_0^4)^2 - 4f_0^4}$ . Si vede abbastanza facilmente che questo si verifica, e quindi la campana tende a essere simmetrica, quando lo smorzamento è piccolo. Per trovare una relazione matematica che tenga in debito conto delle dimensioni, questo significa che *la campana tende a essere simmetrica per  $\alpha f_0 \ll 1$* .

Da ultimo, la Fig. 3 riporta diverse curve di risonanza e i corrispondenti sfasamenti in funzione della frequenza per alcuni diversi valori dei componenti  $R$  e  $C$ ; si vede come, a parità di  $L$ , la frequenza di risonanza sia determinata da  $C$  e la larghezza della campana da  $R$ .

### A. Una visione alternativa

Che il circuito rappresentato in Fig. 1 si comporti come un oscillatore armonico smorzato è evidente scrivendo la sua equazione nel dominio del tempo (Eq. 3); la presenza della forzante sinusoidale conduce dunque a un oscillatore forzato, cioè alla presenza di una risonanza. L'analisi nel dominio delle frequenze, e in particolare la forma della funzione di trasferimento, permettono anche di studiare quantitativamente la risonanza. Tutto questo, come abbiamo visto, richiede l'uso di un po' di matematica.

Come succede molto spesso, è possibile giungere qualitativamente alle stesse conclusioni in modo molto più diretto. Partiamo dalla considerazione che il segnale  $V_{out}$  è rappresentativo della intensità di corrente che circola nella maglia dell'oscillatore. A basse frequenze, tendenti alle condizioni continue ( $\omega \simeq 0$ ), la corrente è "bloccata", o fortemente impedita, dalla presenza del condensatore. Ad alte frequenze, invece, è l'induttore che "reagisce" al passaggio di corrente cercando di impedirlo. Infine, a risonanza, come abbiamo già discusso, la serie di condensatore e induttore presenta il minimo di impedenza, che significa la corrente viene massimizzata, ovvero l'ampiezza del segnale  $V_{out}$  va al suo picco.

Questo tipo di descrizione può stimolare un approccio, sempre qualitativo, che fa uso dei concetti tipici della descrizione dei filtri. Sappiamo che un filtro, caratterizzato da una data risposta in frequenza, e quindi da una certa funzione di trasferimento, può essere realizzato impiegando resistenze e condensatori. Il comportamento del condensatore (della sua impedenza) con la frequenza è responsabile per la specifica risposta del filtro: usando un solo condensatore e una sola resistenza, a seconda della topologia circuitale, si può ottenere un filtro passa-basso o passa-alto.

È molto semplice dimostrare che anche unendo un induttore e una resistenza in una maglia si può ottenere un filtro. Poiché il comportamento dell'induttore con la frequenza è "opposto" a quello del condensatore (il condensatore tende a comportarsi da circuito aperto o da cortocircuito a frequenze rispettivamente basse o alte, l'induttore tende a comportarsi in modo opposto), è altrettanto facile rendersi conto che la topologia di un filtro passa-alto  $RL$  è la stessa di un passa-basso  $RC$  con l'induttore al posto del condensatore, quella di un filtro passa-basso  $RL$  è la stessa di un passa-alto  $RC$  con l'induttore al posto del condensatore.

Nel circuito di Fig. 1 il condensatore è in serie all'induttore e inoltre è presente una resistenza verso la linea di terra, o massa. Con un po' di forzatura concettuale, quel circuito può essere pensato come la sequenza di un filtro passa-alto (in cui l'elemento che reagisce alla frequenza è il condensatore) e di un filtro passa-basso (in cui invece è protagonista l'induttore). La serie dei due filtri dà luogo a un filtro *passa-banda*, che lascia passare, cioè non attenua (o attenua di poco) le frequenze comprese all'interno di un certo range, che di fatto corrisponde alla larghezza della campana della curva di risonanza.

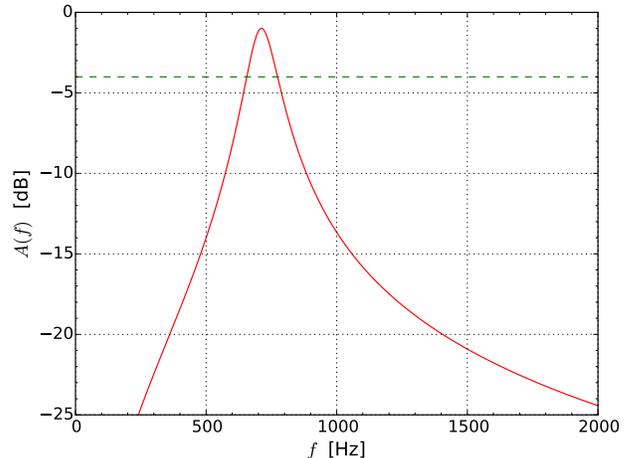


Figura 4. Analogo del pannello inferiore di Fig. 2, ma con l'attenuazione, o guadagno,  $A(f)$  misurata in dB, come si fa nel diagramma di Bode dei filtri. La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore che si trova a  $-3$  dB rispetto al valore massimo. Si può facilmente dimostrare che la larghezza della campana così determinata, cioè l'intervallo in frequenza tra le due intercette della linea con la campana, è  $\Delta f_{-3dB} = \Delta f_{fwhm}/\sqrt{3}$ .

In linea di principio, un filtro passa-banda potrebbe anche essere costruito usando solo resistenze e condensatori (o, se si vuole, resistenze e induttori). Tuttavia la variante  $RLC$  è sicuramente preferibile: (i) essa minimizza i problemi connessi con il montaggio in serie di due distinti circuiti, e la conseguente necessità di aggiustare l'impedenza di uscita del primo sotto-circuito con quella di ingresso del sotto-circuito seguente; (ii) a patto di usare valori di resistenza sufficientemente bassi, essa permette di ottenere bande relativamente strette; (iii) il comportamento con la frequenza di un oscillatore forzato  $RLC$  permette di ottenere curve di attenuazione, o guadagno, che sono generalmente più "ripide" di quelle realizzate per filtri "a un polo".

Per curiosità, la Fig. 4 mostra la curva di risonanza con il modulo della funzione di trasferimento,  $A(f)$ , misurato in unità di dB, come si fa quando si preparano i grafici di Bode dei filtri. Si vede chiaramente come, almeno in alcuni tratti, la pendenza della curva sia ben maggiore dei 3 dB/ottava (o 20 dB/decade) tipici dei filtri "a un polo".

## IV. ENERGIA, POTENZA E FATTORE DI QUALITÀ (Q-FACTOR)

L'aspetto più trasversale del fenomeno della risonanza nelle sue molteplici applicazioni riguarda il comportamento del sistema, che per noi è un oscillatore  $RLC$ , nei confronti della potenza. Infatti si afferma spesso che a risonanza si ottiene il massimo trasferimento di potenza

dalla forzante, che per noi è il generatore di forme d'onda, al sistema. Scopo di questa sezione è cercare una descrizione quantitativa di questo fenomeno soffermandoci su diversi aspetti che riguardano energia, potenza media, e fattore di qualità dell'oscillatore.

### A. Energia

Chiamiamo qui  $E_{\text{stored}}$  l'energia "dell'oscillatore", cioè quella "immagazzinata" in esso e dovuta alla presenza delle oscillazioni di carica e corrente nel circuito. Come ben sappiamo, questa energia ha due contributi di diversa tipologia: il contributo elettrostatico, localizzato nel condensatore e proporzionale al quadrato della carica da esso accumulata, e quello magnetostatico, localizzato nell'induttore e proporzionale al quadrato dell'intensità di corrente che lo attraversa. Il parallelo con energia cinetica ed energia elastica di un oscillatore armonico meccanico, quello fatto dalla molla e dalla massa ad essa attaccata, è ovvio. Anche nell'oscillatore  $RLC$  l'energia passa continuamente e periodicamente da elettrostatica a magnetostatica, così come nell'oscillatore meccanico essa passa continuamente e periodicamente da elastica a cinetica.

Poiché carica e intensità di corrente sono legate tra loro dall'operatore derivata temporale, e visto l'andamento sinusoidale nel tempo di queste grandezze, ci saranno sicuramente (tanti) istanti di tempo in cui la carica è nulla e la corrente ha la sua massima intensità  $I_{\text{max}}$  (in modulo, qui dei segni possiamo disinteressarci). In questi istanti l'energia immagazzinata nell'oscillatore è fatta dalla sola componente magnetostatica; come sapete (e come torneremo in futuro a dimostrare), l'espressione di questa energia, che quindi rappresenta *tutta* l'energia immagazzinata nell'oscillatore, è

$$E_{\text{stored}} = \frac{L}{2} I_{\text{max}}^2. \quad (25)$$

Ora è facile rendersi conto che  $I_{\text{max}}^2 \propto |V_{\omega\text{out}}|^2$ : infatti fare il quadrato dell'ampiezza della corrente massima equivale a considerare il modulo quadro del fasore  $I_{\omega}$  corrispondente, che è sicuramente proporzionale, attraverso l'inverso del modulo dell'impedenza di uscita del circuito,  $|Z_{\text{out}}|$ , a  $V_{\omega\text{out}}$ . Ora, supponendo di trovarci in condizioni in cui  $|V_{\omega\text{in}}|$  rimane costante mentre viene variata la frequenza e costruita la curva, o spettro, di risonanza, risulta evidente che

$$E_{\text{stored}}(f) \propto A^2(f), \quad (26)$$

dove rinunciamo a esplicitare il coefficiente di proporzionalità, che qui non ci interessa.

Dunque, poiché l'andamento dell'energia immagazzinata nell'oscillatore dipende da  $A^2(f)$ , spesso è utile avere una rappresentazione grafica proprio di questa funzione, a cui possiamo dare il nome di *curva di risonanza*, o *spettro*, di energia. In Fig. 5, ad esempio, il calcolo di

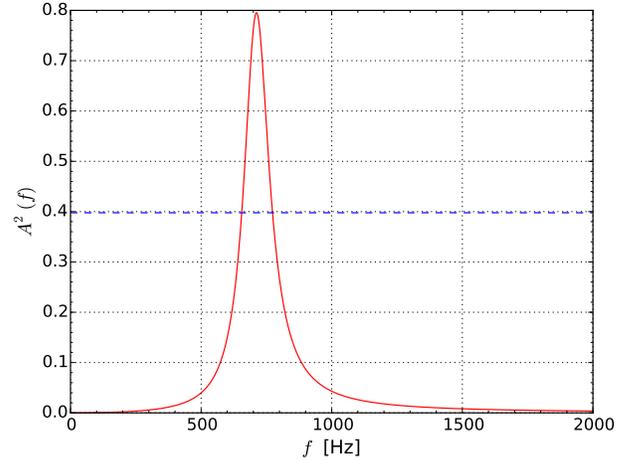


Figura 5. Calcolo della curva di risonanza, o spettro, di energia  $A^2(f)$  per lo stesso oscillatore armonico  $RLC$  considerato in Fig. 2. La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore  $A_{\text{max}}^2/2$ . Si può facilmente dimostrare che la larghezza a metà altezza della campana così determinata, cioè l'intervallo in frequenza tra le due intercette della linea con la campana, è  $\Delta f_{f_{whm}, A^2} = \Delta f_{-3dB}$ .

$A^2(f)$  è eseguito per la stessa scelta di valori di Fig. 2. Si vede come, per effetto del quadrato, la campana sia più stretta e più simmetrica rispetto a quella di Fig. 2. Inoltre, come è facile dimostrare, la sua larghezza a metà altezza è  $\Delta f_{f_{whm}, A^2} = \Delta f_{-3dB}$ , che dà ragione del perché sia comune definire e impiegare anche la larghezza  $\Delta f_{-3dB}$  per caratterizzare una curva di risonanza.

Concediamoci un'altra piccola divagazione matematica sulla  $A^2(f)$ . Troverete in futuro, se già non è successo, che alcuni spettri, o curve di risonanza, hanno una forma ben descritta da una funzione Lorentziana, cioè del tipo

$$h(x) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2 + (x - x_0)^2}, \quad (27)$$

con  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  costanti e  $x$  variabile indipendente generica. Questa funzione rappresenta una campana *simmetrica*, centrata in  $x = x_0$ , con altezza di picco  $h_{\text{max}} = \kappa_1/\kappa_2$  e larghezza a metà altezza  $\Delta f_{f_{whm}} = 2\sqrt{\kappa_2}$ . Confrontata con una Gaussiana di simile larghezza, la Lorentziana ha l'importante caratteristica di avere delle code "più alte".

Si può dimostrare che, nel caso di oscillatore  $RLC$  molto poco smorzato, la  $A^2(f)$  tende a questa forma funzionale. Scriviamo infatti esplicitamente la  $A^2(f)$ , cioè svolgiamo il quadrato dell'Eq. 16:

$$A^2(f) = \frac{(2\pi fRC)^2}{(2\pi f(R+r)C)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2} \simeq \quad (28)$$

$$\simeq \frac{(2\pi fRC)^2}{(2\pi fRC)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}, \quad (29)$$

dove l'ultimo passaggio vale per  $r \ll R$ , che supponiamo valida per semplicità matematica. Con alcuni, ulteriori e

semplicissimi, passaggi, si ha

$$A^2(f) \simeq \frac{1}{1 + \frac{(f_0^2 - f^2)^2}{(2\pi f RC)^2 f_0^4}} = \quad (30)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{((f_0 - f)(f_0 + f))^2}{(2\pi f RC)^2 f_0^4}}. \quad (31)$$

Se l'oscillatore è molto poco smorzato, allora la larghezza della campana  $A^2(f)$  sarà molto stretta, cioè la funzione sarà sensibilmente diversa da zero solo in un piccolo intorno di  $f = f_0$ . A parte che nel termine  $(f - f_0)$ , in cui conta (al primo ordine) la differenza tra  $f$  e  $f_0$ , altrove potremo porre  $f \simeq f_0$ , ottenendo

$$A^2(f) \simeq \frac{1}{1 + 4 \frac{(f_0 - f)^2}{f_0^4} \frac{1}{(2\pi RC)^2}}. \quad (32)$$

Questa è proprio l'espressione di una Lorentziana centrata in  $f = f_0$ , cioè sulla risonanza, e di larghezza a metà altezza  $\Delta f_{f_{whm}, A^2} = 2\pi RC f_0^2 = R/(2\pi L)$ , dove abbiamo usato  $f_0^2 = 1/(4\pi^2 LC)$ . Ricordando che per il nostro oscillatore armonico il tempo di smorzamento è  $\tau = 2L/R$ , la larghezza a metà altezza si può scrivere come  $\Delta f_{f_{whm}, A^2} = 1/(\pi\tau)$ , ovvero, tornando a ragionare in termini di frequenza angolare,  $\Delta\omega_{f_{whm}, A^2} = 2/\tau$ .

Al di là dei dettagli matematici, che non contano molto, il messaggio di questa divagazione può essere riassunto così: per un oscillatore molto poco smorzato, cioè per il quale  $1/\tau \ll \omega_0$ , la curva di risonanza di energia tende ad assumere la forma Lorentziana, con una larghezza a metà altezza (in frequenza angolare) pari a  $1/\tau$ . Per esempio, questo è il caso del cosiddetto "modello di Lorentz" dell'interazione radiazione/materia in approccio classico, ma anche l'andamento di una popolazione di sistemi (per esempio atomi) eccitati, la cui eccitazione viene smorzata attraverso collisioni.

## B. Potenza

Sappiamo che, in un circuito sottoposto a una d.d.p. alternata (sinusoidale)  $\Delta V(t)$  e attraversato da una corrente alternata (sinusoidale) di intensità  $I(t)$ , la potenza *media* può essere espressa come  $\langle P \rangle = (\Delta V_{max} I_{max}/2) \cos(\Delta\phi)$ , dove  $\Delta V_{max}$  e  $I_{max}$  rappresentano le ampiezze dei segnali  $\Delta V(t)$  e  $I(t)$  e  $\Delta\phi$  lo sfasamento dell'uno rispetto all'altro. Come certamente ricordate, sia il fattore  $1/2$  che il *fattore di potenza*  $\cos(\Delta\phi)$  vengono dall'operazione di media temporale.

Se consideriamo la potenza erogata dal generatore di forme d'onda che alimenta il circuito  $RLC$ , possiamo individuare  $\Delta V(t)$  con il segnale  $V_{in}(t)$  [o, se preferite, con  $V_G(t)$ ] e  $I(t)$  con la corrente che scorre nella maglia dell'oscillatore. Sulla falsariga di quanto esposto per il calcolo dell'energia immagazzinata nell'oscillatore, possiamo facilmente dedurre che  $\langle P(f) \rangle \propto A^2(f) \cos(\Delta\phi)$ . Visto l'andamento di  $\Delta\phi$  con la frequenza  $f$ , è immediato affermare che questa funzione è ancora una campana centrata

in  $f = f_0$ . Se interpretiamo  $\langle P(f) \rangle$  come potenza *trasferita* dalla forzante al sistema, è evidente che essa ha un picco proprio a risonanza, dove lo sfasamento è nullo.

A risonanza, nell'oscillatore l'energia rimbalza continuamente e periodicamente tra condensatore (energia elettrostatica) e induttore (energia magnetostatica). La presenza delle resistenze, che questa volta consideriamo in blocco come  $R' = R + r + r_G$ , implica dissipazione di potenza per effetto Joule. La potenza *media* dissipata per effetto Joule è

$$\langle P_{Joule} \rangle = \frac{R' I_{max}^2}{2}. \quad (33)$$

A risonanza, questa potenza, che l'oscillatore perde (cioè "dissipa" mediamente nel tempo) viene mediamente ripianata dalla potenza erogata dal generatore, trasferita continuamente al sistema.

Basandoci sulla potenza dissipata mediamente per ciclo, possiamo a questo punto introdurre una nuova grandezza, l'*energia persa per ciclo*:

$$E_{\text{lostpercycle}} = \langle P_{Joule} \rangle T_0 = \frac{R' I_{max}^2}{2 f_0}, \quad (34)$$

dove  $T_0 = 1/f_0$  rappresenta il periodo dell'oscillazione a risonanza.

## C. Fattore di qualità (Q-factor)

La larghezza della curva di risonanza può essere caratterizzata da una quantità specifica, che si chiama *fattore di qualità*, o *fattore di merito*, o, ancora, *Q-factor*, e che indicheremo proprio come  $Qf$ . Questa grandezza è adimensionale, essendo proporzionale, come dimostreremo, al rapporto  $f_0/\Delta f_{f_{whm}}$ . Quindi essa serve per esprimere quanto è "stretta" la curva di risonanza, misurata in unità della frequenza di risonanza stessa: un Q-factor grande indica in particolare una curva molto piccata attorno a  $f_0$ , un Q-factor piccolo una curva molto "allargata".

Una buona e generale *definizione* di fattore di merito è la seguente:

$$Qf = 2\pi \frac{E_{\text{stored}}}{E_{\text{lostpercycle}}}, \quad (35)$$

dove il termine  $2\pi$  a moltiplicare ha un'origine legata all'uso delle frequenze angolari, e qualche volta viene omesso.

Secondo quanto abbiamo dimostrato in precedenza, per il nostro oscillatore  $RLC$  possiamo porre

$$Qf = 2\pi \frac{L I_{max}^2 / 2}{R' I_{max}^2 / 2} f_0 = 2\pi \frac{L}{R'} f_0. \quad (36)$$

È facile notare allora che è dimostrata la relazione  $Qf \propto f_0/\Delta f_{f_{whm}}$  (qui supponiamo  $r_G$  trascurabile); il fattore di proporzionalità, che vale  $\sqrt{3}$ , cioè  $Qf =$

$\sqrt{3}f_0/\Delta f_{fwhm}$ , è legato alla definizione di larghezza a metà altezza (vedi Eq. 23). In particolare, esso scomparirebbe se usassimo la larghezza  $\Delta f_{-3dB}$  che abbiamo definito prima.

Oltre a fornire un'informazione adimensionale sulla larghezza della curva di risonanza, utile per esempio per confrontare le caratteristiche di oscillatori che lavorano a frequenze di risonanza diverse, al fattore di merito si può attribuire anche un altro significato generale. Abbiamo prima parlato di energia immagazzinata nell'oscillatore e di energia che viene persa per ogni ciclo di oscillazione. Se immaginiamo l'oscillatore come un sistema in cui possiamo porre inizialmente dell'energia, in pratica eseguendo la stessa operazione che abbiamo compiuto nell'esperienza dell'oscillatore smorzato, allora il fattore di merito ci informa sulla sopravvivenza di questa energia all'interno del sistema. In particolare, e a meno di costanti,  $Qf$  è una misura del numero di cicli di oscillazione che il nostro oscillatore può eseguire prima di aver perso la propria energia iniziale (in maniera più o meno completa).

Nel futuro, se già non vi è capitato, vedrete come siano frequentemente utilizzati, ad esempio nei laser, dei sistemi denominati *cavità ottiche* risonanti. Questi sistemi hanno la capacità di immagazzinare dell'energia (sotto forma di radiazione elettromagnetica, o di numero di fotoni) e un comportamento che, sotto certi punti di vista, assomiglia a quello di un oscillatore smorzato. In questo ambito, il fattore di merito definisce in maniera pressoché completa il funzionamento del sistema.

Per concludere questa sezione, facciamo due canticini: per l'oscillatore costruito con i componenti citati nel nostro esempio si ha  $Qf \approx 6$ , che non è proprio un granché se confrontato con i valori tipici per oscillatori "al quarzo" (fino a parecchie migliaia), per non dire delle cavità risonanti di cui abbiamo appena fatto cenno, che possono avere valori di  $Qf$  straordinariamente grandi.

## V. CIRCUITO "ANTIRISONANTE"

Come potete facilmente capire, i circuiti con resistori, induttori, capacitori sono un ottimo banco di prova per verificare, studiare, analizzare le condizioni di risonanza. A differenza degli analoghi meccanici, qui si può godere di un'ampia libertà nel definire le condizioni di operazione del circuito (sempre a patto che le approssimazioni considerate si mantengano valide).

Un esempio della versatilità ed efficacia dei circuiti di questo tipo è rappresentato dallo schema di Fig. 6, che rappresenta quello che talvolta si chiama *oscillatore antirisonante*. La denominazione intende mettere in luce che, in tale circuito, a risonanza l'ampiezza di  $V_{out}$  diminuisce, cioè ha un picco orientato "verso il basso" laddove prima questo era orientato "verso l'alto".

Esaminiamo brevemente anche questo circuito. La differenza fondamentale rispetto al precedente è che stavolta induttore e capacitori sono in parallelo fra loro.

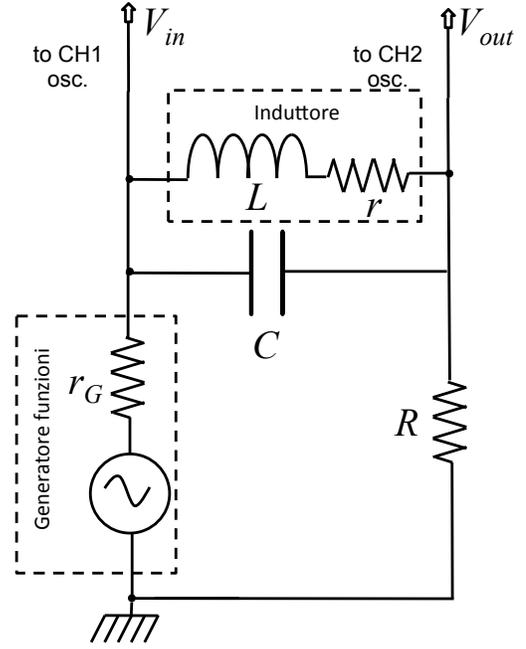


Figura 6. Circuito dell'oscillatore "antirisonante" (parallelo) considerato nel testo.

L'impedenza di questo parallelo è

$$Z_{par} = \frac{r + j\omega L}{j\omega rC + (1 - \omega^2 LC)}. \quad (37)$$

La soluzione completa, cioè senza approssimazioni, dell'equazione del circuito è in questo caso parecchio complicata: essa è trattata numericamente in Appendice. Per proseguire con un po' di matematica semplice, occorre imporre che *sia trascurabile la resistenza interna dell'induttore rispetto a  $\omega L$* , cioè  $r \ll \omega L$ . Tenendo conto dei valori in gioco, questa approssimazione è attesa valere abbastanza bene solo per frequenze sufficientemente alte.

Nell'approssimazione fatta, e assumendo per semplicità anche  $r_G$  trascurabile, per cui  $V_{\omega G} = V_{win}$ , si ottiene abbastanza rapidamente la seguente funzione di trasferimento:

$$T(\omega) = \frac{V_{\omega out}}{V_{win}} = \frac{j\omega rC + (1 - (\omega/\omega_0)^2)}{j\omega(L/R + rC) + (1 - (\omega/\omega_0)^2)}, \quad (38)$$

con, come al solito,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . In questo circuito la risonanza implica che l'impedenza del parallelo tenda a un massimo; di conseguenza a risonanza diminuisce la corrente che passa nel circuito e quindi  $V_{out}$  ha un minimo.

Infatti il modulo della funzione di trasferimento, scritto anche stavolta in funzione di  $f = \omega/(2\pi)$ , è

$$A(f) = |T(f)| = \sqrt{\frac{(2\pi f rC)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}{(2\pi f(rC + L/R))^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}}. \quad (39)$$

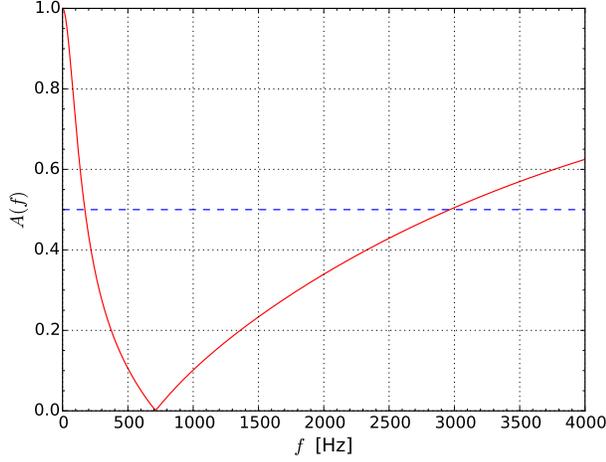


Figura 7. Curva di “antirisonanza” calcolata per l’oscillatore (parallelo) descritto nel testo. L’asse verticale riporta il modulo della funzione di trasferimento,  $A(f)$ , quello orizzontale la frequenza,  $f$ . La linea tratteggiata orizzontale rappresenta il valore metà del massimo,  $A_{max}/2$ .

Questa funzione è decisamente meno comprensibile di quella espressa in Eq. 16, però ci si rende conto abbastanza facilmente che essa presenta un *minimo* per  $f = f_0$ . La Fig. 7 mostra un grafico della funzione  $A(f)$  per valori dei componenti analoghi a quelli usati in precedenza. Si tralasciano le verifiche matematiche, ma si può osservare come anche in questo caso si ottenga che a risonanza lo sfasamento passi per zero e cambi di segno. Inoltre anche qui la larghezza della campana dipende dal coefficiente di smorzamento (ma, attenzione, la dipendenza con il coefficiente di smorzamento è opposta rispetto a prima, cioè diminuisce con  $R'$ , l’espressione di  $\Delta f_{fwhm}$  è diversa e la larghezza della campana è in genere ben maggiore, come si vede anche dal grafico), e valgono alcune “proprietà” simili a quelle trovate prima per l’oscillatore risonante. In particolare si ha ancora  $f_- f_+ = f_0^2$ . Notate che l’andamento “spigoloso” e il quasi annullamento della funzione per  $f \approx f_0$  possono essere, almeno in parte, conseguenza delle approssimazioni fatte.

#### APPENDICE: CALCOLO DI $A(f)$ PER L’OSCILLATORE ANTI-RISONANTE CON IL PACCHETTO CMATH

Come sappiamo, Python dispone di un pacchetto, denominato `cmath`, che consente di manipolare numeri complessi. Adoperare i numeri complessi può tornare utile quando la funzione  $T(f)$  diventa complicata, come nel

caso del circuito antirisonante. Infatti, almeno in linea di principio, non c’è bisogno di agire con razionalizzazioni, semplificazioni e altri artifici matematici per ottenere (sulla carta) una funzione  $A(f)$  che possa essere direttamente calcolata con Python.

Scriviamo l’impedenza totale del circuito come

$$Z_{tot} = r_G + R + Z_{par} , \quad (40)$$

con

$$Z_{par} = \left( \frac{1}{r + j\omega L} + j\omega C \right)^{-1} , \quad (41)$$

impedenza del parallelo induttore reale e condensatore, scritta in forma complessa. Questa espressione è ovviamente analoga a quella di Eq. 37, ma, coerentemente con l’approccio che stiamo seguendo, in essa non sono stati inseriti passaggi matematici di alcun genere.

Il segnale di uscita, ovvero il fasore  $V_{\omega out}$ , è preso ai capi del resistore  $R$ , mentre il segnale di ingresso,  $V_{\omega in}$ , è preso ai capi della serie costituita dal resistore  $R$ , con impedenza  $R$ , e dal parallelo tra induttore (reale) e condensatore, con impedenza  $Z_{par}$ . Possiamo quindi porre

$$Z_{out} = R \quad (42)$$

$$Z_{in} = R + Z_{par} . \quad (43)$$

La funzione di trasferimento può essere convenientemente espressa in funzione delle impedenze appena definite. Infatti, dato che  $V_{\omega out} = Z_{out} I_\omega$  e  $V_{\omega in} = Z_{in} I_\omega$ , si può scrivere

$$T(\omega) = \frac{Z_{out}}{Z_{in}} . \quad (44)$$

Usando Python, è facile costruire arrays di  $Z_{out}$  e  $Z_{in}$  in funzione della frequenza  $f$  ed è immediato calcolarne i moduli. Dividendo questi moduli si ottiene sotto forma di array la funzione di trasferimento  $A(f)$ , mentre calcolando il rapporto tra parte immaginaria e reale si ha lo sfasamento (che quindi è anch’esso semplice da calcolare).

Il risultato del calcolo, sia per  $A(f)$  che per  $\Delta\phi$ , è mostrato in Fig. 8: i valori dei componenti del circuito sono quelli già impiegati in precedenza, cioè  $R = 330$  ohm,  $r = 40$  ohm,  $r_G = 50$  ohm,  $L = 0.5$  H,  $C = 0.1$   $\mu$ F. Si vede che effettivamente lo sfasamento passa per lo zero, cambiando di segno, a risonanza. Per quanto riguarda l’attenuazione, o guadagno, l’andamento è simile a quello approssimato di Fig. 7, con un po’ meno spigolosità a basse frequenze, a testimonianza che le approssimazioni introdotte per ricavare l’Eq. 39 sono ragionevoli.

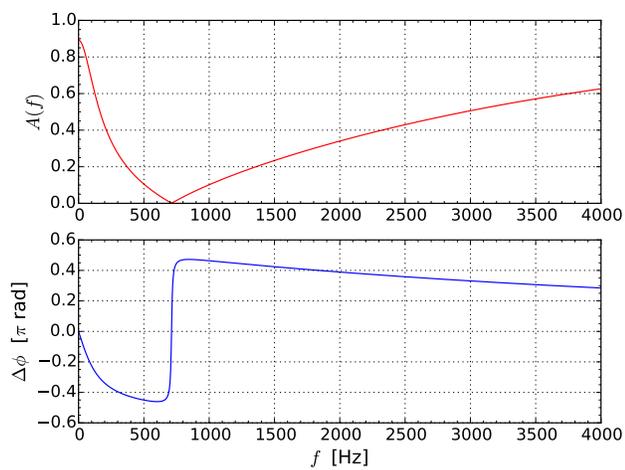


Figura 8. Attenuazione, o guadagno,  $A(f)$  e sfasamento  $\Delta\phi$  in funzione della frequenza per il circuito antirisonante di Fig. 6, calcolate per i valori dei componenti citati nel testo. Il calcolo è eseguito usando direttamente le espressioni complesse delle impedenze in gioco, grazie all'impiego del pacchetto `cmath` di Python.