Trasformatore

fuso@df.unipi.it; http://www.df.unipi.it/∼fuso/dida

(Dated: version 4 - FF, 30 aprile 2015)

Questa breve nota mette in luce e riassume alcuni aspetti del funzionamento dei trasformatori analizzati attraverso un semplice modello che permette di cogliere le principali caratteristiche.

I. INTRODUZIONE

L'utilità pratica dei dispositivi che vanno sotto il nome di trasformatori è più che evidente e nota a tutti. Molti apparecchi elettrici e praticamente tutti i dispositivi elettronici di cui facciamo continuamente uso hanno bisogno di un'alimentazione in corrente continua e a bassa tensione. Una tensione, o corrente, di questo tipo non è però quella che esce dalle normali prese di casa, cioè dalla rete di distribuzione dell'energia elettrica. In primo luogo, la rete elettrica fornisce corrente alternata. Il motivo è soprattutto perché di questo tipo è la differenza di potenziale prodotta dai generatori (alternatori) che tipicamente sfruttano un moto periodico e, in accordo con la cosiddetta legge di Faraday, forniscono una forza elettromotrice alternata. Inoltre l'ampiezza di questa forza elettromotrice è normalmente elevata (230 V_{rms} per la rete di casa, centinaia di kV per gli elettrodotti ad alta tensione). Il motivo è legato al desiderio di minimizzare le perdite per effetto Joule da parte dei fili che trasportano la corrente in giro per il mondo. Infatti, data una certa resistenza (senz'altro non trascurabile, se si considera la lunghezza dei fili necessari per cablare il territorio), la potenza dissipata scala con il quadrato della corrente. A parità di potenza fornita dal generatore (dalla centrale elettrica), la corrente scala inversamente con la tensione. Dunque le perdite per effetto Joule diminuiscono con il quadrato della tensione, permettendo di limitare lo spreco di energia.

Conoscete già un modo per convertire in continua una tensione alternata (raddrizzatore e livellatore con diodo e condensatore). Per abbassare l'ampiezza della d.d.p. alternata ci si serve prevalentemente proprio dei trasformatori, che per questo hanno un impiego diffusissimo.

Un trasformatore è, in un'ampia accezione, un sistema costituito da due avvolgimenti (*primario e secondario*) che godono di un accoppiamento magnetico pressoché completo. A tale scopo normalmente gli avvolgimenti sono realizzati su un *circuito magnetico* fatto di lamine ferromagnetiche (di ferro dolce), cosa che consente di ottenere facilmente coefficienti di accoppiamento tra gli avvolgimenti $k \geq 0.9$. In queste condizioni si ha che il coefficiente di mutua induzione è $M = k\sqrt{L_1 L_2} \sim \sqrt{L_1 L_2}$, cioè il *flusso disperso* è pressoché trascurabile. Il motivo per cui si usano tipicamente lamine di ferro dolce è che nel funzionamento del trasformatore si vuole evitare di perdere (troppa) energia nella dissipazione delle correnti parassite e nel ciclo di isteresi. In un buon trasformatore l'energia, o potenza, spesa in questi fenomeni è dell'ordine di qualche punto percentuale rispetto a quella che è invece trasferita dal primario al secondario. Torneremo nelle prossime sezioni sugli argomenti che coinvolgono energia e potenza.

Supponendo che primario e secondario (con N_1 e N_2 spire, rispettivamente) siano avvolti sullo stesso circuito magnetico di permeabilità magnetica μ, sezione S e lunghezza ℓ, allora, usando la definizione di autoinduttanza $L = \Phi(\vec{B})/I$, la circuitazione di $\vec{H}$, $\oint \vec{H} \cdot d\ell = I_{conc}$, e supponendo valida la relazione $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, si ha $L_{1,2} = \mu S N_{1,2}^2/\ell$, da cui, supponendo $k = 1$, risulta $L_1/M = N_1/N_2$ e $L_2/M = N_2/N_1$. Inoltre si ha anche $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2$.

In altre parole, in un trasformatore le induttanze di primario e secondario sono legate alla mutua induzione attraverso semplici relazioni *costruttive*, che contengono solo il numero delle spire di primario e secondario. Inoltre i coefficienti di autoinduzione di primario e secondario sono in rapporto tra loro come il quadrato del rapporto del numero delle spire.

II. PRIMARIO E SECONDARIO

Le equazioni generiche dei circuiti di primario e secondario possono essere scritte nel dominio delle frequenze come

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \tag{1}$$
$$V_{\omega 2} = (R_2 + j\omega L_2) I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1} \ , \tag{2}$$

dove abbiamo introdotto i fasori delle correnti e degli eventuali generatori presenti al primario e al secondario (la simbologia è ovvia) e le resistenze nel circuito primario e secondario, generalmente date dalla somma delle resistenze interne degli avvolgimenti r_1, r_2 e di eventuali resistenze aggiunte nei circuiti.

A. Trasformazione in tensione e in corrente

Supponiamo che il primario sia collegato a un generatore che fornisce una tensione alternata con frequenza angolare ω e ampiezza V_1. Inoltre supponiamo che il secondario sia *aperto*, cioè che l'ampiezza I_2 della corrente che vi fluisce sia trascurabile. Le Eqs. 6 diventano:

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega 1} \tag{3}$$
$$V_{\omega 2} = j\omega M I_{\omega 1} \ , \tag{4}$$

da cui, nell'importante ipotesi che la frequenza sia sufficientemente alta da permettere di trascurare le componenti resistive rispetto a quelle reattive (cioè che $\omega L_1 >> R_1$),

$$T_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} = \alpha \ , \tag{5}$$

dove abbiamo introdotto il *rapporto di trasformazione in tensione* T_V e il parametro *costruttivo* $\alpha = N_2/N_1$.

Nelle approssimazioni fatte si ha che T_V non dipende da ω e inoltre che $V_{\omega 1}$ e $I_{\omega 1}$ sono sfasati tra di loro di $\pi/2$, per cui *a secondario aperto il trasformatore non assorbe alcuna potenza.*

Se vogliamo determinare il rapporto di trasformazione in corrente dobbiamo avere una corrente che fluisce nel secondario, che pertanto deve essere *chiuso* su un *carico*, che immaginiamo rappresentato dalla resistenza R_2. Le Eqs. 6 diventano:

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1)I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \tag{6}$$
$$0 = (R_2 + j\omega L_2)I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1} \ , \tag{7}$$

dato che supponiamo nulla la differenza di potenziale al secondario. Si ottiene facilmente:

$$I_{\omega 2} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} I_{\omega 1} \ , \tag{8}$$

da cui, nella solita approssimazione che la frequenza sia sufficientemente alta da permettere di trascurare le componenti resistive rispetto a quelle reattive (cioè che $\omega L_1 >> R_1$ e $\omega L_2 >> R_2$):

$$T_A = \frac{I_2}{I_1} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{\alpha} \ , \tag{9}$$

dove abbiamo introdotto il *rapporto di trasformazione in corrente* T_A, che è dunque il reciproco di T_V.

Nelle approssimazioni fatte si ha che anche T_A non dipende da ω e inoltre le correnti di primario e secondario sono sfasate di π tra loro (ricordate che lo sfasamento tra tensioni e correnti di primario e secondario è generalmente definito a meno di un segno, cioè di $\pm\pi$, a causa del fatto che normalmente non si sa in che senso sono avvolti gli avvolgimenti).

B. Resistenza "vista" dal primario

Sostituendo l'Eq. 8 nella prima delle Eqs. 6 si ha

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2})I_{\omega 1} = \tag{10}$$
$$= (R_1 + \frac{-\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2 + j\omega L_1 R_2}{R_2 + j\omega L_2})I_{\omega 1} = \tag{11}$$
$$= (R_1 + \frac{j\omega L_1 R_2}{R_2 + j\omega L_2})I_{\omega 1} \ , \tag{12}$$

dove abbiamo sfruttato l'ipotesi $M = \sqrt{L_1 L_2}$. Nella solita approssimazione $\omega L_2 >> R_2$, che ancora non era stata introdotta nella derivazione di Eq. 10, si ottiene allora:

$$V_{\omega 1} = (R_1 + \frac{L_1}{L_2} R_2)I_{\omega 1} = (R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2)I_{\omega 1} = (R_1 + \frac{1}{\alpha^2} R_2)I_{\omega 1} \ . \tag{13}$$

Questa equazione è molto importante poiché ci dice che, nelle approssimazioni fatte, il primario si comporta in modo esclusivamente resistivo e come se fosse dotato di una resistenza $R_{eff} = R_1 + R_2/\alpha^2$. L'"interazione" fra primario e secondario che determina R_{eff} non deve stupirvi, essendo in sostanza legata al coefficiente di accoppiamento tra gli avvolgimenti, che abbiamo supposto unitario.

C. Autoinduzione e resistenze di primario e secondario

Nei trasformatori che si usano comunemente per alimentare, previo raddrizzamento e livellamento, dei dispositivi elettronici, il rapporto di trasformazione in tensione è dell'ordine di diverse decine (per i trasformatori disponibili in laboratorio, il cui secondario genera 8 V_{rms} nominali, si ha $T_V \simeq 1/30 = N_2/N_1$, come si verifica facilmente tenendo conto che il primario è collegato alla rete elettrica, alla tensione 230 V_{rms}). Di conseguenza i coefficienti di autoinduzione di primario e secondario, L_1 e L_2, sono fortemente diversi fra loro. Per i trasformatori di laboratorio, si ha infatti $L_1 = (N_2/N_1)^2 L_2 = (L_2/T_V^2)L_2 \simeq 10^3 L_2$.

Tra le varie conseguenze di questa circostanza c'è sicuramente il fatto che, se trascurare la componente resistiva di uno degli avvolgimenti del trasformatore può essere approssimativamente corretto, questo può essere molto poco corretto per l'altro avvolgimento. Infatti, per l'esempio dei trasformatori di laboratorio e supponendo di usare primario e secondario come primo e secondo avvolgimento (in qualche occasione è possibile che i ruoli di primario e secondario si invertano), $\omega L_1 >> R_1$ non implica necessariamente $\omega L_2 >> R_2$.

Similmente, la costruzione del trasformatore implica che le resistenze interne di primario e secondario, r_1 e r_2, possano essere notevolmente diverse. Spesso gli avvolgimenti di primario e secondario sono realizzati con fili di diverso diametro: se il trasformatore viene usato per ridurre l'ampiezza della d.d.p., il secondario è costruito con un numero minore di spire. Spesso tali spire sono fatte con un conduttore di maggiore sezione per favorire il passaggio della corrente, che, nelle condizioni di questo esempio, al secondario è maggiore rispetto al primario. Quindi si ha $r_2 << r_1$.

Anche per le resistenze interne, allora, si può affermare che trascurare quella di un avvolgimento non autorizza necessariamente a trascurare quella dell'altro.

D. Trasformazione in potenza

Cominciamo con il ricordare un concetto che abbiamo già implicitamente impiegato: la potenza, essendo una grandezza mediata nel tempo, è in generale descritta dalla funzione

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{V_\omega \cdot I^*_\omega\} = \frac{1}{2}VI\cos\phi \ , \tag{14}$$

dove V_ω e I_ω sono due generici fasori di tensione e corrente, con ampiezza rispettivamente V e I, e ϕ è lo sfasamento tra di loro. Nel caso di un ramo resistivo, corrente e tensione sono in fase tra loro e la potenza è massima (essa viene utilizzata per l'effetto Joule).

Nelle approssimazioni che abbiamo impiegato finora, gli sfasamenti sono nulli sia al primario che al secondario. Dunque la potenza assorbita dal generatore, che è pari a quella sviluppata nel primario, è $P_1 = V_1 I_1/2 = R_{eff} I_1^2/2 = R_1 I_1^2/2 + R_2 I_1^2/(2\alpha^2) = P_{J1} + P_{L1}$, dove abbiamo indicato con P_{J1} la potenza "dissipata" dalla resistenza R_1 (la resistenza R_1 potrebbe anche includere, o essere rappresentata dalla sola resistenza interna), e con P_{L1} la potenza media "immagazzinata", o associata, all'avvolgimento del primario.

La potenza trasferita al carico, che abbiamo supposto di tipo resistivo, è $P_2 = P_{J2} = R_2 I_2^2/2 = R_2(I_1/\alpha)^2/2$, dove abbiamo sfruttato il rapporto di trasformazione in corrente stabilito prima (la resistenza R_2 potrebbe anche includere la resistenza interna del secondario, posto che questa non sia trascurabile nelle effettive condizioni sperimentali). Dunque nelle condizioni che stiamo esaminando $P_2 = P_{L1}$.

Definiamo *rapporto di trasformazione in potenza*, o *rendimento* η del trasformatore il rapporto tra la potenza trasferita al carico e quella assorbita dal generatore depurata delle perdite per effetto Joule al primario. In altre parole

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 - P_{J1}} \ . \tag{15}$$

È evidente che nelle condizioni che stiamo trattando, in cui tutte le approssimazioni supposte sono (perfettamente) soddisfatte, si ha $\eta = 1$, cioè il rendimento di un trasformatore ("ideale") è unitario.

1. *Accoppiamento con il carico*

La potenza del generatore è ovviamente tanto meglio accoppiata al carico quanto minori sono le perdite per effetto Joule al primario. Poiché il carico è resistivo, si ha sempre $P_2 = R_2 I_2^2/2 = R_2 I_1^2/(2\alpha^2)$. Ma $I_1 = V_1/R_{eff} = V_1/(R_1 + R_2/\alpha^2)$, per cui

$$P_2 = \frac{V_1^2}{2}\frac{R_2/\alpha^2}{(R_1 + R_2/\alpha^2)^2} \ . \tag{16}$$

Ponendo V_1 costante, come si verifica se il generatore di d.d.p. alternata è considerato *ideale*, quella appena scritta può essere considerata come una funzione di R_2, che va a zero per $R_2 \to 0$ e $R_2 \to \infty$, e che ha un *massimo* per $R_2 = \alpha^2 R_1$ (tutto questo può essere facilmente verificato con pochi passaggi matematici).

Dunque il trasferimento di potenza dal primario al secondario è massimizzato per un determinato valore di R_2, in corrispondenza del quale, a parità di tutti gli altri parametri, la potenza persa per effetto Joule nel circuito del primario è minimizzata. È interessante notare che in queste condizioni si ha $R_{eff} = 2R_1$, cioè la resistenza "effettiva" del primario è pari al doppio della resistenza R_2 del secondario, circostanza che può essere interpretata come una condizione di matching fra la resistenza interna del "generatore" (qui visto come generatore ideale seguito da R_{eff}) e dell'utilizzatore, ovvero del carico.

III. RENDIMENTO IN TRASFORMATORI REALI

Riassumiamo le principali approssimazioni fatte per giungere alla conclusione $\eta = 1$: (i) accoppiamento magnetico unitario, cioè $M = \sqrt{L_1 L_2}$; (ii) componenti resistive trascurabili al primario, cioè $\omega L_1 >> R_1$ e al secondario, cioè $\omega L_2 >> R_2$. Inoltre abbiamo immaginato di poter trascurare l'energia, o potenza, spesa per l'isteresi ferromagnetica e per gli effetti delle correnti parassite.

Nella realtà tutte queste approssimazioni non sono mai soddisfatte in modo completo. In primo luogo, qualsiasi trasformatore ha una parte di flusso che viene dispersa fuori dal circuito magnetico. Notate che di conseguenza il coefficiente di accoppiamento k non è mai perfettamente unitario, e quindi alcuni dei passaggi che abbiamo usato nelle equazioni scritte sopra non sono più completamente giustificati. Al giorno d'oggi sono frequenti costruzioni "toroidali" dei trasformatori che servono proprio per ridurre questa dispersione e aumentare il coefficiente di accoppiamento.

Inoltre gli effetti dissipativi associati alle (inevitabili) correnti parassite costituiscono un altro canale di perdita della potenza, che nella realtà è non trascurabile. Tra questi vanno anche annoverati quelli legati ai cosiddetti "effetti di prossimità", che avete già incontrato in altri contesti. Per esempio, essi comportano un aumento della resistenza effettiva degli avvolgimenti all'aumentare della frequenza, che contribuisce a far perdere potenza attraverso effetto Joule in elementi diversi dal carico.

Le approssimazioni che riguardano le componenti reattive e resistive di primario e secondario sono anch'esse spesso non verificate. Esse dipendono dalla frequenza di operazione e dai valori di R_1 e R_2, che in certe circostanze possono non essere trascurabili rispetto a ωL_1 e ωL_2. La conseguenza principale è quella di produrre degli sfasamenti tra corrente e tensione, che, dal punto di vista matematico, non consentono più di considerare unicamente resistivi i circuiti (cioè le potenze non sono

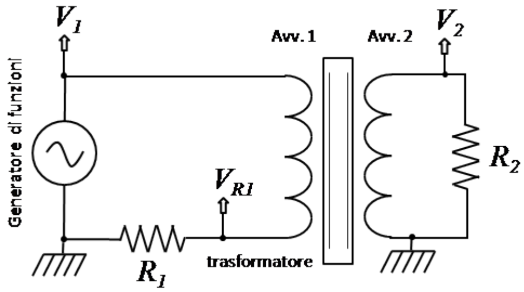

Figura 1. Schema per il circuito di misura delle caratteristiche del trasformatore realizzato nell'esperienza pratica e citato nel testo.

più "massime"). Ciò equivale di fatto a introdurre degli ulteriori canali di perdita della potenza, cioè a ridurre il rendimento. Alla fine, è facile che in trasformatori reali (e non particolarmente raffinati), si abbia $\eta \sim 0.7 - 0.8$, o anche, per condizioni di lavoro molto diverse da quelle di progetto, di meno.

A. Misura del rendimento

La misura sperimentale di η è abbastanza delicata. Infatti occorre poter distinguere tra P_{L1} e P_{J1}, che dal punto di vista pratico significa poter misurare in modo affidabile e indipendente le grandezze coinvolte nella determinazione delle varie potenze. Allo scopo si può per esempio impiegare lo schema di Fig. 1 (dove vengono trascurate le resistenze interne degli avvolgimenti r_1 e r_2 e anche la resistenza interna del generatore, che sono già delle belle approssimazioni). Il segnale V_{R1} è infatti proporzionale a I_1 ($I_1 = V_{R1}/R_1$) e la sua misura, svolta assieme a quella di V_1 (usando lo stesso oscilloscopio), permette di determinare lo sfasamento ϕ tra V_1 e I_1. Dunque si può determinare la potenza erogata dal generatore, che è $P_1 = (V_1 I_1/2)\cos\phi$. Analogamente si può determinare la potenza media per effetto Joule al primario, $P_{J1} = V_{R1} I_1/2 = R_1 I_1^2/2$, ovvero, considerando anche la resistenza interna r_1, che potrebbe essere non trascurabile, $P_{J1} = ((r_1 + R_1)/2) I_1^2$. Di conseguenza si può conoscere P_{L1} attraverso la differenza di questi valori, cioè $P_{L1} = P_1 - P_{J1}$.

Ora, se ricordate che "idealmente" $\phi \to 0$, potete facilmente rendervi conto che questa differenza può essere molto piccola. Infatti, nelle condizioni in cui supponiamo di lavorare, la potenza che effettivamente interessa l'avvolgimento primario è molto piccola. Inevitabilmente la valutazione di P_{L1} risulta affetta da una rilevante incertezza, che va considerata in modo opportuno attraverso un'attenta valutazione e propagazione degli errori di misura. Inoltre questa (piccola) potenza deve essere efficacemente trasferita al secondario affinché la potenza $P_2 = V_2^2/(2R_2)$ possa essere agevolmente stimata. Questo richiede che venga soddisfatta la condizione di matching che abbiamo trovato sopra. In altre parole, occorre scegliere R_2 tale che $R_2 \simeq \alpha^2 R_1$. Se, come proposto nell'esperienza pratica di laboratorio, $\alpha = N_2/N_1 << 1$, occorre usare una resistenza R_2 piuttosto piccola e una resistenza R_1 piuttosto grande. In queste condizioni, però, l'approssimazione che riguarda le componenti reattive e resistive non è più ben soddisfatta, e infatti compare uno sfasamento ϕ non trascurabile.

In definitiva, le condizioni di lavoro effettive dell'esperimento possono portare a sottostimare l'efficienza a causa della mancata validità di numerose approssimazioni, e quindi dell'inadeguatezza del modello che abbiamo presentato.