

Probabilità e cenni di statistica

Definizione di probabilità

- **Prima definizione** di **probabilità** di un evento E , indicata con $P(E)$: rapporto dei casi favorevoli a quelli possibili

$$P(E) = (\text{casi favorevoli}) / (\text{casi possibili})$$

Evidentemente $P(E) \leq 1$

Esempio 1: lancio della moneta: con quale probabilità esce testa o croce? Ci sono un caso favorevole e due possibili

$$P(E) = 1/2$$

Esempio 2: lancio di un dado : con quale probabilità esce un numero fissato per esempio il 3? Ci sono un caso favorevole e sei possibili

$$P(E) = 1/6$$

Esempio 3: lancio di due monete : con quale probabilità esce almeno una testa?

I casi possibili sono TT, TC, CT, CC, i casi favorevoli TT, TC, CT

$$P(E) = 3/4$$

Critica alla definizione: appena la situazione si complica a questa definizione bisogna aggiungere la clausola: "purché siano ugualmente possibili", che non è molo logica

- **Seconda definizione:** operativa

$$P(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} (n / N)$$

dove n = numero di volte che si verifica l'evento E , N numero totale di volte che si ripete l'esperimento, n/N è la **frequenza relativa statistica** dell'evento E .

Poché $n \leq N$ si ha ancora $P(E) \leq 1$

Nota: questa definizione è buona per le applicazioni ma non per una rigorosa trattazione matematica

- **Terza definizione:** usando la teoria della misura. Chiamo $S = \{\text{insieme degli eventi } E\}$. Si considerino tanti sottoinsiemi s di S , ($s \subseteq S$) Sia $\mathcal{E}$ l'insieme dei sottoinsiemi s :

$$\mathcal{E} = \{s : s \subseteq S\}$$

Sia $P(s)$ una funzione definita in $\mathcal{E}$ che associa ad ogni insieme s un numero reale non negativo. $P(s)$ è una probabilità se valgono le seguenti proprietà

- $P(S) = 1$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathcal{E}$,
- $P(\emptyset) = 0$,

Il simbolo ' $\emptyset$ ' indica l'insieme vuoto. Si ha ancora $P \leq 1$

Funzione di distribuzione discreta

• Lanciamo due dadi e calcoliamo la somma dei risultati S : essa è funzione del lancio dei dadi ed è quindi una *variabile casuale*.

• Per ogni valore di S si può calcolare la probabilità che si ottenga proprio quel valore

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Casi favorevoli	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$P(S)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

• L'insieme dei valori $P(S)$ costituisce la *funzione di distribuzione* della variabile S

• Conoscere la funzione di distribuzione significa conoscere la *probabilità associata a ciascun valore* della variabile casuale

• Il caso considerato è quello di una *variabile casuale discreta* in un intervallo finito. Esistono casi di variabili continue su intervalli finiti o infiniti:

• Caso somma dei dadi.

Sull'asse delle ascisse c'è la variabile S , in corrispondenza ad ogni S sono tracciati segmenti verticali di lunghezza proporzionale al numero n di volte che si è ottenuta la variabile S su N lanci.

Tale rappresentazione è la *rappresentazione di frequenza*

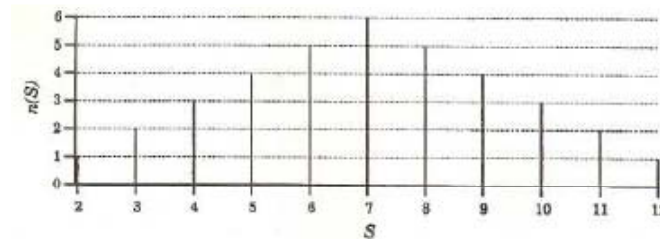
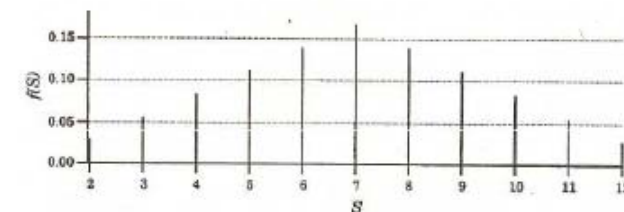


Figura 2.1: $n(S)$ è il numero di volte in cui si è ottenuto S lanciando due dadi.

• *Nota*: la somma delle ordinate è uguale a N

• Talvolta è più utile rappresentare il rapporto $n(S)/N = f(S)$

• Questa rappresentazione è la *rappresentazione di frequenza relativa* (o di probabilità se N è molto grande), utile per variabili che possono assumere valori discreti e in numero non molto grande



Istogrammi e normalizzazione

•Un altro tipo di rappresentazione è detta ad *istogramma* ed è indispensabile nel caso delle variabili continue

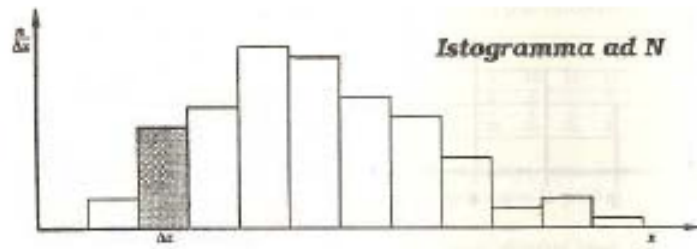


Figura 2.3: Esempio di istogramma normalizzato ad N

•Un istogramma si costruisce in questo modo:

- 1) si pone sull'asse delle ascisse la variabile x in esame
- 2) si suddividono i valori che questa variabile può assumere in intervalli di uguale ampiezza
- 3) si assume ogni intervallo come base di un rettangolo di area proporzionale al numero n di misure

Nota: se si vuole che l'area sia un numero, la grandezza riportata sulle ascisse deve essere sempre l'inverso delle dimensioni delle grandezze riportate in ordinata

•Istogrammi normalizzati a n : area uguale al numero totale N di prove effettuate

•Normalizzati ad 1: si ottengono dividendo l'altezza di ogni intervallo per N . L'area della figura che rappresenta i dati è allora uguale ad 1



Figura 2.4: Esempio di istogramma normalizzato ad uno

Distribuzioni continue

- Per il caso di una *variabile continua* la definizione non è applicabile.

- La probabilità di un valore esattamente definito è zero.

- Bisogna chiedersi qual è la probabilità che si abbia un valore in un intervallo assegnato

- Dividiamo l'intervallo in cui può variare la variabile x in intervallini Δx .

- Possiamo calcolare la probabilità che la x vada a cadere in ciascun intervallino, cioè la probabilità che la variabile x assuma un valore compreso tra $x - \Delta x$ e $x + \Delta x$.

- Sia $P(x, \Delta x)$

- Per avere una quantità indipendente dall'intervallino Δx si calcola il rapporto $P(x, \Delta x) / \Delta x$

- Considerando il limite:

$$\lim_{(\Delta x \rightarrow 0)} P(x, \Delta x) / \Delta x$$

Si ottiene la *densità di probabilità* $f(x)$ che è per definizione la distribuzione della variabile casuale x

- La densità di probabilità è una funzione che non ha né le dimensioni né il significato di probabilità, ma il cui valore integrato in un certo intervallo della variabile aleatoria, fornisce la probabilità che la variabile x esca in quella zona.

$$p(a < x < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Nel caso continuo la probabilità può essere definita solo considerando un intervallo di valori della misura (o dell'evento)

Definisco $f(x)$ densità di probabilità

$f(x)dx$: probabilità di trovare valore nell'intervallo $x, x+dx$

Definizioni

Caratteristiche comuni alle distribuzioni

Sia x una variabile casuale e $P(x)$ la funzione di distribuzione associata

- **Proprietà di normalizzazione:** la somma su tutti i casi possibili della probabilità sia 1. Matematicamente:

$$\sum_{i=1}^N P(x_i) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

dove a e b , estremi di integrazione sono i valori estremi che può assumere la x , eventualmente uguali a infinito. La funzione P è la probabilità nel caso discreto e la densità di probabilità nel caso continuo

- **Media:** si definisce la media μ (o anche m) come

$$\mu = \sum_{i=1}^N x_i \cdot P(x_i), \quad \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Se le x sono equiprobabili, la media è la media aritmetica.

Infatti se $P(x_1) = P(x_2) = \dots = P(x_N)$ poichè $\sum_i P(x_i) = 1$,

si ha $P(x_i) = 1/N$ che inserita nella formula che definisce

la media, fornisce la media aritmetica $\sum x_i / N$

- **Mediana:** si definisce la mediana $\mu_{1/2}$ come quel valore tale che

$$P(x_i \leq \mu_{1/2}) = P(x_i \geq \mu_{1/2}) = 1/2 = \int_{-\infty}^{\mu_{1/2}} f(x) dx = \int_{\mu_{1/2}}^{\infty} f(x) dx$$

Nel caso discreto non è detto che tale valore esista

- **Valore più probabile:** è il valore per cui la funzione di distribuzione ha un massimo

$$\mu_{max} : P(x_i) \leq P(\mu_{max}) \forall i, \quad \mu_{max} : P(x) \leq P(\mu_{max}) \forall x \in [a \dots b].$$

Valore di aspettazione

Definizione di valore di aspettazione $E(g) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$
per $g(x) = x$

Il valor medio è il valore di aspettazione di x $E(g) = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu$

Definizione di varianza

La **varianza** è il valore di aspettazione di $(x-\mu)^2$

per $g(x) = (x - \mu)^2$

$$E(g) = E((x - \mu)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \sigma^2$$

• Proprietà dell'operatore E:

- 1) $E[\text{costante}] = \text{costante}$
- 2) $E[af] = a E[f]$, dove a è una costante
- 3) $E[f+g] = E[f] + E[g]$

Si ha : $\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2$

Dimostrazione :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E((x - \mu)^2) = E(x^2) - E(2x\mu) + E(\mu^2) = \\ &= E(x^2) - 2\mu E(x) + \mu^2 = E(x^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = \\ &= E(x^2) - \mu^2 \quad \text{c.v.d.}\end{aligned}$$

Tschebyscheff

Discussione e cenno al teorema di Tschebyscheff

- Chiariamo perchè ci interessano la media μ e la varianza σ^2 della distribuzione.
- Quando si hanno misure i cui risultati fluttuano, il *risultato della misura è una variabile casuale*, funzione delle condizioni sperimentali.
- La media della variabile casuale è il valore più significativo del risultato.
La deviazione standard misura l'incertezza da attribuire al risultato
- Lo dimostra il *teorema di Tschebyscheff*:
Sia x una variabile casuale tale che esistono finiti μ e σ .
Detto k un numero positivo si ha:

$$P(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

- Cioè: *e' poco probabile avere grandi deviazioni dalla media*

Discussione e cenno al teorema di Tschebyscheff (2)

- Dimostrazione:
se nella definizione di σ^2 :

$$\sigma^2 = \int_a^b P(x)(x - \mu)^2 dx$$

mettiamo al posto di $(x - \mu)^2$
0 se $(x - \mu)^2 \leq k^2 \sigma^2$
 $k^2 \sigma^2$ negli altri casi

si ottiene

$$\sigma^2 \geq k^2 \sigma^2 \int_{|x-\mu| \geq k\sigma} P(x) dx = k^2 \sigma^2 \cdot P(|x - \mu| \geq k\sigma)$$

che è esattamente la relazione

$$P(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

Conseguenze di Tschebyscheff

Cenno alla teoria dei campioni

- L'insieme delle misure sperimentali (che è una piccola parte di tutte le misure effettuabili) è un *campione* di tutte le possibili misure
- *Si postula l'esistenza* di una distribuzione dei risultati di tutte le misure effettuabili: questa viene chiamata *distribuzione generatrice (parent distribution)*
- Dal campione dobbiamo approssimare la media μ e la varianza σ^2 della distribuzione generatrice

*Nelle misure di grandezze fisiche (con errore casuale):
media, varianza, etc, ricavate dal campione
approssimano (con la propria incertezza!) le
grandezze "vere" della misura, cioè queste
grandezze sono buoni **estimatori** della parent
distribution*

In soldoni:

- immagino che ogni variabile aleatoria (casuale) sia distribuita secondo una certa distribuzione di probabilità (o densità di probabilità nel caso continuo), che si chiama *parent distribution*
- per ricostruire la parent distribution avrei bisogno di infinite prove (o misure) sull'evento casuale
- un numero finito (ma grande!) di prove fornisce un campione che è rappresentativo della parent distribution
- postulo che valore medio, varianza, etc. della distribuzione del campione approssimino quelle della parent distribution (tanto meglio quanto più grande è il campione)

Distribuzione binomiale

Distribuzione binomiale

Parecchi problemi riguardano prove ripetute ed indipendenti di un processo per cui l'esito di ogni singola prova è dicotomico:

- Si o no
- Testa o croce
- Colpito o mancato
- Ecc
- In generale : successo o fallimento

Esempio : - lancio della moneta n volte

- numero di bambini nati da un gruppo di n madri in attesa
- numero di colpi centrati dopo aver tirato n palle a un bersaglio fisso

Si vuol conoscere la probabilità di k successi (o fallimenti) in n prove , indipendentemente dall'ordine con cui capitano.

- Assumendo che per ogni evento E la probabilità di un successo sia p e di un insuccesso sia $1-p = q$ e che non cambino tra un tentativo e l'altro, tale probabilità è descritta dalla *distribuzione binomiale*

$$B(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$
$$\text{con : } \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

1

- Infatti, supponiamo che l'evento E sia il risultato del lancio di una moneta. I modi in cui può accadere sono : testa o croce

- Sia $P(T) = p$ e $P(C) = q$

- La probabilità che in n lanci i primi k diano T e gli altri $n-k$ diano C è

$$p^k q^{n-k}$$

- Questa è solo una possibile sequenza per la realizzazione di k volte T e $n-k$ volte C .

- Tutti possibili modi sono le combinazioni di n elementi prese a k a k .

Il calcolo combinatorio ci fornisce la formula seguente:

$$B(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k q^{n-k}$$

-Nota: questo è un termine dello sviluppo di un binomio elevato alla potenza n :

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

dove $\binom{n}{k}$ = combinazioni di n elementi a k a k = $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
con $k!$ si intende $k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, per definizione si ha $0! = 1! = 1$.

Esempio di binomiale

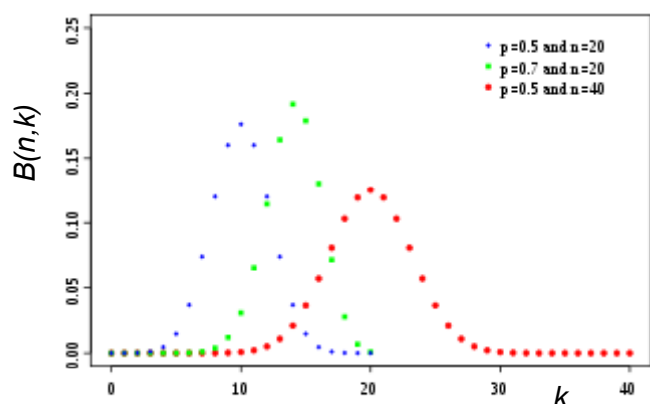
La binomiale descrive bene lancio di dadi, testa o croce, successo/insuccesso, etc., quando le probabilità sono non trascurabili

nellabinomialil valore atteso (media) $\mu = np$

Proprietà della **distribuzione binomiale**

• Si dimostra (vedi appendice) che la varianza

$$\sigma^2 = E[(k - \mu)^2] = E[k^2] - \mu^2 = npq$$



Esempio: Sia E il lancio di un dado.

Sia $n=4$ il numero di volte che si lancia il dado.

-La probabilità che un numero, per esempio il 5, esca 0,1,2,3,4, volte è data dalla distribuzione binomiale con

$n=4$ e $k=0,1,2,3,4$ rispettivamente

Calcolo esplicito di $B(4, k)$ per ogni valore di k

$$B(4, 0) = \binom{4}{0} \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{6^4},$$

$$B(4, 1) = \binom{4}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 4 \frac{5^3}{6^4} = \frac{500}{6^4},$$

$$B(4, 2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5^2}{2 \cdot 6^4} = \frac{150}{6^4},$$

$$B(4, 3) = \binom{4}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 6^4} = \frac{20}{6^4},$$

$$B(4, 4) = \binom{4}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4},$$

$$\mu = np = 4 \cdot \frac{1}{6} \approx 0.667,$$

$$\sigma = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 0.7.$$

Distribuzione di Poisson

Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson si presenta come forma limite della distribuzione binomiale quando il numero medio dei successi è molto più piccolo del numero degli eventi possibili. Vediamo.

Esempio : variabile casuale : numero di studenti che si immatricolano ogni anno a chimica.

-Supponiamo di avere sul monitor del computer un elenco di tutti gli immatricolati a 'scienze MFN' e di scorrerlo alla ricerca degli immatricolati a chimica.

-Ogni studente dell'elenco (N=1000, buona stima degli immatricolati) rappresenta un tentativo : si ha un successo quando lo studente è di chimica.

-La probabilità a priori di un successo per ogni singola prova può essere valutata dal rapporto:

Nro medio studenti che ogni anno si iscrivono a chimica / nro totale degli studenti immatricolati a scienze

Si può stimare che tale frazione valga $p = 35/1000$.

-Si parte dalla binomiale con l'ipotesi $p \ll 1$, $n \gg 1$, $n \gg k$

$$B(n, k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k q^{n-k}$$

-Con l'ipotesi $p \ll 1$, $n \gg 1$, $n \gg k$ il rapporto di fattoriali diventa:

$$\frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1}{k!} n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) \approx \frac{n^k}{k!}$$

Ricordando che $\mu = np$ e quindi che $\mu^k = (np)^k$ si ha

$$P(k, n) = \frac{\mu^k}{k!} (1-p)^{n-k}$$

L'ultimo termine può essere riscritto, con l'uso del teorema binomiale come

$$(1-p)^{n-k} = (1-p)^n (1-p)^{-k} \approx (1-p)^n (1+pk)$$

Poiché $n = \mu/p$

$$(1-p)^{n-k} = [(1-p)^{1/p}]^{\mu} (1+pk)$$

Passando al limite per $p \rightarrow 0$

$$(1-p)^{n-k} = e^{-\mu}$$

$$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

con $\mu = npq \rightarrow np$

(dato che $q = 1 - p \rightarrow 1$ per $p \ll 1$)

Proprietà Poisson

Proprietà della distribuzione poissoniana

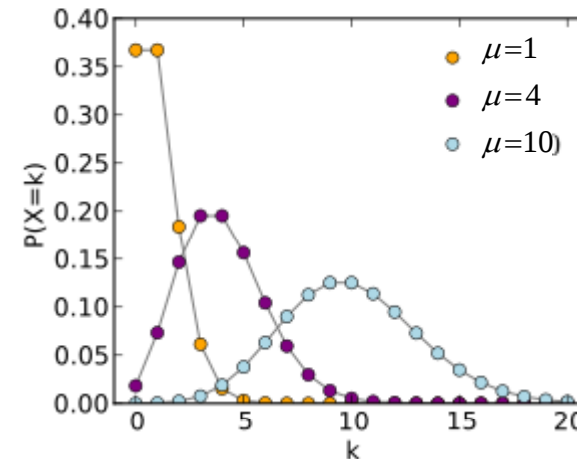
• calcolo della varianza

$$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E[(k - \mu)^2] = E[k^2] - \mu^2, \\ E[k^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(\mu, k) = \mu \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} \\ &= \mu \sum_{h=0}^{\infty} (h+1) \frac{\mu^h}{h!} e^{-\mu} \\ &= \mu [\sum h \cdot P(\mu, h) + \sum P(\mu, h)] \\ &= \mu(\mu + 1) = \mu^2 + \mu.\end{aligned}$$

Quindi $\sigma^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$.

$$\mu = a, \quad \sigma^2 = \mu = a, \quad \sigma = \sqrt{\mu}.$$



Probabilità che si verifichi l'evento $x=k$ su un totale di $n = p/\mu$ prove

La Poissoniana deriva da binomiale per $p \ll 1$, $n \gg 1$, cioè ho molti eventi con successo molto basso (distribuzione *degli eventi rari*)

La deviazione standard è pari alla **radice della media** (aumenta in modo *sublineare* con l'aumento del numero di misure, e quindi di $\mu = np$)

Funzione Gaussiana

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con σ e μ costanti di cui si chiarirà il significato.

E' continua, e rappresenta una *densità di probabilità*

E' legata alla funzione e^{-x^2} col cambiamento di variabile

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - \mu}{\sigma}$$

si vede che $G(t) = \text{Cte} \cdot e^{-t^2}$

La semilarghezza a metà altezza è:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - \mu}{\sigma} = \sqrt{\ln 2}, \quad x - \mu = \sigma \sqrt{2 \ln 2} \approx 1.2\sigma.$$

Ne segue che μ rappresenta il centro della campana

e σ dà una misura della larghezza.

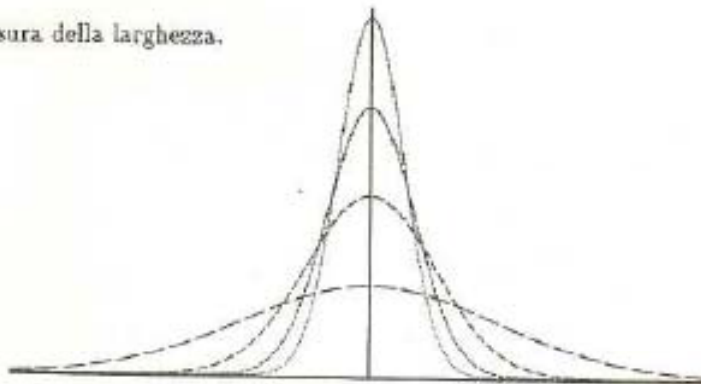


Figura 3.2: Grafici della funzione $G(x)$ per $\sigma = 1, \frac{3}{2}, 2, 4$ e $\mu = 0$.

E' *normalizzata*, come tutte le distribuzioni

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx = 1$$

Si dimostra usando il cambiamento di variabile $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - \mu}{\sigma}$ e il calcolo precedente di Γ^2

Media

$$E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot G(x) dx = \mu.$$

Si dimostra per esempio calcolando direttamente l'integrale

Nota: la costante μ è proprio la *media*

$$\text{Varianza} \quad E[(x - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 G(x) dx = \sigma^2.$$

Col cambiamento di variabile $t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x - \mu}{\sigma}$

da cui $dx = \sigma\sqrt{2} dt$, si ha.

$$\begin{aligned} E[(x - \mu)^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 G(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 2t^2 \sigma^2 \cdot \frac{e^{-t^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot 2\sigma\sqrt{2} dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(\left| -te^{-t^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Nota: la costante σ è proprio la *deviazione standard*

Distribuzione di Gauss

Distribuzione di Gauss si ottiene (formalmente):

- ✓ da binomiale, per $n \rightarrow \infty$ e p costante
- ✓ da Poisson, per μ molto grande

In pratica:

Gauss vale quando si fanno moltissime prove e la probabilità è molto bassa

La distribuzione di Gauss è continua!

Nota anche come distribuzione **normale** di variabili casuali

Rappresenta la parent distribution nel caso di misure affette da errori di origine casuale

Nota 1: la distribuzione di Gauss si ottiene formalmente come caso limite della binomiale quando $n \rightarrow \infty$ e p resta costante.

In pratica quando np e $n(1-p)$ sono ≥ 5 la gaussiana è già una buona approssimazione della binomiale.

Poiché la binomiale ha media np e deviazione standard $\sqrt{np(1-p)}$ La corrispondente gaussiana è:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot np(1-p)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - np)^2}{np(1-p)} \right]$$

Nota 2: si può dimostrare che la distribuzione di Gauss si ottiene anche come limite della poissoniana per grandi valori della media μ

In questo caso la deviazione standard vale $(\mu)^{1/2}$
Per cui la corrispondente gaussiana è:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot np(1-p)}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-np)^2}{np(1-p)}}$$

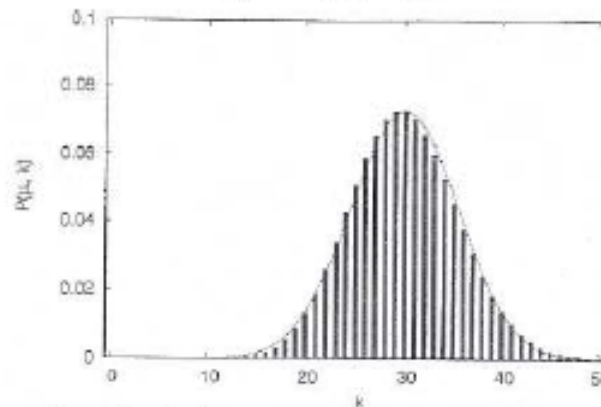


Figura 3.8: Confronto tra una Poissoniana con media $\mu = 30$ ed una Gaussiana con media $\mu = 30$ e deviazione standard $\sigma = \sqrt{30}$. Le due distribuzioni sono virtualmente indistinguibili.

Integrale della Gaussiana standard

La probabilità che la variabile x sia compresa in un generico intervallo $[0, a]$ è

$$P(0 \leq x \leq a) = \int_0^a G(x) dx.$$

Questo integrale non ha espressione analitica



Tavole dell'integrale per una variabile gaussiana z in forma standard cioè con media $\mu=0$ e deviazione standard $\sigma=1$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

e la funzione di distribuzione diventa $G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

Le tavole danno il valore dell'integrale della funzione di Gauss "standard" (con $\mu = 0$, $\sigma = 1$)

Servono per determinare la probabilità $P(0 \leq x \leq a)$

Tavola dell'integrale della funzione di Gauss

z	$\int_0^z$	z	$\int_0^z$	z	$\int_0^z$	z	$\int_0^z$	z	$\int_0^z$
0.00	0.0000	0.30	0.118	0.60	0.226	0.90	0.316	1.20	0.385
0.01	0.0004	0.31	0.122	0.61	0.229	0.91	0.319	1.21	0.387
0.02	0.0008	0.32	0.126	0.62	0.232	0.92	0.321	1.22	0.389
0.03	0.0012	0.33	0.129	0.63	0.236	0.93	0.324	1.23	0.391
0.04	0.0016	0.34	0.133	0.64	0.239	0.94	0.326	1.24	0.393
0.05	0.0020	0.35	0.137	0.65	0.242	0.95	0.329	1.25	0.394
0.06	0.0024	0.36	0.141	0.66	0.245	0.96	0.331	1.26	0.396
0.07	0.0028	0.37	0.144	0.67	0.249	0.97	0.334	1.27	0.398
0.08	0.0032	0.38	0.148	0.68	0.252	0.98	0.337	1.28	0.400
0.09	0.0036	0.39	0.152	0.69	0.255	0.99	0.339	1.29	0.402
0.10	0.0040	0.40	0.155	0.70	0.258	1.00	0.341	1.30	0.403
0.11	0.0044	0.41	0.159	0.71	0.261	1.01	0.344	1.31	0.405
0.12	0.0048	0.42	0.163	0.72	0.264	1.02	0.349	1.32	0.407
0.13	0.0052	0.43	0.166	0.73	0.267	1.03	0.349	1.33	0.408
0.14	0.0056	0.44	0.170	0.74	0.270	1.04	0.351	1.34	0.410
0.15	0.0060	0.45	0.174	0.75	0.273	1.05	0.353	1.35	0.412
0.16	0.0064	0.45	0.177	0.76	0.276	1.06	0.355	1.36	0.413
0.17	0.0068	0.47	0.181	0.77	0.279	1.07	0.358	1.37	0.415
0.18	0.0071	0.48	0.184	0.78	0.282	1.08	0.360	1.38	0.416
0.19	0.0075	0.49	0.188	0.79	0.285	1.09	0.362	1.39	0.418
0.20	0.0079	0.50	0.192	0.80	0.288	1.10	0.364	1.40	0.419
0.21	0.0083	0.51	0.195	0.81	0.291	1.11	0.366	1.41	0.421
0.22	0.0087	0.52	0.199	0.82	0.294	1.12	0.369	1.42	0.422
0.23	0.0091	0.53	0.202	0.83	0.297	1.13	0.371	1.43	0.424
0.24	0.0095	0.54	0.205	0.84	0.300	1.14	0.373	1.44	0.425
0.25	0.0099	0.55	0.209	0.85	0.302	1.15	0.375	1.45	0.427
0.26	0.103	0.56	0.212	0.86	0.305	1.16	0.377	1.46	0.428
0.27	0.106	0.57	0.216	0.87	0.308	1.17	0.379	1.47	0.429
0.28	0.110	0.58	0.219	0.88	0.311	1.18	0.381	1.48	0.431
0.29	0.114	0.59	0.222	0.89	0.313	1.19	0.383	1.49	0.432

Uso delle tavole

Tabelle

Uso delle tabelle dell'integrale della distribuzione normale standardizzata

Esistono tabelle dell'integrale della gaussiana standardizzata, espresso in genere come

$$T(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Da queste tabelle è possibile calcolare qualsiasi integrale facendo uso delle proprietà di simmetria della funzione di Gauss.

Un esempio è la tabella che vi è stata fornita a suo tempo.

Devi valutarla nel seguente modo:

Il valore di z , fino alla prima cifra decimale, è riportato nella prima colonna; la seconda cifra decimale è indicata nella prima riga delle altre colonne e, in corrispondenza di essa, è riportato il valore dell'integrale.

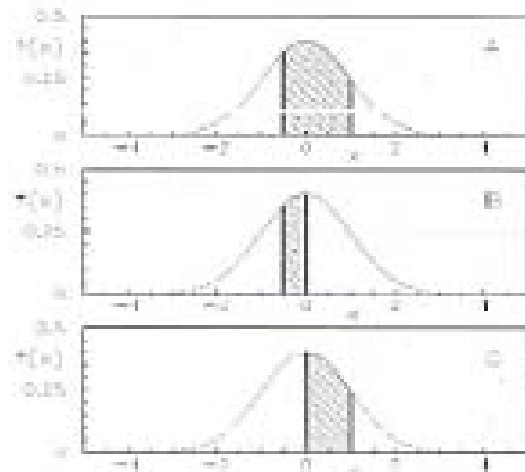


Figura 8.8. Esempi di calcolo dell'integrale della funzione normale standardizzata. L'integrale della figura A è pari alla somma di quelli di B e C, leggibili dalle tabelle.

La simmetria della distribuzione normale permette di valutare dalle tabelle l'integrale su un intervallo qualsiasi. Facciamo alcuni esempi di integrali calcolati fra

$$z_1 \text{ e } z_2, \text{ con } z_1 < z_2$$

- z_1 e z_2 positivi:

$$P(z_1 < Z < z_2) = T(z_2) - T(z_1);$$

- z_1 e z_2 negativi:

$$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = T(-z_2) - T(-z_1);$$

- z_1 negativo e z_2 positivo:

$$P(z_1 \leq Z \leq z_2) = T(z_2) + T(-z_1)$$

Alcuni esempi sono mostrati in figura 8.8. Riportiamo la soluzione numerica ottenuta dalla tabella:

$$P(-0.5 \leq Z \leq 1.0) = 0.19146 + 0.34134 = 0.53280$$

La figura sottostante illustra alcuni valori notevoli dell'integrale della gaussiana: notare che essi non dipendono dai valori di media e deviazione standard

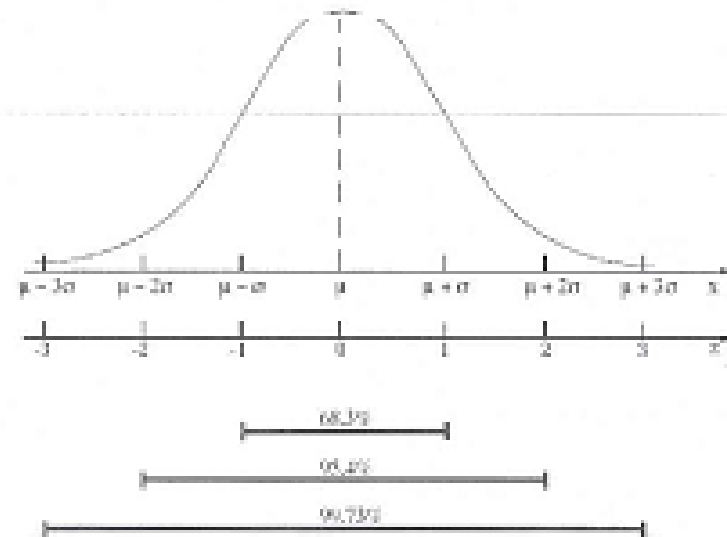


Figura 8.9. Distribuzione normale standardizzata e intervalli di probabilità.

Esempi sulla distribuzione Gaussiana

Esempio (nota1): Si calcoli la probabilità che, lanciando 10 monete, il numero t di teste sia compreso tra 3 e 6.

R: Usando la *statistica binomiale* si ha, con $n = 10$ e $p = 1/2$

$$B(t) = \binom{10}{t} \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-t}$$

$$B(3 \leq t \leq 6) = B(3) + B(4) + B(5) + B(6),$$

$$B(3) = \binom{10}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}$$

$$B(4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{105}{512}$$

$$B(5) = \binom{10}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{256}$$

$$B(6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{105}{512}$$

$$B(3 \leq t \leq 6) \approx 0.7734$$

Per usare l'*approssimazione gaussiana*, t deve essere considerata continua e non discreta. In questo schema $3 \leq t \leq 6$ diviene

$$2.5 \leq t \leq 6.5 \quad \mu = np = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{2}} \approx 1.58$$

Passando alla variabile standard gli estremi di integrazione divengono:

$$z_1 = \frac{2.5 - 5}{1.58} \approx -1.58$$

$$z_2 = \frac{6.5 - 5}{1.58} \approx 0.95$$

ed infine:

$$P(2.5 \leq k \leq 6.5) = 0.4429 + 0.3289 = 0.7718$$

Che è molto vicino al valore 0.7734 trovato prima.

Esempio (nota2): Supponiamo che in un dato campione di materiale radiattivo vi siano in media 30 decadimenti al secondo.

Qual è la probabilità che in un certo intervallo di 1 secondo il numero di decadimenti sia compreso tra 30 e 35.

R: Usando la *statistica di Poisson* la probabilità di avere k decadimenti è $P(30, k) = \frac{30^k}{k!} e^{-30}$

$$P(30, 30) = \frac{30^{30}}{30!} e^{-30} \approx 0.0734$$

$$P(30, 31) = \frac{30^{31}}{31!} e^{-30} \approx 0.0713$$

$$P(30, 32) = \frac{30^{32}}{32!} e^{-30} \approx 0.0659$$

$$P(30, 33) = \frac{30^{33}}{33!} e^{-30} \approx 0.0599$$

$$P(30, 34) = \frac{30^{34}}{34!} e^{-30} \approx 0.0529$$

$$P(30, 35) = \frac{30^{35}}{35!} e^{-30} \approx 0.0453$$

$$P(30 \leq k \leq 35) = \sum_{k=30}^{35} P(30, k) \approx 0.3745$$

Per usare l'*approssimazione gaussiana*, analogamente all'esempio precedente $29.5 \leq k \leq 35.5$

$$\mu = 30 \quad \sigma = \sqrt{\mu} \approx 5.48$$

Passando alla variabile standard gli estremi di integrazione divengono:

$$z_1 = \frac{29.5 - 30}{5.48} \approx -0.09$$

$$z_2 = \frac{35.5 - 30}{5.48} \approx 1.00$$

ed infine:

$$P(29.5 \leq k \leq 35.5) = 0.0359 + 0.5413 = 0.5772$$

L. Andreozzi

andreozi@df.unipi.it

21

Distribuzione del chi-quadro

Distribuzione del χ^2

Sia x la somma dei quadrati di n variabili gaussiane standard ($\mu = 0, \sigma = 1$) indipendenti

$$x = \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad z_i \text{ normale } (0, 1).$$

Questa quantità si chiama χ^2 ad n gradi di libertà, è definito nell'intervallo $[0, +\infty)$ e la sua funzione di distribuzione è:

$$p(n, x) = C_n x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$$

dove C_n è una costante di normalizzazione che vale:

$$C_n = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}$$

Funzione
Gamma (nota
numericamente)

Per grandi valori di n ($n \geq 30$), $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1}$ è quasi distribuito normalmente con media zero e deviazione standard uno.

Il valor medio della distribuzione del χ^2 è uguale al numero di gradi di libertà, la varianza è uguale a due volte il numero di gradi di libertà:

$$\mu = n \quad \text{e} \quad \sigma^2 = 2n$$

Anche per la distribuzione del χ^2 si trovano delle tavole che danno sia i valori della densità $p(n, x)$ sia i valori della probabilità

$$\mathcal{P}(n, x) = \int_0^x p(n, \xi) d\xi.$$

Definizione χ^2 a n gradi di libertà :

$$\chi^2 = x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \text{con } x_i \text{ variabili Gaussiane standard}$$

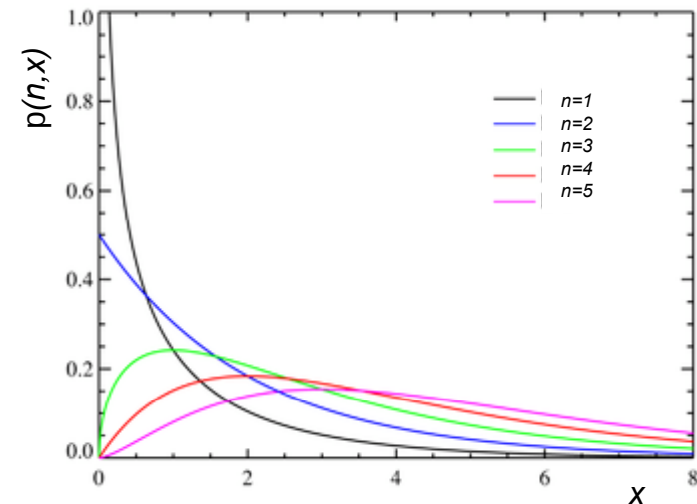


Tavola del chi-quadro

stono delle tabelle che dicono

l'è il valore χ^2 di S tale che la
L'integrale
probabilità s

$$p(n, S) = \int_0^S C_n x^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

si trova calcolato numericamente in tabelle

Comunemente le tabelle del chi-quadro danno, per un certo valore di n (gradi di libertà) e per un certo valore del χ^2 , la probabilità che si possano ottenere valori minori (o maggiori, a seconda della tabella usata!) di quello determinato

Tavola distribuzione CHI-QUADRATO

Gradi di libertà	Livello di Probabilità a									
	1.00	0.99	0.95	0.90	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1				0.02	1.32	2.71	3.84	5.02	6.64	7.88
2	0.01	0.02	0.10	0.21	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.12	0.35	0.58	4.11	6.25	7.82	9.35	11.35	12.84
4	0.21	0.30	0.71	1.06	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	1.15	1.61	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.64	2.20	7.84	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	2.17	2.83	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.73	3.49	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.74	2.09	3.33	4.17	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.94	4.87	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	4.58	5.58	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	5.23	6.30	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.89	7.04	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.08	4.66	6.57	7.79	17.12	21.06	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	7.26	8.55	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	7.96	9.31	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	8.67	10.09	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.27	7.02	9.39	10.87	21.61	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	10.12	11.65	22.78	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58

Esempio:

Supponiamo $n = 9$ e supponiamo di calcolare, sulle nostre variabili aleatorie, $\chi^2 = 4$. Sulle tabelle corrispondenti alla riga $n = 9$ si vede che $\chi^2 = 4.17$ (simile al nostro valore) corrisponde a un "livello di probabilità" (o di "confidenza") di 0.90, cioè del 90%. Significa che, ripetendo la "prova", cioè usando un altro set di variabili aleatorie, nel 90% dei casi avrei un valore di χ^2 maggiore di 4.17. Dunque possiamo concludere che il χ^2 calcolato sulle nostre variabili aleatorie ha un livello di probabilità del 90%.