

# Campo magnetico sull'asse di un solenoide

fuso@df.unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 3 - FF, 4 marzo 2015)

Questa brevissima nota richiama i semplici concetti e i metodi che servono per determinare analiticamente il campo magnetico di una distribuzione di corrente che simula un avvolgimento (solenoido) finito. Si tratta di argomenti che qualsiasi studente di Fisica 2 sa maneggiare con perizia ed efficacia, ma può essere utile assai un breve ripasso. Inoltre nella parte conclusiva della nota si fa qualche riferimento all'esperienza pratica condotta in laboratorio.

## I. ESPRESSIONI ANALITICHE DEL CAMPO MAGNETICO

L'obiettivo è quello di trovare per via analitica delle espressioni (formule) che consentano di descrivere il campo magnetico generato da bobine che, per semplicità, immagineremo di poter descrivere come costituite da avvolgimenti (densi) di forma, o "simmetria", circolare. Si procede per passi successivi con descrizioni via via più accurate.

### A. Campo della spira sull'asse

Consideriamo una spira sottile, cioè un anello di raggio  $a$  percorso da una corrente di intensità  $I$ . Vogliamo determinare il campo  $\vec{B}$  che si misura sull'asse (detto  $Z$ ) a una certa distanza  $z$  generica dal piano della spira stessa.

Il punto di partenza è l'equazione costitutiva del campo  $\vec{B}$ , detta anche legge di Biot-Savart,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}, \quad (1)$$

che esprime il contributo infinitesimo vettoriale al campo di induzione magnetica  $\vec{B}$  prodotto dall'elementino di lunghezza  $d\vec{\ell}$  percorso dalla corrente di intensità  $I$  e connesso dal vettore  $\vec{r}$  al punto in cui si vuole determinare il campo ( $\mu_0$  è ovviamente la permeabilità magnetica del vuoto).

Semplici considerazioni geometriche di simmetria permettono di individuare la direzione (e il verso) del campo. Esso è infatti assiale (diretto lungo  $\hat{z}$ , perché le componenti fuori asse prodotte da due elementini diametralmente opposti si elidono a vicenda). Inoltre il verso è coerente con la regola della mano destra nella sua implementazione "ciao ciao". In conseguenza della determinazione della direzione, il campo si ottiene per integrazione delle sole componenti assiali  $dB_z = dB_a/\sqrt{a^2 + z^2}$ . L'integrando non dipende dalla variabile di integrazione e il risultato, immediato, è

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Si vede subito come, per  $z \rightarrow \infty$ , si abbia  $B_z \rightarrow 0$  come  $1/z^3$ , che rappresenta il tipico comportamento "all'infinito" di un *campo di dipolo*.

### B. Solenoide finito sottile

Supponiamo ora di avere un solenoide di lunghezza finita  $L$  e spessore trascurabile, con il proprio asse in direzione dell'asse  $Z$  (l'asse è centrato nel punto di mezzo della lunghezza del solenoide, che dunque occupa lo spazio le cui proiezioni sull'asse  $Z$  sono comprese tra  $-L/2$  e  $+L/2$ ). Immaginiamo che il solenoide sia formato da  $N$  spire e che queste siano estremamente "dense", tanto da poter considerare il solenoide come costituito da una corrente che scorre sulla superficie di un cilindro (che supponiamo abbia sempre raggio  $a$ ).

Il campo sull'asse può essere determinato suddividendo la superficie del cilindro in tanti anelli sottili di spessore  $dz$ . Ognuno di questi porterà una corrente infinitesima  $dI = I(N/L)dz$  e contribuirà alla componente assiale del campo come un anello (ovvero spira sottile) interessato da tale corrente, cioè con un termine

$$dB_z = \frac{\mu_0 IN}{2L} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz. \quad (3)$$

Per ottenere il campo complessivo in una posizione generica  $z$  occorre sommare, cioè integrare, tra gli estremi  $z + L/2$  e  $z - L/2$ :

$$B_z = \frac{\mu_0 IN a^2}{2L} \int_{z+L/2}^{z-L/2} \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = \quad (4)$$

$$= \frac{\mu_0 IN}{2L} \int_{z+L/2}^{z-L/2} \frac{1}{(1 + (z/a)^2)^{3/2}} d(z/a). \quad (5)$$

Per calcolare l'integrale conviene eseguire il cambio di variabile  $z/a = \tan \theta$ ; con un minimo di passaggi algebrici, notando che  $d \tan \theta = d\theta / \cos^2 \theta$  e tenendo conto che  $1 + \tan^2 \theta = 1 / \cos^2 \theta$ , si ha

$$B_z = \frac{\mu_0 IN}{2L} \sin \theta \Big|_{\arctan(z/a-L/(2a))}^{\arctan(z/a+L/(2a))}. \quad (6)$$

Dato che  $\sin \theta = \tan \theta / (1 + \tan^2 \theta)$ , si ottiene alla fine

$$B_z = \frac{\mu_0 IN}{2L} \left( \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} - \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} \right). \quad (7)$$

Vediamo i casi interessanti di questa espressione: per  $L \rightarrow \infty$  si ottiene facilmente il risultato del solenoide infinito (in queste condizioni, qualsiasi sia il valore di  $z$ , ci

si trova sempre all'interno del solenoide!). In  $z = 0$  si ha  $B_z = (\mu_0 IN/2)(1/\sqrt{a^2 + (L/2)^2})$ , che quindi rappresenta il campo al centro del solenoide finito. Inoltre, usando in modo appropriato le serie di Taylor, si ritrova, per  $L \rightarrow 0$ , l'Eq. 2. Infine, con lo stesso approccio si ottiene che  $B_z \rightarrow 0$  come  $1/z^3$  per  $z \rightarrow \infty$ , cioè il campo sull'asse a grande distanza dal solenoide mantiene l'andamento già trovato per il campo della spira.

### C. Solenoide finito spesso

Diamo ora uno spessore al nostro solenoide finito, immaginando che esso abbia un raggio interno  $a_1$  e un raggio esterno  $a_2$ . Usando l'Eq. 7 possiamo determinare un'espressione analitica del campo sull'asse anche in questo caso.

A questo scopo suddividiamo lo spessore del solenoide in tanti gusci cilindrici concentrici, di raggio  $a$  generico compreso tra  $a_1$  e  $a_2$  e di spessore infinitesimo  $da$ . Questi gusci sono percorsi da una corrente infinitesima  $dI$  che scorre in direzione tangenziale. Facendo l'ipotesi che la corrente sia distribuita in modo uniforme, cioè supponendo in modo simile a prima che le spire riempiano densamente il volume considerato, si ha  $dI = |\vec{j}|dA$ . Nelle ipotesi appena fatte, la densità di corrente vale, in modulo,  $|\vec{j}| = I/(L(a_2 - a_1))$ .

Il contributo infinitesimo alla componente assiale del campo sull'asse si scrive ora

$$dB_z = \frac{\mu_0 IN}{2L^2(a_2 - a_1)} \left( \frac{z + L/2}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} + \right. \quad (8)$$

$$\left. - \frac{z - L/2}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} \right) da. \quad (9)$$

L'integrale da calcolare è allora il seguente:

$$B_z = \frac{\mu_0 IN}{2L^2(a_2 - a_1)} \left( (z + L/2) \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z + L/2)^2}} da \right. \quad (10)$$

$$\left. - (z - L/2) \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (z - L/2)^2}} da \right), \quad (11)$$

che non è tanto facile da trattare. Con qualche sforzo si trova che la primitiva di  $1/\sqrt{a^2 + c^2}$  è  $\ln(a + \sqrt{a^2 + c^2})$ , per cui si ottiene con un po' di passaggi

$$B_z = \frac{\mu_0 IN}{2L(a_2 - a_1)} \left[ (z + L/2) \ln \left( \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + (z + L/2)^2}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + (z + L/2)^2}} \right) \right. \quad (12)$$

$$\left. - (z - L/2) \ln \left( \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + (z - L/2)^2}}{a_1 + \sqrt{a_1^2 + (z - L/2)^2}} \right) \right]. \quad (13)$$

L'espressione è parecchio complicata. Si può comunque osservare che, per  $a_1 \rightarrow a_2$ , essa si riduce a quella del solenoide sottile finito, e che per  $z \rightarrow \infty$  si riottiene l'andamento alla  $1/z^3$ , che quindi rappresenta l'andamento dell'intensità della componente assiale del campo di induzione magnetica per le varie configurazioni considerate

a distanze sufficientemente grandi dal centro del solenoide (vedremo poi quanto grandi esse debbano essere nella pratica dell'esperimento).

## II. COMMENTI ALL'ESPERIENZA

Nell'esperimento pratico di laboratorio si usano delle bobine di forma non facilmente descrivibile in modo analitico. Infatti esse sono costituite da un filo di rame avvolto in 1500 + 1500 spire attorno a un supporto di sezione quadrata (lato circa 4 cm). La "lunghezza"  $L$  dell'avvolgimento è circa 6.5 cm. Dunque si tratta di una bobina di lunghezza e spessore finiti, che però non ha la forma circolare che tanto ci ha aiutato nel calcolo dei vari integrali. Avendo a disposizione strumenti sufficientemente evoluti, per esempio Python, il campo magnetico (non solo sull'asse) si potrebbe determinare in maniera numerica: a questo scopo basterebbe suddividere l'avvolgimento in tanti elementini  $d\vec{\ell}$  e quindi sommare tutti i contributi secondo la legge di Eq. 1, oppure partire da una qualsiasi espressione analitica del campo per un qualche elemento dell'avvolgimento. Rimandiamo a un'eventuale altra nota l'esplorazione di questo approccio, limitandoci qui a utilizzare delle formule analitiche: in questo contesto, l'Eq. 12 è probabilmente quella che "funziona meglio".

In realtà l'esperimento pratico richiede di considerare gli *andamenti* del campo, cioè di tenere conto dell'andamento funzionale in funzione di  $z$  a distanza sufficientemente grande dal centro della bobina. Per questo scopo è probabilmente sufficiente esaminare l'andamento previsto dalla più semplice delle formule trovate, quella di Eq. 2. Come già affermato, l'intensità del campo magnetico (componente assiale e sull'asse) diminuisce con l'aumentare della distanza  $z$  secondo la legge di potenza  $B_z \propto 1/z^3$ .

L'esperimento chiede anche di valutare l'andamento della componente *radiale* del campo, misurata in prossimità dell'asse e a diverse distanze  $z$  dal centro della bobina. Va fatta una debita precisazione: nella pratica la misura del campo, che ha carattere relativo (cioè non è quantitativa), si esegue per induzione. Il campo è infatti alternato, essendo alternata la corrente che fluisce nella bobina. Per la cosiddetta legge di Faraday, questo campo induce una forza elettromotrice proporzionale all'intensità del campo stesso, alla frequenza, all'area della bobina *di sonda* e al coseno dell'angolo compreso tra la normale alla bobina di sonda e al campo. Poiché la bobina di sonda ha dimensioni finite (anch'essa ha sezione quasi-quadrata, essendo avvolta su un supporto quadrato di lato circa 2 cm, o leggermente superiore, e lunghezza circa uguale), non è possibile escludere completamente il contributo della componente assiale quando si esegue la misura della componente radiale (e viceversa). Inoltre la misura va intesa sempre e comunque come *integrata spazialmente*, a causa delle dimensioni finite della bobina di sonda.

Possiamo però fare riferimento a un modello in cui, invece, immaginiamo di poter distinguere completamente le componenti e, soprattutto, di poter fare misure loca-

li (non integrate). Se inoltre supponiamo di misurare la componente radiale molto vicino all'asse (nella realtà questa misura darebbe una lettura quasi nulla, perché quasi nullo sarebbe il flusso del campo magnetico attraverso la sezione della bobina di sonda), allora nel nostro modello possiamo anche supporre che la componente assiale  $B_z$  sia pressoché indipendente dalla posizione radiale  $r$  del punto di misura (la parola “punto” va intesa come “regione”, visto il carattere integrato spazialmente della misura). In effetti questo è proprio quanto è stabilito dalle formule precedenti, in particolare dall'Eq. 2 dove non compare alcuna dipendenza da  $r$ .

Come sapete benissimo, il campo di induzione magnetica è *solenoidale*, cioè  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . Ricordando l'espressione della divergenza in coordinate cilindriche, quelle che si usano qui grazie alla simmetria del problema, si ha

$$0 = \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r B_r}{\partial r}, \quad (14)$$

ovvero

$$\frac{\partial r B_r}{\partial r} = -r \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (15)$$

Nelle ipotesi fatte,  $\partial B_z / \partial z$  non dipende da  $r$ , per cui l'equazione si può integrare facilmente, fornendo

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}. \quad (16)$$

Anche senza calcolare la derivata che compare al secondo membro (si può ovviamente fare, specie se si suppone che il campo sia quello di una spira - provateci!), si capisce subito che l'andamento con la distanza  $z$  della componente radiale del campo,  $B_r$ , segue una legge di potenza con una diminuzione più brusca rispetto a quella della componente assiale. Infatti, supponendo  $B_z \propto 1/z^3$ , si ha  $B_r \propto 1/z^4$ .

### A. Approssimazione delle bobine a solenoidi finiti spessi

L'approssimazione migliore per le bobine usate in laboratorio è probabilmente quella del solenoide finito e spesso. Vediamo ora quali risultati fornisce il calcolo dell'Eq. 12 per una scelta di parametri che simula le effettive dimensioni delle bobine.

Da una (sommatoria) analisi delle bobine, e facendo riferimento al caso di collegamento in serie degli avvolgimenti di cui esse sono composte, ho scelto  $L = 6.5$  cm,  $a_1 = 2.5$  cm,  $a_2 = 5$  cm. Per quanto riguarda il numero di spire  $N$  da mettere nella formula, è chiaro che esso non deve essere pari a  $1500 + 1500$ . Infatti gli avvolgimenti sono posti non uno “accanto all'altro”, ma uno “sopra all'altro”. Per questo stesso motivo non va in realtà bene neppure porre  $N = 1500$ : se ricordate i passaggi che ci hanno portato a scrivere l'Eq. 12, potete facilmente rendervi conto che il numero di spire da considerare è quello disposto lungo la lunghezza del solenoide ( $N/L$  è la densità di spire *per*

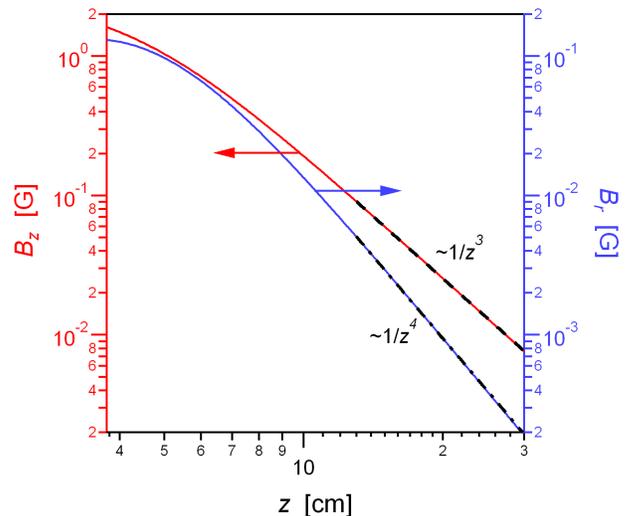


Figura 1. Risultati del calcolo discusso nel testo per le componenti assiali ( $B_z$ , scala di sinistra) e radiali ( $B_r$ , scala di destra) del campo magnetico prodotto da un solenoide spesso di lunghezza finita, come descritto nel testo. Le curve tratteggiate rappresentano il risultato di best-fit a leggi di potenza con gli esponenti indicati in figura.

unità di lunghezza). Il numero preciso non è noto, ma da un'analisi visiva pare che ogni avvolgimento di 1500 spire sia composto da 75 spire poste lungo la lunghezza e 20 lungo il raggio, per cui ho deciso  $N = 75$ . Infine, per ottenere dei risultati quantitativi, ho supposto che nella bobina passasse una corrente  $I = 0.3$  A. Notate che, supponendo che la resistenza interna della bobina sia dell'ordine di 30 ohm (e trascurando la dipendenza dell'impedenza dalla frequenza), questo vuol dire che alla serie degli avvolgimenti viene applicata una differenza di potenziale dell'ordine di 9 V.

La Fig. 1 mostra il risultato del calcolo: la componente assiale  $B_z$  è quella ottenuta direttamente da Eq. 12, la radiale  $B_r$  è invece calcolata integrando l'Eq. 16 nella (forte) approssimazione che  $B_z$  non dipenda da  $r$ . Allo scopo di rendere evidente l'andamento secondo una legge di potenza, ho scelto la rappresentazione logaritmica, nella quale la legge di potenza è rappresentata come una retta di pendenza (negativa) proporzionale all'esponente. Notate che, avendo posto lo zero dell'asse  $z$  al centro della bobina, i dati mostrati nel grafico sono quelli relativi alla zona esterna alla bobina stessa (tenendo conto della lunghezza  $L$  e dello spessore del materiale plastico che costituisce l'involucro della bobina).

Si vede effettivamente che, a partire all'incirca da  $z > L$ , l'andamento è ben rappresentato da una legge di potenza,  $B_z \propto 1/z^q$ . Si nota anche, però, che solo per  $z \gtrsim 2L$  l'esponente  $q$  diventa prossimo a 3 (considerando tutti i dati per  $z > L$  si ottiene  $q \approx 2.7$ ). A causa della lunghezza finita della bobina di sonda, come questa distanza si traduca nella sua effettiva posizione non è molto semplice da stabilire. Grossolanamente l'andamento

dovrebbe essere ben descritto dalla legge  $1/z^3$  a partire dalle misure condotte quando gli involucri della bobina e della bobina di sonda distano qualche centimetro.

Il calcolo per  $B_r$  (si è supposto  $r = 0.5$  cm) mostra un campo circa un ordine di grandezza più basso (notate che le scale sono diverse per gli assi di sinistra e di destra) e che decade più rapidamente con la distanza (gli assi di sinistra e di destra hanno la stessa “dinamica”: entrambi coprono tre decadi). Per  $z \gtrsim 2L$  l’esponente è  $q \approx 4$  (e anche qui esso si riduce a circa 3.7 se si fa un best-fit di tutti i dati per  $z > L$ ).

Dunque le aspettative sono piuttosto ben confermate anche quando, invece di descrivere i campi con la legge della spira, si passa all’approssimazione presumibilmente migliore, costituita dal solenoide spesso di lunghezza finita. Infine la Fig. 2 mostra i risultati del calcolo per la sola componente assiale  $B_z$  quando i valori di  $a_1$  e  $a_2$  sono modificati in modo da tenere conto del collegamento in serie dei due avvolgimenti (in questo caso, come già affermato, si è scelto  $a_1 = 2.5$  cm e  $a_2 = 5$  cm), oppure si usa il solo avvolgimento esterno ( $a_1 = 3.75$  cm,  $a_2 = 5$  cm) o infine solo quello interno ( $a_1 = 2.5$  cm,  $a_2 = 3.75$  cm). Per rendere più verosimile il confronto con i dati sperimentali, in questi calcoli ho immaginato di interessare gli avvolgimenti con diversi valori di corrente. Infatti il generatore di funzioni usato in laboratorio crea una certa differenza di potenziale, la quale dà luogo a una corrente che varia in modo inversamente proporzionale con la resistenza (ovvero impedenza, ma qui supponiamo di operare in continua, e inoltre supponiamo ideale il generatore, che invece ha una resistenza interna di 50 ohm) degli avvolgimenti. Presi separatamente, i due avvolgimenti hanno una resistenza simile tra loro: più precisamente, le due resistenze non sono identiche, essendo diversa per motivi geometrici la lunghezza del filo di rame di cui essi sono costituiti. Nel mio calcolo ho supposto  $R_{int} = 13$  ohm e  $R_{ext} = 17$  ohm, per cui la serie ha il valore  $R_{serie} = 30$  ohm. Inoltre ho immaginato che la differenza di potenziale applicata valesse 9 V, cioè che la serie fosse interessata dal valore  $I = 0.3$  A già usato prima. Il risultato, che in questo caso rappresento in scala lineare, dimostra che, se la bobina di sonda è posta in prossimità (quasi a contatto) della bobina, cioè  $z \simeq 5$  cm, i campi prodotti dagli avvolgimenti interno ed esterno sono simili fra loro (il campo dell’avvolgimento interno è un po’ maggiore), mentre il campo della serie è più basso di circa un fattore 2.

*State molto molto attenti:* nel calcolo che mi ha condotto a realizzare il grafico di Fig. 2 ho supposto di lavorare in corrente continua, per cui mi sono limitato a tenere conto delle *resistenze* degli avvolgimenti. Nell’esperienza pratica di laboratorio si lavora in alternata, e quindi è necessario tenere conto delle *impedenze* degli avvolgimenti, cioè sia della resistenza interna, che dell’induttanza. L’andamento dell’induttanza con la geometria (le

dimensioni) dell’avvolgimento è argomento che, in parte, vedremo in seguito. Esso può spiegare le osservazioni sperimentali sull’andamento del segnale indotto nella

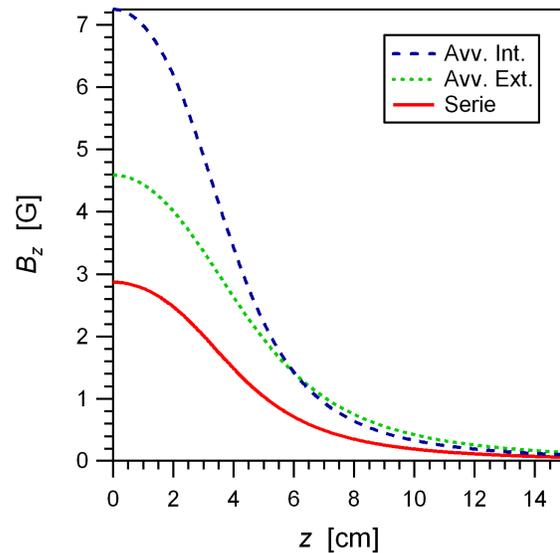


Figura 2. Risultati del calcolo discusso nel testo per la componente assiale del campo generato da un solenoide spesso di lunghezza finita con parametri che simulano quelli dell’avvolgimento interno o esterno delle bobine di laboratorio, ovvero della loro serie. Notate che, come discusso nel testo, nei tre calcoli si sono supposti valori diversi di corrente.

bobina di sonda dai due avvolgimenti, quello interno e quello esterno. Comunque, anche nel caso alternato rimane valida la spiegazione della diminuzione del segnale di sonda, ovvero del campo magnetico, quando si usa il collegamento in serie dei due avvolgimenti. Infatti l’impedenza è comunque maggiore per la serie che non per i singoli avvolgimenti, per cui la corrente diminuisce (a parità di ampiezza del segnale prodotto dal generatore).

L’ultimissima osservazione riguarda l’intensità dei campi prodotti. Le scale dei grafici sono in unità di Gauss (G,  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ ) e si vede come, per i valori di correnti considerati, i campi al di fuori delle bobine valgono al massimo qualche G. Supponendo di lavorare a una frequenza  $f \sim 500$  Hz, e ponendo come sezione della bobina di sonda  $S \sim 4 \text{ cm}^2$ , l’applicazione della legge di Faraday nella (forte) approssimazione di campo uniforme suggerisce che una singola spira della bobina di sonda trova ai suoi capi una differenza di potenziale indotta dell’ordine di 0.1 mV per G. Poiché nell’esperienza si misuravano differenze di potenziale dell’ordine del centinaio di mV, se ne può dedurre che, supponendo valide le tante approssimazioni fatte, la bobina di sonda fosse costituita da un migliaio di spire.