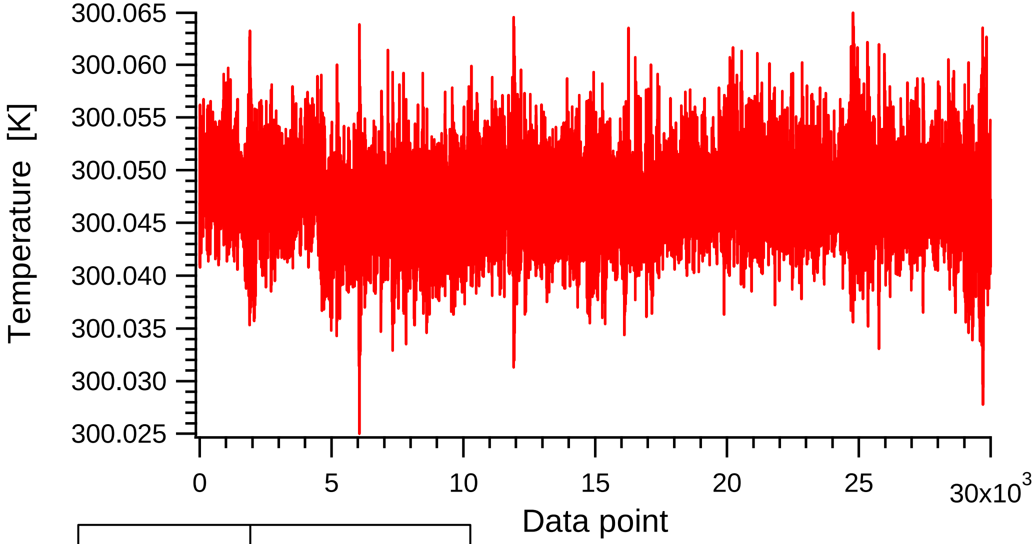
Campioni con moltissime misure



Set di dati:
N = 30000 misure di temperatura fatte a distanza di 5 s
Incertezza di ogni misura (sensibilità strumento) ± 1 mK

Si suppone che la grandezza misurata rimanga costante nel tempo (non del tutto giustificato…)

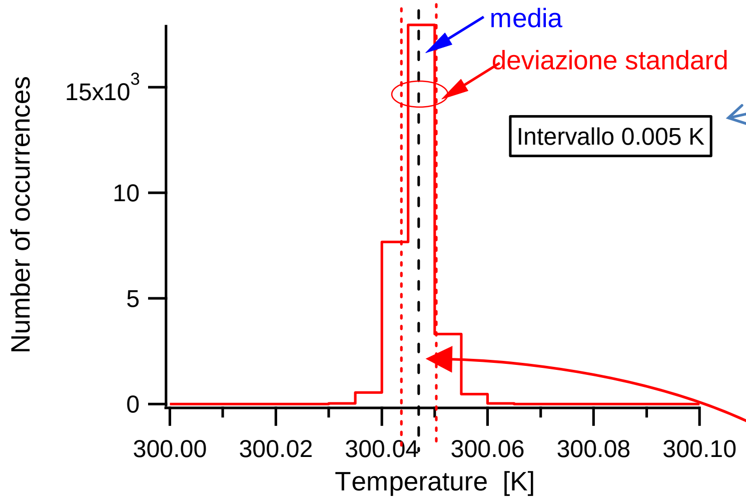
Point	dati
0	300.054
1	300.042
2	300.051
3	300.045
4	300.043
5	300.041
6	300.047
7	300.045
8	300.048
9	300.045
10	300.041
11	300.044
12	300.046
13	300.043
14	300.048
15	300.046
16	300.047
17	300.052
18	300.056
19	300.044

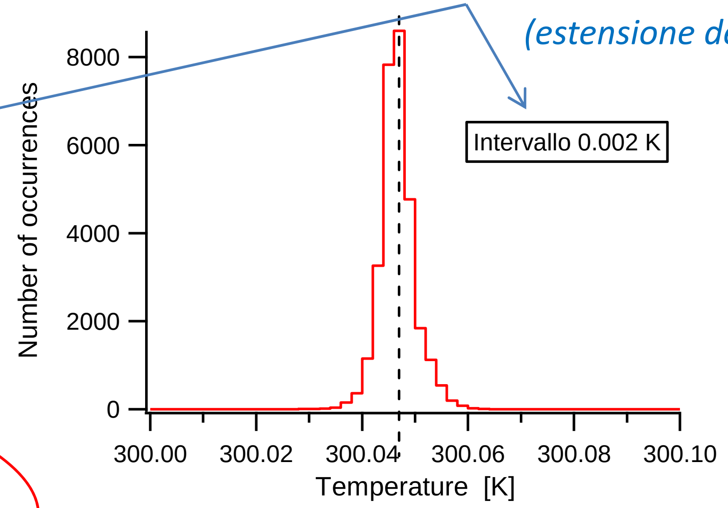
Risultato della misura: **media**

$$\mu_{exp} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = 300.047\,\mathrm{K}$$

Deviazione standard ed errore sulla media

Diversi valori dell'intervallo (estensione del bin) Δ_k





Incertezza da attribuire alla misura del campione:

Deviazione standard

La deviazione standard è legata alla "larghezza della campana" dell'istogramma

$$\sigma_{\exp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N}} = 0.0033\,\mathrm{K}$$

Incertezza da attribuire al valore medio:

Deviazione standard della media

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\exp}}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = 1.9\times10^{-5}\,\mathrm{K}$$

Risultato della misura complessiva:

***T* = (300.0470±0.0033) K**

Valore trascurabile, dato l'elevato numero di misure

Ricorrenze, frazioni e frequenze

n_k : numero di volte in cui si trova un valore x_k

$$\mu_{\exp} = \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{N'} n_k x_k}{N}$$

$$\boxed{F_k = \frac{n_k}{N} : \text{frazione delle misure } N \text{ che danno il valore } x_k}$$

$$\sum_{k=1}^{N'} n_k = N \text{ (il numero totale di misure è assegnato)}$$

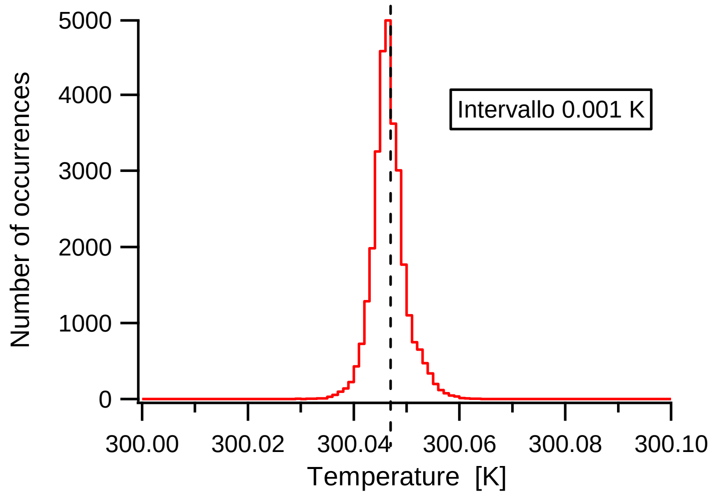
$$\boxed{\mu_{\exp} = \bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{N'} n_k x_k}{N} = \sum_{k=1}^{N'} F_k x_k}$$

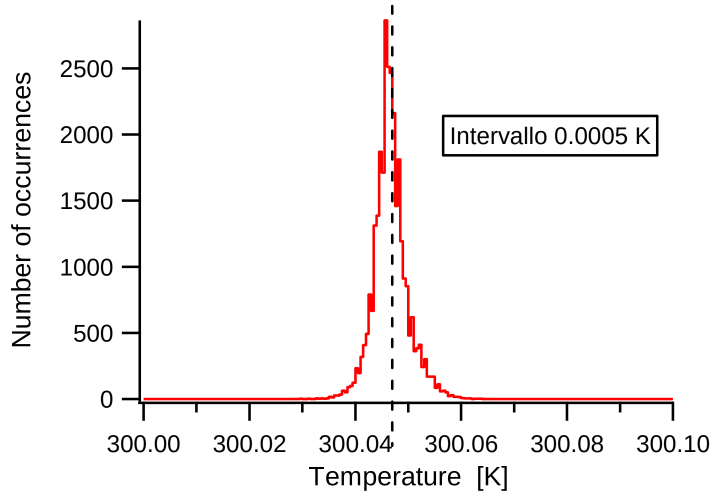
$$\sum_{k=1}^{N'} F_k = 1 \text{ (frazione "normalizzata" a uno)}$$

Usando la "frazione delle ricorrenze" F_k, detta anche frequenza (normalizzata a uno), ci si "svincola" dal numero totale di misure N
La frazione può assumere valore tra zero e uno

Point	dati
0	300.054
1	300.042
2	300.051
3	300.045
4	300.043
5	300.041
6	300.047
7	300.045
8	300.048
9	300.045
10	300.041
11	300.044
12	300.046
13	300.043
14	300.048
15	300.046
16	300.047
17	300.052
18	300.056
19	300.044

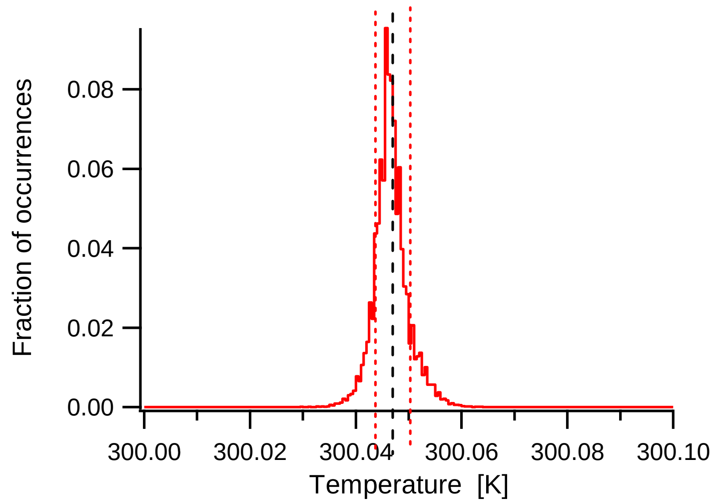
Discreto e continuo





Riducendo l'ampiezza dell'intervallo di campionamento, l'istogramma tende a una linea continua, ovvero una **funzione** di *x*

Inoltre è possibile **normalizzare** (a uno) l'istogramma in modo da ottenere che l'area sottesa valga uno (numero puro!)



Frequenza e probabilità

$$F_k = f_k \Delta_k : \text{frazione di misure nell'intervallo k - esimo}$$

discreto

$$f(x)dx : \text{frazione di misure nell'intervallo (infinitesimo) } x, x + dx$$

continuo

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx : \text{frazione di misure nell'intervallo } x_1, x_2$$

$$\text{normalizzazione}: \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Ovvero: **probabilità che il risultato della misura sia tra** x_1 e x_2

La *f(x)* rappresenta la "densità di probabilità della distribuzione limite" quando il numero di misure diventa così grande da poter trascurare il carattere discreto della misura e ottenere risultati distribuiti secondo una "campana"

Distribuzione “normale”

$$\mu_{\exp} = \bar{x} = \sum_k x_k F_k \to\to\to \mu = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$ *Media nel caso continuo*

$$\sigma_{\exp}{}^2 = \sum_k (x_k - \mu_{\exp})^2 F_k \to\to\to \int_{-\infty}^{+\infty} (x_k - \mu)^2 f(x) dx$$ *Varianza nel caso continuo*

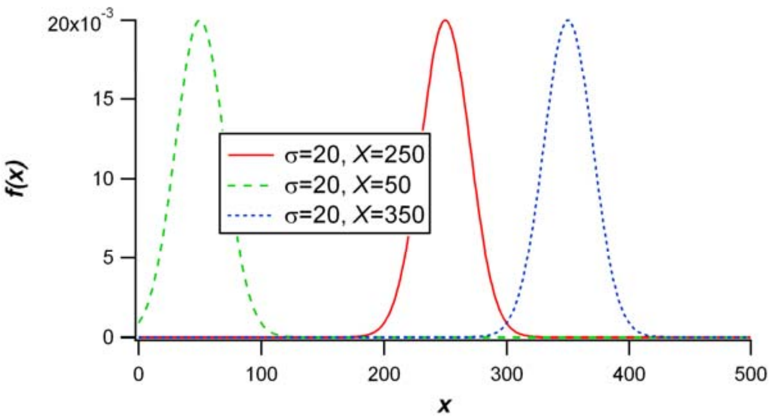
Funzione **Gaussiana**:

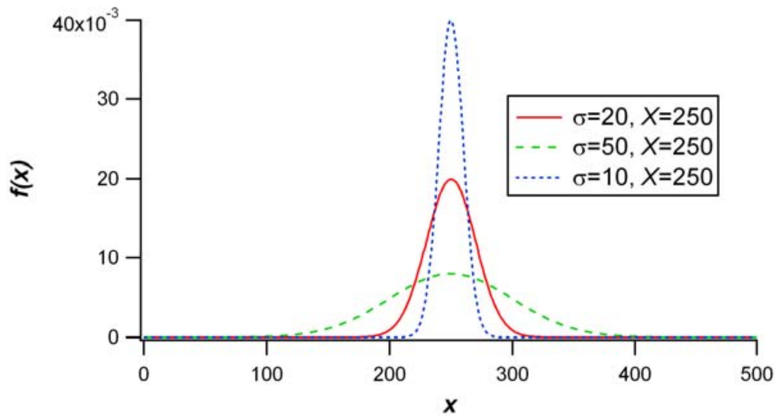
$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ : posizione mediana
σ ~ larghezza campana

Nota: la larghezza fwhm (full width at half maximum) vale:

$$fwhm = 2\sigma\sqrt{2\ln(2)} \approx 2 \times 1.2\sigma$$

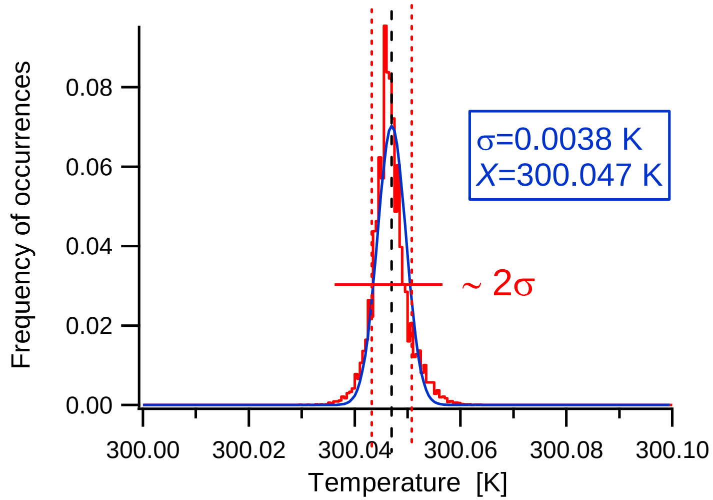




Distribuzione normale (o Gaussiana)

Per campioni di tantissime misure affette da errore casuale si ha:

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma^2 &= \sigma_{\exp}^{\ 2} \\ \mu &= \mu_{\exp}\end{aligned}}$$



Probabilità di trovare misura (del campione) compresa tra *(μ-σ)* e *(μ+σ)*:

$$P = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0.68$$

$$[\text{con } z = \frac{x-\mu}{\sigma}]$$

Il 68% delle misure del campione si discosta dal valore medio μ per meno di σ
Il 96% delle misure del campione si discosta dal valore medio μ per meno di 2σ