

# Misura di grandezze elettriche in continua

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 4 - FF, 16 ottobre 2015)

Questa nota ha lo scopo principale di introdurre i principi di operazione, le caratteristiche funzionali e alcuni dettagli operativi degli strumenti di misura di tensioni e correnti continue. Queste misure sono spesso eseguite usando degli strumenti multifunzionali detti multimetri, o testers. Essi consentono anche una misura della resistenza, a cui anche si fa cenno in questa nota. Gli aspetti cruciali e non banali degli argomenti considerati sono: il concetto di misura analogica o digitale, la perturbazione che gli strumenti producono sul sistema sotto analisi, modellata attraverso la loro resistenza interna, e la determinazione delle incertezze di misura.

## I. INTRODUZIONE

La misura di grandezze elettriche *in continua*, cioè in condizioni costanti o stazionarie, è una prassi comunissima nell'analisi di circuiti elettrici del tipo di quelli realizzati in laboratorio. Essa, però, ha anche un valore molto più generale visto che qualsiasi grandezza fisica, al giorno d'oggi, viene misurata attraverso sensori, o trasduttori, che forniscono in uscita grandezze elettriche (dette, qui e in previsione di situazioni non necessariamente stazionarie, anche *segnali* elettrici). In questa nota ci limitiamo alle basi della misura e quindi ci occupiamo in particolare di differenze di potenziale, o *tensioni*,  $\Delta V$ , e di intensità di corrente, o correnti,  $I$ , con qualche cenno alla misura di resistenza,  $R$ . Queste grandezze sono normalmente misurate usando singoli dispositivi che si chiamano *multimetri*, o *testers*, configurati rispettivamente come misuratori di tensione (voltmetri), corrente (amperometri), resistenza (ohmetri).

Un tester è sicuramente ben più complesso del metro a nastro, tanto per fare un esempio banale di strumento di misura comunissimo. Farne il corretto uso non è mai un'operazione ovvia o scontata. Alcune osservazioni preliminari sull'impiego del tester sono elencate qui di seguito.

- A causa della loro multifunzionalità e della possibilità di scegliere diverse portate (fondo scala), i tester devono essere impiegati sapendo cosa si deve misurare e, se possibile, avendo un'idea dell'ordine della grandezza che si vuole misurare. Essi vanno dunque usati con la testa, e non con le mani (o con i piedi), pena misure erronee e, soprattutto, danneggiamenti al circuito sotto analisi e allo strumento.
- È bene ricordare sempre che l'uso dello strumento "perturba" il circuito sotto analisi, ovvero il sistema che si sta misurando. È indispensabile capire bene come può essere modellata la perturbazione e, sulla base di questo modello, tenere in conto (quantitativamente) dei suoi effetti, o verificare in quali condizioni essa può eventualmente essere trascurata.

- L'incertezza, cioè la barra di errore da attribuire alla misura, deve essere valutata con grande attenzione, tenendo conto, in generale, di tutti gli effetti coinvolti.

## II. MISURE DI TENSIONI E CORRENTI (E RESISTENZE)

In generale, un tester può misurare tensioni e correnti, sia in continua (*DC* per direct current) che in alternata (*AC* per alternate current), oltre a resistenze e, spesso, anche numerose altre grandezze. Affinché esso possa essere impiegato per la misura di una determinata grandezza, per esempio tensione o corrente in continua, occorrono alcuni passaggi preliminari da fare con la testa. In particolare si deve:

1. configurare lo strumento per la misura richiesta *prima* della misura (se possibile, prima di fare qualsiasi collegamento elettrico). Per esempio, il tester digitale ha una manopola (collegata a un commutatore) che permette di selezionare la grandezza misurata e anche la sua scala (o portata). Inoltre anche la scelta delle boccole a cui vanno collegati i fili che dallo strumento vanno al circuito, o viceversa, dipende dall'esigenza di misurare tensioni o correnti. Per il tester analogico in uso in laboratorio, la configurazione si fa solo tramite la scelta delle boccole.
2. Scegliere la portata in maniera opportuna. Impiegare la portata "sbagliata" ha almeno due conseguenze negative: (i) se il fondo scala è piccolo rispetto al segnale da misurare, lo strumento va in *overload*, cioè "satura", con il rischio di danneggiarsi (in particolare il tester analogico a lancetta); (ii) se il fondo scala è (troppo) grande, la misura perde di significatività. Nella quasi totalità dei casi, esaminando il circuito sotto analisi si può stabilire il valore massimo che una data grandezza può avere e quindi scegliere di conseguenza la portata. Nel caso in cui questa operazione preliminare sia difficile da eseguire, conviene sicuramente partire da portate alte, in modo da evitare che lo strumento vada a fondo scala, per poi scendere progressivamente.

3. In linea di principio, oltre alla portata bisogna anche determinare preliminarmente il “segno” della grandezza misurata (cioè, nella pratica, il verso di percorrenza delle correnti all’interno dello strumento, o il segno delle differenze di potenziale a esso applicate). La scelta del segno è critica per lo strumento analogico, dato che la sua lancetta può muoversi solo in un verso (e si può danneggiare se forzata a muoversi in verso opposto). Essa è meno rilevante nel caso del tester digitale, dato che questo strumento ha la possibilità di regolarsi automaticamente sul segno delle grandezze misurate (il segno è indicato sul display).
4. Collegare lo strumento al circuito, attraverso i fili di cui è dotato, in modo corretto. C’è infatti una differenza sostanziale tra il collegamento per la misura di tensioni e il collegamento per la misura di correnti.

La configurazione preliminare degli strumenti richiede molta attenzione. Tutto è scritto nei manuali e riportato in maniera sintetica sul pannello frontale dello strumento, con indicazioni opportune accanto alla diverse boccole o alle diverse posizioni della manopola. Qualche suggerimento generico:

- state attenti ai colori. Per esempio, nel tester digitale in uso in laboratorio, le scritte in azzurro sul pannello si riferiscono a grandezze in continua (a cui si fa riferimento con DC, ovvero con il simbolo “=”), quelli in bianco a grandezze in alternata (AC, ovvero “~”). Nel tester analogico, invece, i colori di DC e AC sono rispettivamente nero e rosso.
- Sempre parlando di colori, e per aggiungere un po’ di confusione, notate che la convenzione generale per i circuiti elettrici prevede che rosso e nero si riferiscano a punti che si trovano a potenziale rispettivamente maggiore e minore (il rosso è il *positivo*, il nero è il *negativo*). Per esempio, rosse e nere sono le boccole di ingresso del tester digitale.
- State attenti a capire cosa significano le indicazioni accanto alle boccole: molte boccole hanno diverse funzioni (la scelta dipende dalla configurazione di *entrambe* le boccole collegate ai due fili che vanno dal tester al circuito, o viceversa). In particolare la boccola indicata con COM nel tester digitale e con “=” (in genere con una linea tratteggiata) è a comune per varie funzioni. Essa deve trovarsi a potenziale più basso dell’altra (rilevante per il tester analogico, poco importante per il digitale).

Il collegamento con il circuito sotto analisi deve *sempre* avvenire con *due* fili. Il motivo è ovvio: se si vuole misurare una tensione, in quanto *differenza* di potenziale essa può essere determinata solo se il “potenziale” di due punti distinti del circuito viene riportato allo strumento. Analogamente, se si vuole misurare una intensità

di corrente, è necessario che la corrente *entri* (attraverso un filo) ed *esca* (attraverso l’altro filo) nello strumento. La norma generale è che *tutte* le misure di grandezze, o segnali elettrici, richiedono due fili di collegamento per essere effettuate. Qualche volta, questi fili usati per collegare lo strumento di misura al circuito prendono il nome di *puntali*. I puntali sono propriamente delle punte (conduttrici) montate su supporti isolanti che spesso si usano con i tester per collegarsi a punti specifici di un circuito. Nelle vostre esperienze, voi generalmente userete dei fili che terminano con delle banane, o spinotti, standard (4 mm dia). State attenti: per collegarsi alle boccole del tester analogico occorre usare banane specifiche, di diametro minore (nella custodia del tester troverete cavetti con intestati i due tipi di banane, standard e piccolo).

Per quanto riguarda i collegamenti al circuito sotto analisi:

- nella misura di tensione, lo strumento deve “sentire” la d.d.p. tra due punti di un qualche circuito. La misura non richiede di modificare fisicamente il circuito. Se per esempio vi si chiede di misurare la d.d.p. ai capi di un componente (qualche volta detta *caduta di potenziale*), lo strumento di misura, opportunamente configurato come voltmetro, va collegato *in parallelo* al componente stesso.
- Per la misura di intensità di corrente, *tutta* la corrente che dovete misurare deve fluire all’interno dello strumento. Questo richiede di interrompere il circuito all’interno del quale volete misurare la corrente e collegare lo strumento, opportunamente configurato come amperometro, *in serie* al circuito stesso.
- Come chiariremo nel seguito, la misura di resistenza, che gli strumenti eseguono sempre e solo in corrente continua, è in qualche modo “derivata” da quelle di tensione o corrente. Per la misura di resistenza, per esempio di un componente (resistivo) o una combinazione di componenti, si deve fare in modo che esso sia collegato *da solo* allo strumento, ovvero che la combinazione di componenti sia collegata da sola allo strumento, opportunamente configurato come ohmetro. In altre parole, per misurare la resistenza di un resistore dovete *scollegare* il resistore dal circuito in cui si trova eventualmente montato, e collegarlo da solo allo strumento.

### III. ANALOGICO VS DIGITALE

Gli aggettivi *analogico* e *digitale*, quando riferiti a strumenti di misura, sottolineano la capacità di fornire letture idealmente continue (analogico) o discrete (digitale). Uno strumento a lancetta, in cui la lancetta può in linea di principio assumere una qualsiasi posizione angolare nell’intervallo consentito, è, ovviamente, uno strumento analogico. Uno strumento dotato di un display numerico è, ovviamente, uno strumento digitale.

I due strumenti possono essere modellati, come funzionalità di base, in modo differente, visto che differenti sono i meccanismi di operazione. Qui nel seguito ci occuperemo in particolare del tester analogico, di cui siamo in grado di spiegare quasi tutto. Le considerazioni svolte potranno essere valide anche per il tester digitale per il quale, invece, dobbiamo accontentarci di una descrizione piuttosto vaga.

### A. Tester analogico

Il tester analogico che userete (ICE-680R), vanto mondiale di un'industria italiana di qualche decennio fa, si basa su uno strumento che ha una lancetta che si muove sopra una scala graduata (tante scale graduate, con la pratica riuscirete ad associare ogni scala alla misura che state facendo). Per le scale di tensione continua, si hanno in totale 50 tacchette. Il fondo scala della misura è indicato in prossimità di una delle boccole di ingresso. Ogni tacchetta corrisponde a  $1/50$  del valore di fondo scala. Sul quadrante è riportato anche uno specchio che serve per minimizzare gli errori di parallasse, e in corrispondenza dell'asse della lancetta c'è una vite, che dovrebbe essere regolata spesso, che permette di posizionare sullo zero la lancetta in condizioni di riposo.

La lancetta è collegata meccanicamente al perno di un telaio che supporta una bobina di filo conduttore. Il telaio, cioè la bobina, può ruotare attorno al perno con attrito molto basso; la rotazione è contrastata da un momento di forze elastiche prodotto da una molla che lavora a torsione (un filo di acciaio armonico, un cui estremo è collegato al perno e l'altro è fisso). Il sistema meccanico ha anche una certa costante tempo di smorzamento, che serve per evitare che la lancetta oscilli indefinitamente e che contribuisce a determinare la prontezza dello strumento. Il telaio, cioè la bobina, è inserito all'interno di un campo magnetico esterno e costante, generato dalle espansioni di un magnete permanente. Semplificando, facendo scorrere della *corrente* nella bobina si ha che su di essa, e dunque sul telaio, agisce un momento di forze *proporzionale all'intensità di corrente*. Questo momento di forze fa ruotare il telaio, e dunque la bobina, che è detta bobina mobile, fino a una posizione determinata dall'equilibrio con il momento della forza elastica della molla di torsione. La deflessione della lancetta è quindi proporzionale all'*intensità di corrente* che fluisce nella bobina. Lo strumento a lancetta è allora, fondamentalmente, un misuratore di corrente, detto *galvanometro* o (micro)amperometro.

Due osservazioni molto rilevanti:

1. per come è costruito (la bobina è un avvolgimento di filo elettrico), lo strumento ha inerentemente una *resistenza interna*  $r$  non nulla, data almeno (ovvero in assenza di altri elementi resistivi) proprio dalla resistenza del filo che costituisce l'avvolgimento. Un modello dello strumento, in questa configurazione di base che stiamo considerando, può quin-

di essere quello rappresentato in Fig. 1(a), dove un amperometro "ideale" (privo di resistenza, in questa accezione) si trova in serie alla resistenza  $r$ .

2. Lo strumento è in realtà un trasduttore, dato che converte la misura della grandezza elettrica (corrente) nello spostamento della lancetta. La traduzione di una grandezza in un'altra richiede di determinare un coefficiente di ragguglio, o di *calibrazione*. Esso viene normalmente individuato dal costruttore, che si fa anche carico di stabilire l'accuratezza della calibrazione stessa.

### B. Tester digitale

In linea di massima, e senza esaminare casi particolari, le grandezze elettriche che si misurano in un laboratorio sono "continue", nel senso qui di "non discrete". Infatti nelle comuni misure elettriche, in cui sono coinvolte grandi quantità di carica, è estremamente difficile rendersi conto della natura discreta della carica elettrica (la corrente di  $1 \mu\text{A}$ , che è piccola per i nostri standard, corrisponde al flusso di  $10^{12} - 10^{13}$  elettroni al secondo). Dunque in uno strumento digitale viene eseguita una conversione da analogico a digitale, cioè la grandezza da misurare viene *digitalizzata* e convertita in un numero. Tratteremo i meccanismi di base della digitalizzazione, che al giorno d'oggi è una tecnica comunissima in tanti ambiti, in altra sede.

Qui ci limitiamo a sottolineare che un tester digitale può essere considerato, in termini fondamentali e in prima battuta, come un *misuratore di d.d.p.* Poiché lo strumento deve poter eseguire tante diverse funzioni (e operare su tante diverse scale), è evidente che oltre al digitalizzatore vero e proprio esso sarà costituito da molta circuiteria elettronica, finalizzata per esempio ad amplificare (o attenuare) i segnali in modo da permettere di cambiare scala o tipologia di misura. Tutto questo fa sì che:

1. per come è costruito (in un modo che non siamo in grado di descrivere), lo strumento ha inerentemente una *resistenza interna*  $r$  non infinita, che può essere considerata come montata in parallelo a un voltmetro "ideale" (in questa accezione, dotato di resistenza infinita), come rappresentato in Fig. 1(b) [1];
2. naturalmente anche in questo caso lo strumento è in realtà un trasduttore, e quindi la misura si basa sulla calibrazione (che deve essere fornita dal costruttore assieme alla sua incertezza).

### C. Misure su diverse portate e di diverse grandezze

La multifunzionalità dei tester, così come la possibilità di selezionare diverse portate, è in gran parte conseguen-

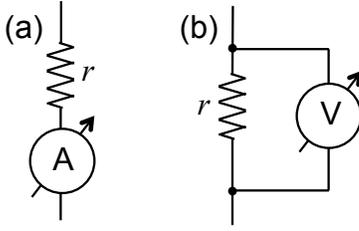


Figura 1. Rappresentazione schematica di un amperometro (a) e di un voltmetro (b) reali; gli strumenti ideali sono rappresentati dal circoletto con freccina, e si intendono qui dotati di resistenza nulla (amperometro) o infinita (voltmetro);  $r$  rappresenta la resistenza interna dello strumento reale.

za diretta dell'applicazione della legge di Ohm. Poiché non siamo in grado di descrivere nei dettagli il funzionamento di uno strumento digitale, per capire questa affermazione facciamo riferimento alla costruzione del tester analogico. La Fig. 2 mostra lo schema circuitale interno, debitamente semplificato, dello strumento in uso in laboratorio. Se facciamo riferimento allo schema (a), possiamo notare come un'opportuna configurazione di resistenze, montate internamente allo strumento e connesse a diverse bocche di entrata, renda possibile usare il galvanometro, che di per sé è un misuratore di corrente, per la misura di differenze di potenziale.

Infatti supponiamo di applicare una differenza di potenziale  $\Delta V$  tra la boccola marcata con V in figura (sarebbe la boccola "comune", quella indicata con "=" sul pannello dello strumento) e la boccola marcata con 2V (che indica un fondo scala di 2 V). Questa d.d.p. provoca una corrente che passa nel circuito costituito dalla serie della resistenza indicata come  $R_1$  con il parallelo dei due rami costituiti dalla resistenza  $R_2$  e dalla serie della resistenza  $R_3$  con il galvanometro (indicato con A e la freccina).

Scriviamo per esteso il sistema di equazioni che permettono di determinare il valore della corrente  $I_B$  che passa per il galvanometro. Per semplicità, immaginiamo di trascurare la resistenza interna del galvanometro stesso (essa è piccola, anche se non nulla). Si ha:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 // R_3 = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \quad (1)$$

$$\Delta V = R_{tot} I_{tot} = R_{tot} (I_A + I_B) \quad (2)$$

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{R_3}{R_2}, \quad (3)$$

dove i vari simboli hanno un significato ovvio. Risolvendo si ha

$$I_B = \frac{R_2}{R_2 + R_3} \frac{\Delta V}{R_{tot}} = \frac{R_2}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3} \Delta V. \quad (4)$$

Questa equazione dimostra che c'è linearità diretta tra il valore della tensione  $\Delta V$  e la corrente  $I_B$  che, circolando nel galvanometro, determina la deflessione della lancetta. Quindi da un amperometro abbiamo costruito un voltmetro, e il tutto è stato dimostrato usando la legge di Ohm.

Un'ispezione quantitativa dei valori delle varie resistenze (indicate in modo barbaro in figura) mostra che per  $\Delta V = 2$  V si ha  $I_B = 40 \mu\text{A}$ , valore che corrisponde alla massima deflessione della lancetta, e quindi al fondo scala.

Se si vuole cambiare fondo scala, cioè la portata dello strumento, è sufficiente aggiungere delle resistenze in serie. Per esempio, se invece della boccola marcata con 2V si usa quella marcata con 10V, si ha un'ulteriore resistenza in serie a  $R_1$ . Usando i valori riportati in figura si vede facilmente che in questo caso il fondo scala del galvanometro (cioè la condizione  $I_B = 40 \mu\text{A}$ ) corrisponde a una d.d.p. applicata tra le boccole considerate pari a  $\Delta V = 10$  V (e infatti il fondo scala prescelto per la misura di tensione con quella scelta delle boccole è proprio questo). Quindi, usando opportuni elementi puramente resistivi posti all'interno dello strumento, è possibile modificare a volontà la sua portata.

La modifica della portata può essere facilmente ottenuta anche nel caso di misure di corrente. Facciamo riferimento alla Fig. 2(b) per capire come questo sia realizzato nel tester analogico in uso in laboratorio. Supponiamo allora di inviare una corrente di intensità  $I$  facendola entrare per la boccola marcata .5mA e facendola uscire da quella marcata con A. Questa corrente viene partita tra due rami: quello in alto è costituito dalla serie di due resistenze con il galvanometro, quello in basso è costituito dalla serie di cinque resistenze. Se si fanno i conti, si vede facilmente che, per questa scelta di boccole, la corrente  $I = 0.5$  mA corrisponde al passaggio di  $40 \mu\text{A}$  attraverso il galvanometro. Dunque il fondo scala per questa scelta di boccole è 0.5 mA. Se invece della boccola .5mA si invia la corrente attraverso la boccola 5mA si modifica la configurazione del circuito (guardate lo schema). Se si fanno i conti, si vede facilmente come in questa nuova configurazione la deflessione massima del galvanometro corrisponda a una corrente di 5 mA. Dunque la portata è stata modificata usando gli elementi resistivi interni allo strumento.

Del tester digitale non siamo in grado di esaminare lo schema circuitale, dato che esso comprende parecchia circuiteria elettronica che non conosciamo (almeno per ora). Tuttavia abbiamo già stabilito che esso si comporta, di base, come un voltmetro. Dunque usando schemi non troppo diversi, dal punto di vista concettuale, rispetto a quelli di Fig. 2, possiamo immaginare di poterne convertire il funzionamento in amperometro e anche di poter cambiare a volontà la portata.

Infine spendiamo due parole sulla misura di resistenza. La legge di Ohm definisce la resistenza come il rapporto tra la caduta di potenziale ai capi del resistore che si sta misurando e la intensità di corrente che lo attraversa. Dunque la resistenza può essere determinata avendo o un misuratore di corrente e una sorgente di d.d.p. nota, applicata ai capi del resistore, oppure un misuratore di d.d.p. e una sorgente di corrente nota, da far scorrere attraverso il resistore. Queste due possibilità sono quelle utilizzate rispettivamente nel tester analogico e in quello

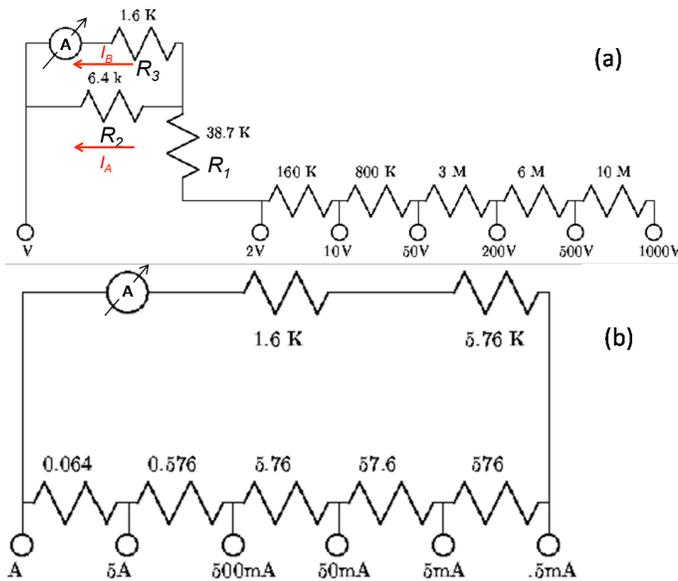


Figura 2. Schema semplificato del tester analogico ICE-680R in configurazione per la misura di d.d.p. (a) e di intensità di corrente (b).

digitale (per quest'ultimo almeno in linea di principio e salvo ulteriori complicazioni). Nel caso del tester analogico, la misura della resistenza viene effettuata utilizzando una batteria interna (normalmente scarica) che viene collegata al componente di resistenza incognita. Nel collegamento, si fa in modo che il galvanometro e le resistenze necessarie per ottenere la corretta portata nella misura di corrente si vengano a trovare in serie con il resistore sotto misura. La resistenza dipende in modo inversamente proporzionale alla corrente che fluisce nel resistore e che dunque è letta dallo strumento. Infatti la scala per la lettura delle resistenze ha il suo zero al fondo scala e presenta un andamento visibilmente nonlineare.

#### IV. RESISTENZE INTERNE DEGLI STRUMENTI

In questa sezione trattiamo un argomento della massima importanza, da tenere in debito conto *ogni volta* che si eseguono misure di segnali elettrici, a prescindere dallo strumento.

Supponiamo di voler misurare una corrente con uno strumento reale, modellato secondo la Fig. 1(a). Tale strumento ha una resistenza interna che, nella misura di corrente, viene a trovarsi in serie al circuito sotto analisi. Questa resistenza interna perturba il funzionamento del circuito esterno, ed è evidente che questa “perturbazione” è tanto maggiore quanto più grande è il valore della resistenza interna. Dunque *un amperometro reale approssima il comportamento ideale quanto più piccola è la sua resistenza interna*.

Supponiamo ora di voler misurare una tensione con uno strumento reale, modellato secondo la Fig. 1(b). Tale strumento ha una resistenza interna che, nella misura di tensione, viene a trovarsi in parallelo al componente, o alla composizione di componenti, ai capi del quale, o dei quali, vogliamo misurare la d.d.p.. Questa resistenza interna perturba il funzionamento del circuito esterno, ed è evidente che questa “perturbazione” è tanto maggiore quanto più piccolo è il valore della resistenza interna. Dunque *un voltmetro reale approssima il comportamento ideale quanto più grande è la sua resistenza interna*.

Quanto affermato, che sarà trattato in forma quantitativa in alcuni esempi riportati in seguito, può essere anche espresso in questa forma alternativa. Per una “buona” misura di corrente è necessario che lo strumento abbia una piccola resistenza interna (virtualmente nulla), mentre per una “buona” misura di tensione lo strumento deve avere una grande resistenza interna (virtualmente infinita).

I dati relativi alle resistenze interne sono sempre specificati nei manuali degli strumenti, a cui si rimanda per ulteriori dettagli. Diamo qui un cenno dei valori tipici cominciando dall'impiego degli strumenti analogico e digitale come voltmetri, che è l'applicazione più frequente e significativa.

- Per il tester analogico, lo schema di Fig. 2(a) mostra chiaramente che la resistenza interna (che abbiamo prima chiamato  $R_{tot}$ ) dipende dalla portata selezionata. Essa aumenta all'aumentare del fondo scala. Facendo due conti, si vede che  $r = 20 \text{ kohm}/V_{fs}$ , dove  $V_{fs}$  è il fondo scala (in V) della portata selezionata. Come rule of thumb, si può affermare che gli effetti della resistenza interna, ovvero della perturbazione, sono trascurabili se  $r \ll R$ , con  $R$  resistenza ai capi della quale si sta misurando la tensione, ovvero resistenza effettiva dell'insieme di componenti ai capi dei quali si sta misurando la tensione. Le tensioni tipiche misurate in laboratorio sono di qualche V, per cui la resistenza interna tipica dello strumento è di alcune decine di kohm, che è un valore quasi mai trascurabile rispetto a quello delle resistenze di uso comune nelle esperienze pratiche. Dunque *il tester analogico non è quasi mai la scelta ottimale per la misura di tensioni*.
- Nel tester digitale la resistenza interna è dominata da quella del circuito di ingresso che è in genere realizzato con transistor a effetto di campo. In questi circuiti la resistenza di ingresso è in genere molto alta. Nel tester digitale in uso in laboratorio si ha  $r \simeq 10 \text{ Mohm}$ , indipendentemente dalla portata selezionata. Dunque *il tester digitale produce quasi sempre perturbazioni trascurabili nella misura di tensioni* ed è quindi preferibile a quello analogico.
- Per la misura di correnti con il tester analogico facciamo riferimento alla Fig. 2(b). Si vede chiaramente che anche in questo caso la resistenza interna di-

pende dalla scala (essa può essere determinata svolgendo i calcoli). Tradizionalmente, però, invece che attraverso la resistenza interna, l'effetto di perturbazione provocato dall'inserzione dello strumento in serie al circuito sotto analisi viene caratterizzato attraverso la *caduta di potenziale per inserzione* per lettura a fondo scala,  $\Delta V_{\text{ins,fs}}$ . Questa caduta di potenziale è (generalmente) *costante*, cioè indipendente dalla portata selezionata, come si può facilmente verificare usando la legge di Ohm. Tuttavia essa dipende linearmente dalla corrente effettivamente misurata; i manuali normalmente forniscono la caduta di potenziale corrispondente a una lettura a fondo scala. Per il tester analogico, si ha  $\Delta V_{\text{ins,fs}} \simeq 300$  mV (tranne che per la portata con fondo scala  $50 \mu\text{A}$ , per la quale  $\Delta V_{\text{ins,fs}} \simeq 100$  mV), per il digitale  $\Delta V_{\text{ins,fs}} \simeq 200$  mV. È difficile stabilire a priori se queste cadute di potenziale corrispondono a perturbazioni trascurabili, o meno, dei circuiti sotto analisi, ma *entrambi i tester (analogico e digitale) perturbano in genere allo stesso modo* i circuiti, quando usati come amperometri. Dunque, non c'è sostanziale preferenza per l'uno o l'altro quando si devono eseguire misure di corrente.

Un'ultima considerazione importante: se si compie l'errore consistente nell'usare un multimetro configurato come amperometro per la misura di tensioni, è evidente che si possono provocare *seri danni* sia allo strumento che al circuito sotto analisi. Infatti la bassa resistenza interna corrisponde in pratica, nella maggior parte dei casi, a provocare un corto circuito. Anche la situazione inversa (uso di un multimetro configurato come voltmetro per misurare correnti) va attentamente evitata.

### A. Esempi

Per chiarire quali sono gli effetti della perturbazione creata dall'uso degli strumenti di misura, facciamo riferimento a due casi specifici di circuiti comprendenti delle resistenze e un generatore di d.d.p.. Per semplicità, in questi esempi supponiamo di disporre di un generatore di d.d.p. *ideale*, cioè in grado di fornire la d.d.p. assegnata ( $V_0$ , in questi esempi) a prescindere dal circuito che vi è collegato. Come vedremo in futuro, il concetto di resistenza interna si applica anche a un modello di generatore di d.d.p. reale: in questa nota trascuriamo la resistenza interna del generatore.

Il primo esempio è un partitore di tensione costituito dalle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , in cui immaginiamo di voler misurare la tensione  $V_1$  ai capi di  $R_1$  [Fig. 3(a)]. In assenza dello strumento, ci si attenderebbe una tensione

$$V_{1,att} = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_0, \quad (5)$$

con ovvio significato dei simboli. La presenza del voltmetro reale modifica il circuito, dato che la sua resistenza

interna  $r$  viene a trovarsi *in parallelo* a  $R_1$ . Dunque il partitore di tensione è costituito dalla serie di  $R_2$  con il parallelo  $R_1//r = R_1 r / (R_1 + r)$ . Questo modifica l'intensità di corrente  $I'$  che circola nel circuito (ovvero nella maglia). Di conseguenza la tensione misurata è

$$V_{1,mis} = R_1 // r I' = \frac{r R_1}{r R_1 + r R_2 + R_1 R_2} V_0 \quad (6)$$

$$= \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_2/\xi}, \quad (7)$$

con  $\xi = r/R_1$ . Evidentemente  $V_{1,mis} \rightarrow V_{1,att}$  per  $r \gg R_1$ , soddisfatta di certo per  $r$  tendente a infinito.

Facciamo un esempio numerico, in cui poniamo  $V_0 = 4.5$  V,  $R_2 = 20$  kohm,  $R_1 = 10$  kohm. Il partitore di tensione così creato è atteso fornire  $V_{1,att} = 1.5$  V. Nel caso di uso del tester analogico, immaginando di usare la portata con fondo scala  $2\text{V}$  a cui corrisponde  $r = 40$  kohm, ovvero  $\xi = 4.0$ , si ha  $V_{1,mis} = 1.3$  V (diversa dal valore atteso per oltre il 10%). Nel caso invece di tester digitale, che ha  $r \simeq 10$  Mohm, si ottiene facilmente  $V_{1,mis} = V_{1,att}$ .

Il secondo esempio è un partitore di corrente costituito dalle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , in cui immaginiamo di voler misurare l'intensità di corrente  $I_A$  che scorre per il ramo in cui si trova  $R_1$  [Fig. 3(b)]. In assenza dello strumento e considerando ideale il generatore, ci si attenderebbe una corrente

$$I_{A,att} = \frac{V_0}{R_1} = \frac{R_2}{R_1} I_B, \quad (8)$$

dove  $I_B$  è la corrente che passa per il ramo costituito da  $R_2$ . Inserendo lo strumento, che va ovviamente collegato in serie con  $R_1$ , si misura una corrente

$$I_{A,mis} = \frac{V_0}{r + R_1} = \frac{R_2}{r + R_1} I_B. \quad (9)$$

Si vede subito che  $I_{A,mis} \rightarrow I_{A,att}$  per  $r \rightarrow 0$  (in queste condizioni è anche soddisfatta l'equazione del partitore di corrente espressa dall'ultimo membro di Eq. 8). Introducendo la caduta di potenziale per inserzione  $\Delta V_{\text{ins}} = r I_{A,mis}$ , si ha anche

$$I_{A,mis} = \frac{V_0 - \Delta V_{\text{ins}}}{R_1}, \quad (10)$$

che evidentemente si riconduce a Eq. 8 se  $\Delta V_{\text{ins}} \rightarrow 0$ .

Anche qui facciamo un esempio numerico usando gli stessi valori delle varie grandezze menzionate prima. Immaginiamo di usare il tester digitale configurato come amperometro con fondo scala  $2\text{mA}$ , in modo da avere una lettura significativa. Si ottiene  $I_{A,att} = 0.45$  mA, che corrisponde all'incirca a un quarto del fondo scala. Di conseguenza la caduta di potenziale per inserzione vale  $\Delta V_{\text{ins}} \simeq \Delta V_{\text{ins,fs}}/4 \approx 68$  mV. Questo porta a  $I_{A,mis} \approx 0.44$  mA, diversa dal valore atteso per circa il 2% (potete provare a determinare il risultato nel caso di uso del tester analogico).

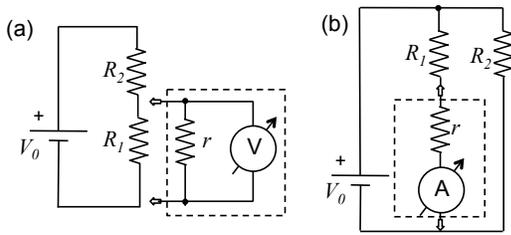


Figura 3. Partitore di tensione (a) e di corrente (b) considerati nel testo. I box tratteggiati indicano i modelli di strumenti di misura reali.

## V. LETTURA DELLE SCALE

Questa sezione si occupa di un aspetto assolutamente banale, ma tuttavia molto rilevante dal punto di vista pratico, cioè la lettura della scala, sia per il tester analogico (più difficile) che per quello digitale (più immediata, ma non priva di aspetti sottili).

La lancetta del tester analogico si muove sopra un gran numero di scale graduate, che si riferiscono alle varie grandezze che possono essere misurate e alle varie portate che possono essere selezionate. Dato che in questa nota ci occupiamo in particolare dell'uso del tester per la misura di tensioni e intensità di corrente continue (la misura di resistenza verrà raramente eseguita con il tester analogico), possiamo restringerci a considerare le quattro scale in nero accanto a cui sono posti i simboli  $V - mA =$ . Queste scale si riferiscono allo stesso sistema di 50 tacchette equispaziate (le scale sono lineari rispetto alla deflessione della lancetta). Il modo più semplice, ma non immediato, per leggere la scala consiste nel considerare il fondo scala prescelto (indicato accanto a una delle boccole che vengono usate) e dividerlo per 50: ogni tacchetta corrisponde infatti a  $1/50$  del fondo scala, e contando le tacchette a partire dallo zero (deflessione nulla) si ottiene la lettura. Un modo più immediato consiste nell'usare i numeri riportati accanto alle tacchette maggiori, che si riferiscono a fondi scala pari a 250, 200, 50, 10. Per esempio, se stiamo facendo una misura di tensione e il fondo scala prescelto è  $V_{fs} = 2 V$ , allora potremo considerare la serie di numeri che termina con 200 e dividerli mentalmente per 100, ovvero la serie che termina con 10 e moltiplicarla per 0.2, allo scopo di ottenere una scala che va da 0 a 2 V.

Questo tipo di problemi di lettura non esiste nel caso del tester digitale, dove il display numerico (per il modello in uso in laboratorio, DM-3900, detto a 3 cifre e "mezza", la "mezza" cifra è quella iniziale e può essere assente oppure valere 1) permette di conoscere immediatamente la lettura. Tuttavia, con questo modello specifico di tester bisogna ancora porre delle attenzioni per indovinare la scala, cioè l'unità di misura della lettura. Come si vede dalle indicazioni riportate accanto alla manopola del commutatore rotante, i fondi scala impostabili corrispondono a grandezze tipo 200 mV, 2 V, 20 V, 200 V, etc., oppure 20  $\mu A$ , 200  $\mu A$ , 2 mA, etc. (cominciano tutte

per 2, salvo qualche eccezione). Infatti il display impiegato può al massimo fornire l'indicazione numerica 1999. Usando il tester, si nota anche che sul display compare un punto decimale, la cui posizione dipende dalla portata selezionata. Supponiamo di fare una misura di corrente continua avendo selezionato la portata con fondo scala 200  $\mu A$ : il punto decimale si troverà tra la penultima e l'ultima cifra sulla destra, per cui la lettura potrà andare da 0 a 199.9  $\mu A$ . Supponiamo ora di fare una misura di tensione avendo selezionato la portata con fondo scala 2 V: il punto decimale si troverà tra la prima ("mezza") cifra e la seconda, e la lettura potrà andare da 0 a 1.999 V.

Altra piccola osservazione: se il display indica la sola "mezza" cifra iniziale, cioè un 1. non seguito da nulla, allora vuol dire che siete in condizioni di overload, cioè che la grandezza che volete misurare ha un valore che eccede il fondo scala della portata prescelta.

## VI. INCERTEZZA

Determinare l'incertezza di una misura, di qualsiasi tipo, è sempre compito di chi esegue la misura. Ovviamente la determinazione deve essere basata su considerazioni valide dal punto di vista fisico. Sempre in termini molto generali, in ogni strumento di misura possono essere spesso identificate (almeno) due sorgenti di "incertezza", o di errore [2]. Infatti si può distinguere fra *incertezza di lettura*, generalmente dominata da effetti stocastici, e *incertezza di calibrazione*, generalmente associata a effetti sistematici.

In modo sintetico (e parecchio grossolano), possiamo affermare che:

- entrambi gli strumenti (analogico e digitale) hanno un'incertezza di lettura che può essere facilmente individuata. Essa corrisponde a quella che qualche volta si indica come *sensibilità*, o *accuratezza* dello strumento. Nel tester analogico, essa può corrispondere alla minima variazione di posizione della lancetta resa possibile dalla misura a occhio, cioè, per esempio,  $\pm$  "mezza tacchetta". Il per esempio sta ad indicare che la scelta dell'incertezza di lettura dipende, o può dipendere, da fattori quali l'abilità del lettore, il fatto che la lancetta non sia piegata, la circostanza che essa non vibri per qualche motivo, etc.. Nel tester digitale, invece, l'incertezza di lettura è facilmente individuabile in  $\pm$  "mezza cifra meno significativa". Per tenere conto degli effettivi errori introdotti dal processo di digitalizzazione, questa determinazione dell'incertezza di lettura è in genere considerata poco realistica, e si dice allora che l'incertezza di lettura è almeno  $\pm 1$  *digit*, dove per digit si intende proprio la cifra meno significativa presentata dal display [3].
- Entrambi gli strumenti (analogico e digitale) hanno un'incertezza di calibrazione. Essa è dovuta a

tanti motivi che concorrono a determinare il fattore di calibrazione del processo di trasduzione coinvolto. Per esempio, facendo riferimento al tester analogico, la calibrazione è necessaria nello stabilire la relazione tra corrente che passa nella bobina mobile e deflessione della lancetta. Inoltre, quando si cambia portata o tipo di grandezza misurata usando sistemi di resistenze, come visto sopra, la calibrazione è necessaria per stabilire il comportamento di questi sistemi. In linea di principio, la calibrazione, che in genere si effettua tramite confronto con uno *standard*, potrebbe essere definita con un'accuratezza paragonabile a quella con cui è definito lo standard stesso. Tuttavia questa operazione, che va fatta individualmente, strumento per strumento, non è stata eseguita per gli strumenti in uso in laboratorio (non viene mai eseguita per testers di quel tipo), per cui il costruttore esprime una tolleranza sulla calibrazione che si traduce, di fatto, in un'incertezza, detta appunto di calibrazione. Una situazione analoga, anzi, più complicata, si verifica con il tester digitale, dove il digitalizzatore e tutta l'elettronica di contorno devono essere opportunamente calibrati.

Se è piuttosto ragionevole e agevole distinguere fra le due sorgenti di errore, è molto più difficile stabilirne il carattere stocastico o sistematico. Infatti, per esempio, nell'incertezza di calibrazione rientrano anche quei fattori di natura stocastica che riguardano le condizioni operative (temperatura, umidità, altitudine, etc.), che possono modificare la calibrazione cambiando le caratteristiche (resistenza, etc.) dei componenti interni allo strumento. Il costruttore introduce gli errori dovuti a questi effetti nell'incertezza di calibrazione.

### A. Calibrazione vs lettura

L'incertezza di calibrazione, che in genere dipende da portata e grandezza misurata, è sempre specificata nel manuale dello strumento. Normalmente, essa è espressa come un *errore relativo* (percentuale). Le due sorgenti di incertezza (calibrazione e lettura) possono essere ritenute indipendenti. Di conseguenza l'errore complessivo sulla misura si ottiene generalmente *sommando in quadratura* i due termini di incertezza [? ]. Per strumenti della categoria di quelli in uso in laboratorio, l'effetto complessivo è tipicamente "notevole": molto spesso, le misure di grandezze elettriche sono caratterizzate da errori che sovrastimano ampiamente la deviazione standard (stocastica) della grandezza misurata o dello strumento. Ve ne potete facilmente rendere conto provando a stabilire la deviazione standard sperimentale di una certa misura, per esempio della d.d.p. prodotta da un generatore: spesso vedrete che le fluttuazioni della lettura (visibili a occhio) sono molto minori della barra di errore complessiva attribuita alla misura stessa.

Questa circostanza può essere fastidiosa in alcuni casi, per esempio perché impedisce di eseguire test di significatività del best-fit. Quindi potrebbe essere utile, in alcuni casi *opportunamente selezionati e discussi*, trascurare l'incertezza di calibrazione, che in genere è il fattore dominante nella barra di errore e che, avendo un carattere prevalentemente sistematico, copre spesso le fluttuazioni stocastiche. Vedremo caso per caso se e quando questa operazione può essere eseguita. Per il momento, limitiamoci a dichiarare alcune situazioni in cui l'incertezza di calibrazione *non* può essere trascurata:

1. quando la lettura, anche se fatta con lo stesso strumento e nelle stesse condizioni operative, richiede di cambiare portata. Infatti il fattore di calibrazione è specifico per ogni portata e dunque trascurare la relativa incertezza può condurre a sottostimare l'errore.
2. Quando si devono combinare misure di grandezze diversamente dimensionate in una misura "indiretta". Per esempio, questo è il caso di un best-fit dei dati di resistenza e tensione (ai capi della resistenza) usato per determinare la validità di un modello basato sulla legge di Ohm. Poiché resistenza e tensione, magari misurati con lo stesso strumento (lo stesso tester digitale), hanno dimensioni diverse, e dunque sfruttano diversi fattori di calibrazione, trascurare la relativa incertezza può condurre anche in questo caso a sottostimare l'errore.

### B. Esempi

Per familiarizzare con la determinazione delle incertezze, facciamo riferimento a qualche caso pratico.

Immaginiamo di leggere la d.d.p.  $V_0$  prodotta da un generatore usando il tester digitale. Supponiamo che il generatore sia uno di quelli in uso in laboratorio, in cui  $V_0 \sim 5$  V. Predisponiamo il tester sulla portata con fondo scala 20V (l'inferiore sarebbe al di sotto del valore che ci aspettiamo di leggere) e assumiamo di vedere sul display la lettura  $V_0 = 4.97$  V (il display ha tre cifre e "mezza", dunque il massimo numero di cifre significative ottenibili in questo caso è tre). Il manuale dello strumento, disponibile in rete e in laboratorio, recita che per questa portata e questa grandezza la "precisione" è  $\pm 0.5\% \pm 1$  digit. Questi due termini corrispondono proprio all'incertezza di calibrazione e di lettura. L'incertezza di calibrazione produce una (semi)barra di errore  $\Delta V_{0,cal} = 0.025$  V (usando una cifra significativa di ridondanza). L'incertezza di lettura produce una (semi)barra di errore  $\Delta V_{0,lett} = 0.01$  V (inferiore in questo caso a quella di calibrazione). La (semi)barra di errore complessivo vale allora  $\Delta V_0 = \sqrt{0.025^2 + 0.01^2}$  V = 0.027 V. Sopprimendo la cifra significativa di ridondanza, si potrà esprimere la misura come  $V_0 = (4.97 \pm 0.03)$  V. Notate che, se avessimo scelto (erroneamente) la portata successiva,

con fondo scala 200V, la lettura sarebbe stata probabilmente  $V_0 = 5.0$  V, con sole due cifre significative. Tenendo conto che questa scala ha la stessa “precisione” di quella usata in precedenza, avremmo ottenuto sempre  $\Delta V_{0,cal} = 0.025$  V, ma  $\Delta V_{0,lett} = 0.1$  V (superiore in questo caso all’incertezza di calibrazione). Di conseguenza, tenendo conto delle cifre significative, avremmo ottenuto  $V_0 = (5.0 \pm 0.1)$  V (la misura è “meno significativa” di quella fatta in precedenza).

Facciamo un altro esempio con la misura di un resistore con quattro anelli colorati, i cui primi tre sono arancione-arancione-rosso. Usiamo il tester digitale configurato come ohmetro con fondo scala 20k e supponiamo che la lettura sia 3.78 (di nuovo con tre cifre significative), che significa, tenendo conto del fondo scala,  $R = 3.78$  kohm. Il manuale recita che la “precisione” è, in questo caso,  $\pm 0.8\% \pm 1$  digit. Si ottiene allora  $\Delta R_{cal} = 0.030$  kohm e  $\Delta R_{lett} = 0.01$  kohm, da cui  $R = (3.78 \pm 0.03)$  kohm, con errore dominato dalla calibrazione.

Ancora un altro esempio. Stavolta abbiamo una corrente di intensità  $I \sim 15$  mA misurata dal tester analogi-

co. Scegliamo la portata con fondo scala 50mA e supponiamo di osservare che la lancetta si ferma attorno alla diciottesima tacchetta. Questo vuol dire che la lettura è  $I = 18.0$  mA. Per le condizioni nelle quali operiamo, stabiliamo che  $\Delta I_{lett} = 0.5$  mA, mentre il manuale recita che la “precisione” è  $\pm 1\%$  “del fondo scala”, che individuiamo come incertezza di calibrazione. Di conseguenza  $\Delta I_{cal} = 0.5$  mA (pari a quella di lettura) e, in definitiva,  $I = (18.0 \pm 0.7)$  mA.

Nella pratica, spesso è complicato e dispendioso effettuare tutti questi calcoli. Dunque, magari, quando i dati vengono dati in pasto a un software (Python), può valere la pena di prevedere un semplice algoritmo che sia in grado di determinare le barre di errore in modo semi-automatico (attenti a non fare pasticci, però). Altrimenti, la rule of thumb, almeno per il tester digitale, è che l’incertezza di calibrazione prevale quando la misura occupa “gran parte” della scala prevista da una certa portata, condizione in cui, ricordando che la determinazione dell’incertezza è *sempre* una *stima*, si può trascurare l’incertezza di lettura. D’altra parte è ovvio che questo *non* può essere fatto quando la lettura si avvicina allo zero.

- 
- [1] Dal punto di vista concettuale, un voltmetro reale può anche essere modellato come un voltmetro privo di resistenza interna posto in serie alla resistenza  $r$ . Qui si preferisce attribuire il carattere di idealità a un voltmetro dotato di resistenza infinita e usare il modello conseguente.
- [2] Diamo qui ai termini incertezza ed errore lo stesso significato, affermazione non sempre corretta.
- [3] Per qualche portata e scelta di grandezza da misurare, questa è ancora una sottostima dell’effettiva incertezza di digitalizzazione.
- [4] Si può discutere a lungo sulla validità della somma in quadratura. In linea di principio, essa è motivata o dal fatto che le misure a cui si riferiscono le due incertezze sono in-

dipendenti, o (che poi è la stessa cosa) che tutte e due le incertezze considerate hanno un carattere stocastico. Nessuna di queste due affermazioni è sicura. Infatti, i produttori appaiono presentare le relative incertezze come se esse fossero indipendenti, ma non possiamo stabilire se questo è del tutto giustificato, e, se l’incertezza di lettura può abbastanza ragionevolmente essere ritenuta dominata da errore stocastico, lo stesso non si può affermare per quella di calibrazione. Siete sicuramente autorizzati a fare la semplice somma (errore massimo) se lo ritenete più opportuno. Notate che, almeno quando le misure sono eseguite su portate adeguate al valore della grandezza misurata, la scelta dell’una o dell’altra somma non modifica in modo drammatico la stima dell’incertezza complessiva.