

Oscillatore smorzato

fuso@df.unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 7 - FF, 3 dicembre 2014)

L'esercitazione sull'oscillatore smorzato con induttore e condensatore è piuttosto banale. Tuttavia vale la pena puntualizzare alcuni aspetti che possono risultare un po' nascosti dietro la complessiva semplicità dell'esperienza e della sua interpretazione. Questa breve nota ha lo scopo di mettere in luce tali aspetti.

I. CIRCUITO E SUA EQUAZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO

Il circuito considerato è rappresentato in Fig. 1: esso è costituito da un induttore di induttanza L e resistenza interna r collegato a un condensatore C . La parte racchiusa nel box tratteggiato è costituita da un generatore di forme d'onda, configurato in modo da produrre un'onda quadra fortemente asimmetrica (con duty cycle molto diverso da 50:50), seguito da un diodo bipolare a giunzione di silicio. Il funzionamento del diodo sarà chiarito in futuro. Per il momento, limitiamoci a considerarlo come un dispositivo che entra in conduzione, cioè lascia passare corrente, ovvero presenta una resistenza trascurabile, quando il punto A (anodo) si trova a potenziale maggiore del punto K (catodo) indicati nello schema. Viceversa, se il punto K si trova a potenziale maggiore rispetto al punto A, il diodo è in interdizione, cioè non lascia passare corrente, ovvero presenta una resistenza virtualmente infinita.

Considerando la presenza del generatore di funzioni, ci si aspetta che il diodo faccia passare corrente solo nelle fasi in cui l'onda quadra si trova allo stato "alto": in queste fasi, quindi, il condensatore può caricarsi, essendo sottoposto a una d.d.p. approssimativamente pari all'ampiezza dell'onda quadra. Quando invece l'onda quadra è allo stato "basso", allora il circuito dell'oscillatore si trova di fatto isolato (scollegato) rispetto al generatore.

In sostanza, allora, la parte racchiusa nel box tratteggiato serve per fornire le necessarie *condizioni iniziali* all'oscillatore armonico, cioè a dare al condensatore una carica iniziale e dunque un'energia iniziale che è quella che poi viene persa per dissipazione Joule da parte della resistenza; durante la scarica, il valore della carica sull'armatura del condensatore oscilla con una certa frequenza, circostanza che, combinata con la perdita di energia, dà luogo al classico comportamento di un *oscillatore smorzato*.

Per comprendere il comportamento dell'induttore nel circuito occorre fare riferimento alla cosiddetta legge di Faraday (una delle equazioni di Maxwell in forma integrale). Iniziamo con il notare che l'induttore è, di fatto, un avvolgimento di filo conduttore, ovvero una bobina (se preferite, un solenoide) e chiamiamo $\Phi_S(\vec{B})$ il flusso di campo magnetico *concatenato*, cioè calcolato sulla sezione della bobina stessa. La legge di Faraday stabilisce

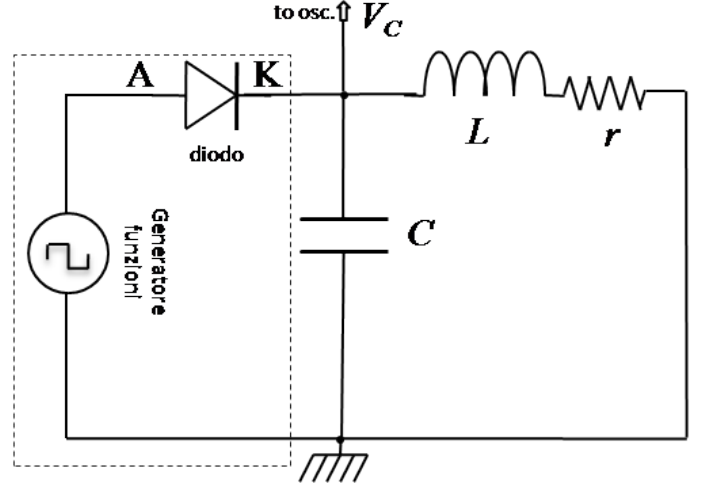


Figura 1. Circuito dell'oscillatore smorzato considerato nel testo.

che

$$\oint \vec{E}^* \cdot d\vec{\ell} = \varepsilon = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}. \quad (1)$$

Alla circuitazione del campo elettrico (detto auto-indotto, e per questo indicato con l'asterisco) $\vec{E}^*$ che compare nell'equazione si dà talvolta il nome di *forza elettromotrice*, nome che è abbastanza misleading, se non altro per questioni dimensionali (non si tratta di una forza ma di una differenza di potenziale). Spesso per indicare la forza elettromotrice si usa il simbolo ε , come nell'equazione appena scritta.

Nel caso di nostro interesse, il campo magnetico che compare nella variazione di flusso è quello prodotto dalla corrente che fluisce nell'induttore. In queste condizioni si può porre $\Phi_S(\vec{B}) = LI$, dove L si chiama *induttanza* (o coefficiente di auto-induzione) e I è l'intensità della corrente che attraversa il filo che realizza l'avvolgimento. Supponendo, come è il caso, che L sia una caratteristica propria dell'induttore, cioè che dipenda solo dalla sua costruzione (forma, dimensioni, materiale), si ha

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}. \quad (2)$$

Il segno meno che compare al secondo membro delle Eqs. 1,2 merita di essere commentato. Esso è infatti

così importante da meritare, in qualche testo, un nome specifico (si parla qualche volta di legge di Lenz). La sua interpretazione è la seguente: l'induttore reagisce a una variazione di flusso di campo magnetico "esterno", cioè dovuto alla variazione di corrente, dando luogo a un campo magnetico *indotto* la cui variazione di flusso si oppone a quella del campo prodotto dalla corrente I . Per esempio, supponiamo ci sia una corrente, di verso convenzionalmente positivo, che attraversa l'induttore e immaginiamo che la sua intensità aumenti nel tempo. Questo dà luogo a un aumento del flusso di campo magnetico. L'induttore *reagisce* in modo da annullare, o tendere ad annullare, questo aumento di flusso. Per farlo, al suo interno si stabilisce una corrente *indotta* che circola in verso opposto rispetto a quella "esterna": la variazione del flusso del campo magnetico *indotto* tende allora a opporsi alla variazione del campo magnetico "esterno".

Il passaggio di corrente attraverso l'induttore può essere ottenuto collegando ai suoi capi un generatore di d.d.p. ΔV_G . In questo modo si forma un circuito a una maglia che è composto dal generatore e dall'induttore. Detta ΔV_L la d.d.p. ai capi del solenoide, deve essere $\Delta V_G = \Delta V_L$. D'altra parte, per l'Eq. 2 sulla maglia si ha anche $0 = \Delta V_G - L dI/dt$. Confrontando le due equazioni si ottiene

$$\Delta V_L = L \frac{dI}{dt} . \quad (3)$$

In questa equazione il segno meno di cui ci siamo occupati prima è scomparso. Il sottile motivo fisico è che il segno meno era prima associato alla corrente indotta, mentre nello scrivere le equazioni di un circuito siamo interessati alle correnti "esterne", cioè quelle che mandiamo all'interno dei vari componenti. Per la legge di Lenz, correnti indotte e "esterne" hanno segni opposti, cosa che comporta la scomparsa del segno negativo.

L'Eq. 3 può di fatto essere considerata come l'equazione costitutiva dell'elemento circuitale che definiamo induttore. Essa può essere impiegata per descrivere il comportamento del circuito di Fig. 1 nel dominio del tempo. L'equazione della maglia *negli istanti di tempo successivi a quello iniziale* (dunque trascurando la parte di circuito nel box tratteggiato) si può scrivere imponendo che la d.d.p. complessiva sulla maglia sia nulla. Infatti nelle fasi che stiamo considerando il generatore di forme d'onda si può considerare isolato (non collegato) al circuito. Tenendo conto della caduta di potenziale ai capi della resistenza interna r e della presenza dell'induttore, si ha

$$0 = \frac{Q}{C} - rI - L \frac{dI}{dt} . \quad (4)$$

Ponendo $I = -dQ/dt$, dove il segno negativo tiene conto del fatto che la corrente è dovuta alla carica che lascia l'armatura del condensatore, e riarrangiando, si ha

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0 , \quad (5)$$

dove si è posto $\omega_0^2 = 1/(LC)$. L'equazione scritta è chiaramente quella di un *oscillatore armonico smorzato*.

Come ben sapete, la soluzione dell'equazione è del tipo $c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$, con $c_{1,2}$ costanti (complesse) che dipendono dalle condizioni iniziali e $\lambda_{1,2}$ soluzioni della cosiddetta equazione caratteristica, che è un'equazione algebrica del secondo ordine:

$$\lambda^2 + \frac{r}{L} \lambda + \omega_0^2 = 0 . \quad (6)$$

Si vede facilmente che le soluzioni sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{r}{L} \pm \sqrt{(r/L)^2 - 4\omega_0^2}}{2} . \quad (7)$$

Nel caso di nostro interesse l'oscillatore è, come vedremo, *sottosmorzato* e il discriminante dell'equazione di cui sopra è negativo. Posto $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$, con $\tau = 2L/r$, e $T = 2\pi/\omega$ (detto *pseudo-periodo*), si ha che la soluzione generale di Eq. 5 si può scrivere come $Q(t) = \exp(-t/\tau)(c_1 \exp(j\omega t) + c_2 \exp(-j\omega t))$. Poiché la soluzione deve essere reale (quindi $c_1 = c_2^*$), conviene riscrivere tale soluzione come

$$Q(t) = A \exp(-t/\tau) \cos(\omega t + \phi) \quad (8)$$

$$A = 2\sqrt{c_1 \cdot c_2} \quad (9)$$

$$\tan \phi = j(c_1 + c_2)/(c_1 - c_2) . \quad (10)$$

I coefficienti A (reale) e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali.

È evidente che la soluzione trovata, e, più in generale, lo studio che stiamo conducendo, sono svolti *nel dominio del tempo*. Questo è in effetti necessario, dato che qui ci interessiamo dell'andamento temporale delle grandezze rilevanti (d.d.p., carica, corrente) nell'intervallo che segue alla carica iniziale del condensatore. Vedremo nel seguito che questo circuito è di estremo interesse anche quando il generatore, invece che produrre impulsi, e poi isolarsi per la presenza del diodo, produce onde sinusoidali. In questo caso si è praticamente nelle condizioni di un oscillatore armonico smorzato e forzato, e la soluzione a regime può essere determinata in maniera molto efficace usando l'approccio del metodo simbolico, cioè lavorando *nel dominio delle frequenze*.

II. ESPERIENZA PRATICA E CONDIZIONI INIZIALI

Nell'esperienza pratica i valori tipici dei vari componenti sono i seguenti: $r \approx 30$ ohm, *misurata in corrente continua con il multimetro* (torneremo in seguito su questo importante aspetto) e $L \approx 0.5$ H; inoltre supponiamo $C = 0.1$ μ F. Infine poniamo che l'ampiezza dell'onda quadrata prodotta dal generatore sia $V_0 = 5$ V e immaginiamo che essa sia "alternata" (cioè il valore minimo della d.d.p. creata sia -5 V): nell'esperienza pratica siete invitati a verificare il comportamento del circuito per diversi valori di ampiezza e per la presenza di eventuali offset.

Con questi valori si ha una frequenza angolare *propria* dell'oscillatore $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \approx 4.5 \times 10^3$ rad/s, corrispondente a un periodo *proprio* $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 1.5$ ms, mentre $1/\tau = r/(2L) \approx 30$ s⁻¹, ovvero $\tau \approx 33$ ms. Di conseguenza l'approssimazione di debole smorzamento è ben verificata. In queste condizioni si ottiene facilmente $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2} \simeq \omega_0$, cioè la pseudo-frequenza angolare dell'oscillatore è molto simile alla sua frequenza propria (e lo pseudo-periodo T è molto simile al periodo proprio T_0).

Inoltre ricordiamo che nell'esperienza pratica il segnale osservato (vedi Fig. 1) è la d.d.p. V_C presa ai capi del condensatore:

$$V_C(t) = Q(t)/C = (A/C) \exp(-t/\tau) \cos(\omega t + \phi). \quad (11)$$

Vediamo ora di determinare i parametri A e ϕ che compaiono nella soluzione di Eq. 8 (e di Eq. 11). Nei tipici esercizi di meccanica la scelta delle condizioni iniziali viene in genere fatta in modo da semplificare l'algebra necessaria per la determinazione dei parametri incogniti. Per esempio, si sceglie spesso una velocità iniziale nulla o una posizione iniziale che corrisponde a quella di equilibrio. Ovviamente nel circuito considerato il ruolo della posizione iniziale è quello della carica Q_0 inizialmente (per $t = t_0 = 0$) presente sul condensatore, mentre quello della velocità iniziale è preso dell'intensità di corrente I_0 che scorre inizialmente nel circuito.

Dato che

$$I(t) = -\frac{d}{dt} A \exp(-t/\tau) \cos(\omega t + \phi) = \quad (12)$$

$$= A \exp(-t/\tau) \left(\frac{\cos(\omega t + \phi)}{\tau} + \omega \sin(\omega t + \phi) \right) \quad (13)$$

deve essere:

$$Q(t=0) = A \cos \phi = Q_0 \quad (14)$$

$$I(t=0) = A(\cos \phi / \tau + \omega \sin \phi) = I_0. \quad (15)$$

Dunque conoscendo Q_0 e I_0 è possibile determinare A e ϕ .

Il problema che si pone nella soluzione del nostro oscillatore armonico è che la conoscenza di Q_0 e I_0 non è banale, a differenza di quanto succede, in genere, con gli oscillatori meccanici. Esaminiamo qui di seguito alcune diverse possibilità.

A. Corrente iniziale nulla

La prima possibilità consiste nel porre $I_0 = 0$. Nell'equivalente meccanico, questo significherebbe avere un oscillatore che parte con velocità nulla. Supponendo, ragionevolmente, che il condensatore all'inizio del processo sia completamente carico, possiamo porre anche $Q_0 = CV_0$.

Risolviendo le Eqs. 14 in queste condizioni si ottiene:

$$\tan \phi = -\frac{1}{\omega \tau} \quad (16)$$

$$A = CV_0 \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega \tau)^2}}. \quad (17)$$

Ponendo $\omega \simeq \omega_0$ e tenendo conto dei valori numerici dell'esperimento, si ottiene $\tan \phi \sim -10^{-2}$, cioè $\phi \rightarrow 0^-$ (lo sfasamento vale circa -0.5 gradi) e $A \simeq CV_0$.

La soluzione corrispondente è mostrata nel pannello superiore di Fig. 2: si tratta evidentemente di una oscillazione che “va come il coseno” moltiplicata per un'esponenziale decrescente dovuto allo smorzamento. L'andamento generale è simile a quello che si osserva sperimentalmente, però la parte iniziale è decisamente differente. Dunque, se vogliamo mantenere inalterato il modello che abbiamo sviluppato, dobbiamo concludere che le condizioni iniziali prescelte non rispecchiano la realtà.

B. Condizioni iniziali “stazionarie”

Proviamo a raffinare la descrizione tenendo conto che, nella fase in cui il condensatore si carica, cioè quando il diodo è in conduzione, c'è una corrente non nulla, di intensità $I_{in} = V_0/r$, che passa attraverso l'induttore. Notate che questa affermazione è valida se consideriamo una situazione stazionaria, come è ragionevole che sia considerando la relativamente lunga durata della fase di conduzione del diodo nelle tipiche condizioni sperimentali (decine di millisecondi).

L'istante iniziale del processo di scarica del condensatore, cioè quello in cui ha inizio l'oscillazione, coincide in prima battuta con l'istante in cui il generatore viene isolato dal circuito. Come già affermato, questo succede grazie al diodo, che va in interdizione. Fisicamente questo istante non è ben definito, dato che avviene all'interno di un intervallo corrispondente alla durata del fronte d'onda di discesa dell'onda quadra (asimmetrica) prodotta dal generatore. Anche volendo trascurare gli effetti dell'impedenza (capacità e induttanza) del circuito, il fronte d'onda di discesa si svolge in un tempo caratteristico che non è nullo: secondo i manuali del generatore di forme d'onda, questo tempo è almeno dell'ordine di qualche decina di nanosecondi.

È difficile modellare il comportamento del circuito in questo intervallo di tempo. Il passo più semplice consiste nel fare un'approssimazione nella quale consideriamo che la corrente I_{in} che fluiva nel circuito *prima* rimanga inalterata *durante* il breve intervallo di tempo considerato. In sostanza, poniamo $I_0 = I_{in} = V_0/r$. Notate che questa affermazione è in accordo con la legge di Faraday che regola il comportamento dell'induttore. Infatti essa suppone che l'induttore reagisca alla variazione di corrente “esterna” cercando di mantenere inalterate il flusso del campo magnetico a sè concatenato. Per descrivere questo tipo di comportamento dell'induttore, si dice qualche volta che esso presenta un'*inerzia* tutt'altro che trascurabile nei confronti delle variazioni di corrente. L'associazione concettuale fra induttanza e inerzia non stupisce: formalmente, nell'equazione differenziale dell'oscillatore armo-

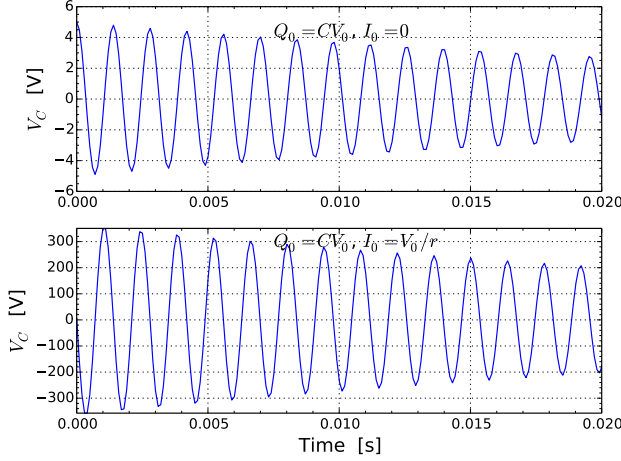


Figura 2. Segnale $V_C(t)$ atteso per le due condizioni iniziali descritte nel testo e indicate nei grafici; per chiarezza, viene mostrato l'andamento temporale del segnale nei primi 30 ms. Grafici realizzati ovviamente con Python.

nico L ha lo stesso posto che, in un oscillatore meccanico, è occupato dalla massa m .

Con questa scelta delle condizioni iniziali, e con un po' di lavoro di algebra, l'Eq. 14 conduce a

$$\tan \phi = \frac{1}{\omega} \left(\frac{I_0}{Q_0} - \frac{1}{\tau} \right) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{rC} - \frac{1}{\tau} \right) \quad (18)$$

$$A = Q_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi}, \quad (19)$$

dove nell'ultimo membro della prima equazione abbiamo espresso I_0 e Q_0 in funzione di V_0 .

Ponendo al solito $\omega \simeq \omega_0$ e tenendo conto dei valori numerici dell'esperimento, si ottiene $\tan \phi \simeq 1/(\omega_0 rC) \sim 10^2$, cioè $\phi \rightarrow \pi/2$ (lo sfasamento vale circa 89 gradi) e $A \simeq Q_0 \tan \phi \sim 10^2 CV_0$.

La $V_C(t)$ ottenuta in queste condizioni è mostrata nel pannello inferiore di Fig. 2: si vede chiaramente l'effetto dello sfasamento, ma l'aspetto più eclatante è l'elevato valore dell'ampiezza del segnale. Anche in questo caso la previsione non è in accordo con l'osservazione sperimentale, e dunque neanche le condizioni iniziali qui utilizzate descrivono bene la realtà sperimentale, ovvero il modello non tiene in debito conto il funzionamento del circuito.

C. Possibile descrizione più realistica

Ottenere segnali picco-picco di ampiezza superiore alle centinaia di V, come in figura, può sembrare sicuramente molto strano. Si tratta infatti di valori che sono oltre un ordine di grandezza superiori alla massima ampiezza del segnale prodotto dal generatore, e qualcuno potrebbe obiettare che ci siano problemi a livello di base (per esempio, conservazione dell'energia).

Premesso che il risultato ottenuto è figlio della specifica scelta delle condizioni iniziali, dunque soggetto a possibili errori legati alla modellizzazione della fase transitoria in cui il diodo passa in interdizione, vale la pena verificare i possibili meccanismi fisici coinvolti nella generazione di segnali così strepitosi. Conviene ragionare innanzitutto proprio in termini di energia. Abbiamo già stabilito che inizialmente c'è dell'energia, di "tipo" elettrostatico, immagazzinata nel condensatore: essa può essere espressa come $Q^2/(2C)$. Un induttore percorso da corrente stazionaria, come nelle condizioni iniziali che abbiamo supposto, è anch'esso in grado di immagazzinare dell'energia, stavolta di "tipo" magnetico, la cui espressione è $(L/2)I^2$. La possibilità di avere due "tipologie" di energia non dovrebbe stupirvi troppo: anche in un oscillatore meccanico l'energia complessiva è fatta di due componenti (potenziale e cinetica, per intenderci).

Se mettiamo dei valori numerici per le grandezze che entrano nelle definizioni di energia, possiamo facilmente verificare che il termine associato al passaggio di corrente nell'induttore è tutt'altro che trascurabile. Questo può spiegare qualitativamente come sia possibile avere, nelle previsioni, valori tanto alti dell'ampiezza di segnale. Tra l'altro, questo argomento è lo stesso che si impiega per interpretare un fenomeno molto noto in elettrotecnica, quello delle *sovratensioni di apertura*, che possono condurre alla formazione di scariche elettriche quando la corrente che circola in un induttore viene bruscamente interrotta, ad esempio interrompendo dei circuiti. Analogamente all'atto dell'accensione si può provocare una *sovracorrente di chiusura*, cioè "allo spunto" la richiesta di corrente può essere molto più alta che in condizioni di regime.

Allora, tenendo conto che inizialmente c'è energia accumulata anche nell'induttore, dobbiamo individuare un meccanismo fisico che la renda disponibile all'oscillatore quando l'oscillazione ha inizio. Con la scelta delle condizioni iniziali della Sez. IIB, questo meccanismo è rappresentato dalla continuità della corrente I_0 attraverso il breve transitorio in cui il diodo passa da conduzione a interdizione. Se vogliamo che questa corrente rimanga inalterata nel transitorio, dobbiamo supporre che la carica elettrica abbandoni l'armatura del condensatore. Nella realtà è probabile che questo avvenga con un certo tempo caratteristico, che però, con le condizioni iniziali che abbiamo imposto, non può essere determinato. Dunque il segnale $V_C(t)$, che è rappresentativo della carica accumulata sul condensatore (sull'armatura "superiore" del condensatore, per essere precisi), parte da zero e punta verso valori negativi, come dettato dal parametro di fase, $\phi \simeq \pi/2$.

D. Clipping

L'esperienza pratica *non* mostra certamente d.d.p. così elevate. Tipicamente quello che si osserva è un segnale che parte sempre da valori negativi della d.d.p.,

ma che può essere descritto come una sorta di esponenziale (crescente col tempo) raccordato all'oscillazione smorzata. L'esponenziale ha una durata tipica di alcuni millisecondi, cioè simile a uno, o alcuni, pseudo-periodi.

È interessante notare che questo tratto iniziale ha caratteristiche che dipendono dall'ampiezza dell'onda quadra (asimmetrica) prodotta dal generatore. Per esempio, se l'ampiezza è piccola (dell'ordine del Volt, o anche minore), la durata del tratto di raccordo si riduce fino a praticamente scomparire. In queste condizioni l'energia immagazzinata nell'induttore è ovviamente più bassa, per cui gli effetti della “sovra-tensione” sono meno evidenti. In ogni caso, comunque, un'analisi attenta delle ampiezze dei segnali indica che l'oscillazione parte da valori leggermente più bassi dell'ampiezza minima dell'onda quadra.

Torniamo però a supporre che l'onda quadra (asimmetrica) prodotta dal generatore abbia un'ampiezza $V_0 = 5$ V e assumiamo le condizioni iniziali di Sez. IIB. Quando l'onda quadra è al suo stato “basso”, il punto A del diodo si trova al potenziale $-V_0$ rispetto a massa. In queste condizioni l'oscillazione dovrebbe essere già partita e in un tempo molto breve (vedi Fig. 2, pannello in basso) il punto K, collegato all'armatura superiore del condensatore, verrebbe a trovarsi a un potenziale più negativo rispetto al punto A. Quando questo si verifica, il diodo entra di nuovo in conduzione. Più precisamente, come vedremo studiando nel dettaglio il funzionamento del diodo, questo ha luogo quando la d.d.p. tra il punto A e il punto K è maggiore di un certo valore di soglia, $V_{thr} \approx 0.5$ V.

Quando il diodo va in conduzione, esso oppone una resistenza virtualmente trascurabile al passaggio della corrente. In altre parole c'è della corrente che può fluire dal circuito al generatore, e di qui andare a massa passando attraverso la resistenza interna del generatore ($r_G = 50$ ohm). In queste condizioni il circuito *non* è più quello di Fig. 1: infatti dobbiamo ammettere che r_G si trovi in parallelo al condensatore C , cioè che il condensatore non faccia più alcun effetto. Così l'oscillazione *non* può avere luogo: nell'analogo meccanico, è come se scomparisse la molla.

In una descrizione molto grossolana, possiamo supporre che in questa fase la corrente “prodotta dall'induttore” “si scarichi” attraverso la serie $r+r_G$, con un tempo caratteristico dell'ordine di $2L/(r+r_G) \approx 2$ ms. Questo processo di scarica si arresta quando il diodo passa di nuovo in interdizione, cioè quando il punto K torna a un potenziale meno negativo del punto A, ovvero, più precisamente, quando la d.d.p. tra il punto A e il punto K è minore di V_{thr} . Questa condizione implica $-(V_C + V_0) < V_{thr}$. Da qui in avanti, $V_C(t)$ non scenderà mai verso valori più negativi, per cui l'oscillazione avrà luogo indisturbata e potrà essere osservata all'oscilloscopio.

La Fig. 3 mostra una ricostruzione del segnale $V_C(t)$ ottenuta imponendo (artificiosamente) quanto descritto sopra. Si vede che il segnale ha una rapida discesa verso valori negativi (non visibile sulla scala della rappresen-

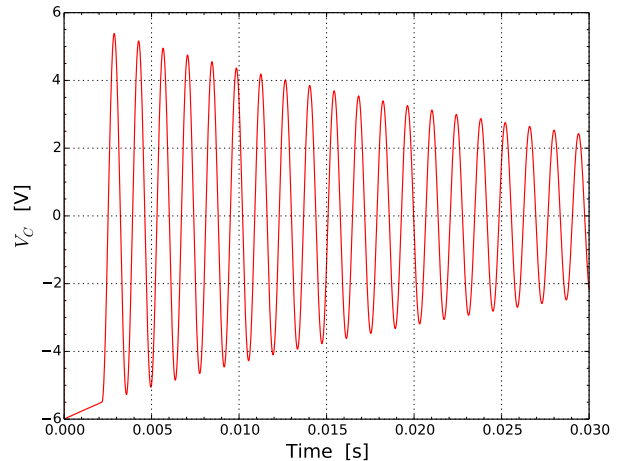


Figura 3. Segnale $V_C(t)$ ricostruito sulla base di quanto descritto nel testo. Grafico realizzato ovviamente con Python.

tazione), seguita da una crescita che ha un andamento pressoché esponenziale (è un tratto di esponenziale, dunque simile a una crescita lineare) che poi si raccorda con l'oscillazione smorzata.

Pur con numerosi punti critici, questa descrizione, da considerarsi tentativa, potrebbe almeno in parte spiegare l'andamento temporale osservato nell'esperienza, come suggerito inizialmente da qualcuno di voi (thanks Olmo & Nicolò). Nella sostanza, l'oscillazione di $V_C(t)$ viene *tosata* (il processo si dice *clipping*) in ampiezza, in modo che essa non superi mai, in valore assoluto, un certo livello. Questo si verifica grazie, o a causa, della presenza del diodo.

III. ESPERIMENTO E MISURE

Oltre alla questione relativa alle condizioni iniziali, ci sono diversi punti di interesse, tutt'altro che scontati, nell'esecuzione e nell'analisi delle misure eseguite sull'oscillatore rLC qui considerato. Ne facciamo una breve rassegna.

A. Misura dello pseudo-periodo e del tempo di smorzamento

La misura dello pseudo-periodo T è, in linea di principio, banale. Lo pseudo-periodo è infatti l'intervallo di tempo compreso tra due “punti omologhi” del segnale osservato all'oscilloscopio, per esempio tra due picchi (dello stesso segno, naturalmente ci sono picchi rivolti verso l'alto e verso il basso). Ovviamente lo pseudo-periodo *non* può essere dedotto dalla misura dei frequenzimetri che avete a disposizione (quello del generatore di forme d'onda e quello dell'oscilloscopio), che nell'esperimento segneranno presumibilmente la frequenza dell'onda quadra

prodotta dal generatore, che non ha nulla a che fare con lo pseudo-periodo.

Per la sua misura è infatti indispensabile analizzare la forma d'onda visualizzata dall'oscilloscopio. Per esempio, detto $\Delta t_{n',n}$ l'intervallo di tempo tra il picco n' e il picco n osservati sull'oscilloscopio, si ha evidentemente $T = \Delta t_{n',n}/(n' - n)$. Eseguire la misura in questo modo ha l'ovvio vantaggio di diminuire l'incertezza assoluta.

La determinazione del *tempo caratteristico di smorzamento*, cioè del τ che compare nella soluzione dell'oscillatore armonico, richiede anche qualche precauzione. Per definizione, τ è il tempo necessario affinché l'ampiezza dell'oscillazione passi dal suo valore massimo V_{max} al valore $V_{max}/e \approx V_{max}/2.78$. In alternativa, come è facilissimo dimostrare, si ha $\tau = \Delta t_{10-90}/\ln(9)$, con Δt_{10-90} intervallo temporale tra l'istante in cui l'ampiezza vale il 10% di V_{max} e quello in cui essa vale il 90% di V_{max} . Ovvero, ancora, si ha $\tau = \tau_{1/2}/\ln(2)$, dove $\tau_{1/2}$ è il *tempo di dimezzamento* dell'ampiezza, cioè l'intervallo temporale tra l'istante in cui l'ampiezza si è dimezzata e quello in cui aveva il massimo valore. Nella pratica è infatti più semplice individuare Δt_{10-90} e $\tau_{1/2}$ invece di τ (per Δt_{10-90} l'operazione è facilitata dalla presenza di linee orizzontali tratteggiate sullo schermo dell'oscilloscopio - provate a pensare come esse possono essere usate).

Tuttavia il problema sperimentale è quello di individuare gli istanti che corrispondono alle condizioni richieste. Infatti in ogni caso il segnale è oscillatorio, come rappresentato in Fig. 2, per cui non è affatto detto che ci siano istanti in cui l'ampiezza del segnale passa proprio per i valori richiesti (10%, 90%, metà del massimo,...). Un modo elegante ed efficace per risolvere il problema sarebbe quello di eseguire un best-fit di $V_C(t)$, che però non possiamo "esportare" su un computer, non avendo dispositivi di digitalizzazione (a mano bisognerebbe registrare tantissimi punti!).

Può però venirci in aiuto il modello che abbiamo sviluppato. Prendiamo in considerazione due picchi successivi, che indicheremo, come prima, con i pedici n e n' , e chiamiamo V_n e $V_{n'}$ le loro ampiezze (attenzione: sono *ampiezze* e non *ampiezze picco-picco*, dunque vanno misurate rispetto allo zero). Secondo l'Eq. 11 si ha:

$$\frac{V_{n'}}{V_n} = \exp\left(-\frac{t_n - t_{n'}}{\tau}\right) = \exp\left(-\frac{\Delta t_{n',n}}{\tau}\right), \quad (20)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che, trattandosi di picchi (dello stesso "segno"), i termini contenenti il coseno in Eq. 8 hanno lo stesso valore e dunque si semplificano. Ora, dato che $\Delta t_{n',n} = (n' - n)T$, con T pseudo-periodo, si ottiene facilmente

$$\tau = \frac{n' - n}{\ln(V_n/V_{n'})} T, \quad (21)$$

cioè τ può essere determinato, in genere con sufficiente accuratezza (l'incertezza si trova propagando gli errori), dalla misura dell'ampiezza dei picchi e dalla conoscenza dello pseudo-periodo.

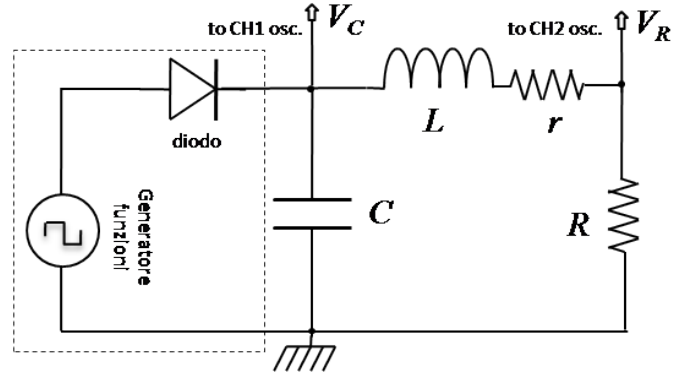


Figura 4. Circuito dell'oscillatore smorzato con indicati i segnali V_C e V_R da inviare ai due canali dell'oscilloscopio.

B. Misura a due canali

L'esperienza pratica, nella sua ultima parte, prevede di impiegare i due canali dell'oscilloscopio realizzando il circuito di Fig. 4. In buona sostanza, al CH1 viene inviato il segnale V_C , mentre al CH2 un segnale che chiameremo V_R , ottenuto ai capi di una resistenza R esterna (si consiglia di usare $R = 47$ ohm).

Come già affermato, V_C è istante per istante proporzionale alla carica Q che si trova sull'armatura "superiore" del condensatore. Si ha poi $V_R = RI = R(-dQ/dt)$, cioè $V_R \propto dV_C/dt$. La presenza dell'operatore derivata fa pensare che possa verificarsi uno sfasamento fra i due segnali. Questo è evidente dalla Fig. 5(a), in cui sono graficati in funzione del tempo i segnali previsti da Eq. 11 (linea blu) e Eq. 12 (linea rossa), quest'ultimo moltiplicato per un opportuno fattore di scala scelto per agevolare la visibilità. Per realizzare i grafici sono state usate le condizioni di cui alla Sez. IID. È facile rendersi conto che lo sfasamento tra i due segnali è attorno a $\pi/2$. Questo è in accordo con l'espressione di $I(t)$ data in Eq. 12, visto che, nelle condizioni del nostro oscillatore ($\omega \simeq \omega_0 \gg 1/\tau$) il termine che va come $\sin(\omega t + \phi)$ prevale sull'altro. Di conseguenza, $V_C(t)$ [proporzionale a $Q(t)$, dunque a $\cos(\omega t + \phi)$] e $V_R(t)$ [proporzionale come appena affermato a $I(t)$, e dunque a $\sin(\omega t + \phi)$], sono sfasati tra loro di $\pi/2$.

La presenza dello sfasamento e, più in generale, dello specifico andamento temporale ottenuto possono essere messe bene in evidenza utilizzando l'oscilloscopio in modalità Y-X (o X-Y che dir si voglia). Quello che si osserva in questa modalità è una sorta di spirale, come mostrato in Fig. 5(b), che tiene conto sia dello sfasamento (costante durante l'evoluzione temporale) che della riduzione delle ampiezze dovuta allo smorzamento.

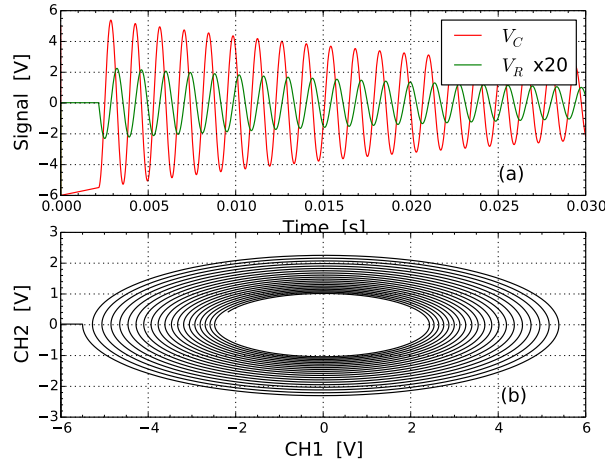


Figura 5. Grafici rappresentativi dei segnali $V_C(t)$ e $V_R(t)$ attesi nell'esperienza di Fig. 4 mostrati in funzione del tempo (a) e simulando la modalità Y-X dell'oscilloscopio (b). Grafici realizzati ovviamente con Python.

C. Resistenza interna dell'induttore

Un ulteriore aspetto molto interessante dell'esperienza ha a che fare con la resistenza interna r dell'induttore. Nell'esperienza si eseguono misure dello pseudo-periodo T e del tempo di smorzamento τ per diversi valori di C , cioè per diverse “condizioni di funzionamento” dell'oscillatore, ovvero diverse frequenze angolari ω . Si verifica che T varia con C secondo il modello sviluppato in Sez. I. Questo modello prevede anche $\tau = 2L/R$, *indipendente* da C , mentre invece sperimentalmente si osserva che, al diminuire di C , τ tende ad aumentare. Poiché il fatto che T dipenda da C come da modello implica che L non dipenda dalle condizioni di funzionamento, occorre ipotizzare un meccanismo per il quale il valore di r venga invece a dipendere da queste condizioni. Come descritto in questa sezione, si possono individuare diversi fenomeni, tutti con la stessa origine fisica e convoluti fra loro, che permettono di individuare una dipendenza di r dalla frequenza $\omega \simeq \omega_0$ dell'oscillatore, e quindi, in definitiva, dal valore di C .

Partiamo notando che la determinazione di r può essere fatta con il multimetro digitale, dunque in condizioni di *corrente continua*, come si fa con qualsiasi altro resistore. La resistenza interna dell'induttore, essendo data dalla resistività del (lungo) filo di rame che la costituisce, *dovrebbe* dipendere solo dalla costruzione (materiale, forma, dimensioni), così come normalmente si afferma per la resistenza di un qualsiasi componente ohmico. Invece la misura della resistenza di un lungo avvolgimento che può operare anche in condizioni alternate è una tipica situazione in cui tale affermazione non è valida.

Ci sono diversi semplici motivi per supportare questa ipotesi. In primo luogo, all'interno di un qualsiasi filo elettrico percorso da corrente si forma un campo magne-

tico. I portatori di carica (gli elettroni), che sono sostanzialmente delle particelle cariche in moto prevalente lungo l'asse del filo, risentono della forza di Lorentz, che ha sicuramente anche componenti radiali rispetto al filo. Queste componenti radiali spingono i portatori di carica verso la periferia del filo stesso. Di conseguenza, essi non riempiono più in modo omogeneo la sezione del filo, ovvero, se preferite, la densità di corrente non è più distribuita uniformemente sulla sezione del filo. Se ricordate che, in condizioni di simmetria piana (quella che si applica per un filo cilindrico percorso da corrente omogenea), la resistenza dipende inversamente dalla sezione, l'effetto è quello di aumentare la resistenza effettiva.

Questo fenomeno, che ha molto a che vedere con l'*effetto Hall*, ha conseguenze generalmente poco rilevanti in corrente continua, a meno che le intensità di corrente, e quindi i campi magnetici interni al filo, siano molto elevati. In condizioni alternate, però, la legge di Faraday stabilisce che si formino delle correnti indotte dalla *variazione* nel tempo del flusso di campo magnetico. All'aumentare della frequenza queste correnti, che circolano sulla superficie del filo, possono diventare rilevanti e produrre una d.d.p. che tende a opporsi a quella che fa fluire i portatori di carica nel filo. Di nuovo, l'effetto risultante è quello di ridurre la corrente effettivamente portata dal filo, ovvero, se preferite, di aumentarne la resistenza effettiva. Questo effetto (qualche volta si parla qui di *effetto pelle*) dipende dalla frequenza e quindi determina una dipendenza della resistenza dalla frequenza di lavoro del circuito.

Notate, en passant, che il motivo per cui i fili elettrici normalmente impiegati (anche per trasportare correnti alternate) sono realizzati con una trecciolina (*trefole*) di sottili fili di rame ha a che vedere proprio con il desiderio di limitare le conseguenze dell'effetto pelle. Infatti questo effetto implica che la corrente tenda a fluire sulla superficie del conduttore, e non nella sua anima, per uno spessore di profondità che diminuisce all'aumentare della frequenza. Impiegando fili sottili, in cui l'anima ha una sezione comunque ridotta, si limitano le variazioni di resistenza effettiva al variare delle frequenza.

C'è poi un ulteriore aspetto da considerare quando, come in questa esperienza pratica, si usano degli *avvolgimenti* di filo conduttore. Questo ulteriore aspetto è probabilmente il principale responsabile per l'aumento di r con la frequenza del nostro oscillatore. Infatti è evidente che gli avvolgimenti creano dei campi magnetici anche piuttosto intensi. Per esempio, nell'ipotesi di solenoidi di lunghezza infinita, gli avvolgimenti più esterni generano dei campi magnetici assiali che insistono nella regione in cui si trovano gli avvolgimenti più interni. Questi campi magnetici generano una forza di Lorentz che avrà, di nuovo, componenti radiali, che dunque possono spingere i portatori di carica verso la periferia dei fili. Anche in questo caso l'effetto sarà quello di ridurre la sezione del filo interessata dal passaggio dei portatori di carica, ovvero di aumentare la resistenza effettiva. Poiché anche questi campi magnetici dipenderanno dalla intensità di

corrente indotta, a sua volta dipendente dalla frequenza di operazione, la resistenza effettiva aumenterà con la frequenza. Il ruolo che le correnti che scorrono su un filo giocano nel passaggio di corrente in un filo “vicino” dà luogo al cosiddetto *effetto di prossimità*.

Un ulteriore modo di rifrasedare i fenomeni di cui ci stiamo occupando chiama in causa le cosiddette *correnti parassite*, o *correnti di Foucault*, o, ancora, *eddy currents*.

Di queste avremo modo di occuparci in altre esperienze pratiche, dove scopriremo che esse dipendono dalla frequenza e sono sempre accompagnate da un effetto dissipativo. Dato che nel nostro oscillatore la dissipazione è demandata alla resistenza, non stupisce che l'incremento degli effetti dissipativi dovuti a tali correnti con la frequenza si rifletta in un aumento del valore della resistenza effettiva “vista” dal circuito.