

Trasformatore

francesco.fuso@unipi.it; <http://www.df.unipi.it/~fuso/dida>

(Dated: version 5 - FF, 29 aprile 2016)

Questa breve nota mette in luce e riassume alcuni aspetti del funzionamento dei trasformatori analizzati attraverso un semplice modello che permette di cogliere le principali caratteristiche. Inoltre riporta, in forma sintetica, alcuni risultati ottenuti in un'esperienza pratica.

I. INTRODUZIONE

L'utilità pratica dei dispositivi che vanno sotto il nome di trasformatori è più che evidente e nota a tutti. Molti apparecchi elettrici, e praticamente tutti i dispositivi elettronici di cui facciamo continuamente uso, hanno bisogno di un'alimentazione in corrente continua e a bassa tensione.

Una tensione, o corrente, di questo tipo non è però quella che esce dalle normali prese di casa, cioè dalla rete di distribuzione dell'energia elettrica. In primo luogo, la rete elettrica fornisce corrente alternata. Il motivo è soprattutto perché di questo tipo è la differenza di potenziale prodotta dai generatori (alternatori) che tipicamente sfruttano un moto periodico e, in accordo con la cosiddetta legge di Faraday, forniscono una forza elettromotrice alternata. Inoltre l'ampiezza di questa forza elettromotrice è normalmente elevata (230 – 240 V_{rms} per la rete di casa, fino a centinaia di kV per gli elettrodotti ad alta tensione, oscillante a frequenza $f = 50$ Hz). Il motivo è legato al desiderio di minimizzare le perdite per effetto Joule da parte dei fili che trasportano la corrente in giro per il mondo. Infatti, data una certa resistenza (senz'altro non trascurabile, se si considera la lunghezza dei fili necessari per cablare il territorio), la potenza dissipata scala con il quadrato della corrente. A parità di potenza fornita dal generatore (dalla centrale elettrica), la corrente scala inversamente con la tensione. Dunque le perdite per effetto Joule diminuiscono con il quadrato della tensione, permettendo di limitare lo spreco di energia.

Conoscete già un modo per convertire in continua una tensione alternata, costituito dall'unione del raddrizzatore a diodo e del livellatore con condensatore (ovvero integratore RC). Per abbassare l'ampiezza della d.d.p. alternata che deve poi essere sottoposta a raddrizzamento e livellamento ci si serve prevalentemente proprio dei trasformatori, che per questo hanno un impiego diffusissimo. Vale tuttavia la pena di ricordare che, grazie allo sviluppo dell'elettronica, sono via via entrati in uso dei dispositivi che svolgono la stessa funzione facendo uso di modalità di operazione leggermente differenti. Questi dispositivi, che si definiscono *switching* e che costituiscono la quasi totalità degli attuali alimentatori per piccoli apparecchi elettronici (telefonini, computer, etc.), funzionano attraverso livellamento di un'onda quadra che opera a frequenze nettamente maggiori rispetto ai tradizionali 50 Hz (tipicamente decine di kHz) e che ha un *duty*

cycle variabile in funzione della richiesta di corrente da parte dell'apparato che deve essere alimentato. In questo modo essi permettono di aumentare il rendimento e minimizzare le perdite di potenza. In ogni caso, anche al loro interno si trovano in genere dei componenti che assomigliano molto da vicino al trasformatore convenzionale, che è l'oggetto di questa nota.

Un trasformatore è, in un'ampia accezione, un sistema costituito da due avvolgimenti (*primario e secondario*) che godono di un accoppiamento magnetico pressoché completo. A tale scopo, normalmente gli avvolgimenti sono realizzati su un *circuito magnetico* fatto di lamine ferromagnetiche (con ciclo di isteresi relativamente "stretto", come si ottiene per esempio con acciai "magnetici", contenenti percentuali non trascurabili di silicio o altri elementi), cosa che consente di ottenere facilmente coefficienti di accoppiamento tra gli avvolgimenti $k \gtrsim 0.9$. In queste condizioni si ha che il coefficiente di mutua induzione è $M = k\sqrt{L_1 L_2} \simeq \sqrt{L_1 L_2}$, cioè il *flusso disperso* di campo magnetico è pressoché trascurabile. Il motivo per cui si usano tipicamente materiali con poca isteresi è che nel funzionamento del trasformatore si vuole evitare di perdere (troppa) energia nella dissipazione dovuta all'isteresi stessa. Torneremo nelle prossime sezioni sugli argomenti che coinvolgono energia e potenza.

Supponendo che primario e secondario (con N_1 e N_2 spire, rispettivamente) siano avvolti sullo stesso circuito magnetico di permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$, sezione S e lunghezza ℓ , allora, usando la definizione di autoinduttanza $L = \Phi(\vec{B})/I$, la circuitazione di \vec{H} , $\oint \vec{H} \cdot d\ell = I_{conc}$, e supponendo valida la relazione $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, si ha $L_{1,2} = \mu S N_{1,2}^2 / \ell$. Da qui, supponendo che non ci sia dispersione di flusso magnetico, cioè $k = 1$, risulta $L_1/M = N_1/N_2$ e $L_2/M = N_2/N_1$. Inoltre si ha anche $L_1/L_2 = (N_1/N_2)^2$.

In altre parole, in un trasformatore le induttanze di primario e secondario sono legate tra di loro e con la mutua induzione attraverso semplici relazioni *costruttive*, che contengono solo il numero delle spire di primario e secondario. Inoltre i coefficienti di autoinduzione di primario e secondario sono in rapporto tra loro come il quadrato del rapporto del numero delle spire. Poiché normalmente il numero di spire è ben diverso tra primario e secondario, questo vuol dire che le induttanze sono anche molto differenti tra loro.

II. PRIMARIO E SECONDARIO

Le equazioni generiche dei circuiti di primario e secondario possono essere scritte nel dominio delle frequenze, supponendo d.d.p. alternate sinusoidali a frequenza angolare ω , come

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1)I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \quad (1)$$

$$V_{\omega 2} = (R_2 + j\omega L_2)I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1}, \quad (2)$$

dove abbiamo introdotto i fasori delle correnti e delle eventuali d.d.p. dovute a generatori presenti al primario e al secondario (la simbologia è ovvia) e le resistenze nel circuito primario e secondario, generalmente date dalla *somma* delle resistenze interne degli avvolgimenti r_1, r_2 e di eventuali resistenze aggiunte nei circuiti.

A. Trasformazione in tensione e in corrente

Supponiamo che il primario sia collegato a un generatore che fornisce una tensione alternata con frequenza angolare ω e ampiezza V_1 . Inoltre supponiamo che il secondario sia *aperto*, cioè che l'ampiezza I_2 della corrente che vi fluisce sia trascurabile. Le Eqs. 6 diventano:

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1)I_{\omega 1} \quad (3)$$

$$V_{\omega 2} = j\omega M I_{\omega 1}, \quad (4)$$

da cui, nell'importante ipotesi che la frequenza sia sufficientemente alta da permettere di trascurare le componenti resistive rispetto a quelle reattive (cioè che $\omega L_1 \gg R_1$),

$$T_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} = \alpha, \quad (5)$$

dove abbiamo introdotto il *rapporto di trasformazione in tensione* T_V e il parametro *costruttivo* $\alpha = N_2/N_1$.

Nelle approssimazioni fatte si ha che T_V non dipende da ω e inoltre che $V_{\omega 1}$ e $I_{\omega 1}$ sono sfasati tra di loro di $\pi/2$, per cui *a secondario aperto il trasformatore non assorbe alcuna potenza* al di fuori di quella spesa per effetto Joule su R_1 . Nell'impiego ordinario di un trasformatore casalingo, in cui esso serve per *ridurre* la tensione del generatore collegato al primario, N_1 è grande, per cui alta è la sua induttanza L_1 . Di conseguenza, l'approssimazione sopra citata è facilmente verificata anche per frequenze relativamente basse. Invece, se il trasformatore è montato in modo da *umentare* la tensione del primario, come si realizza nell'esperienza pratica, questa approssimazione può diventare più debole, almeno fino a frequenze dell'ordine del kHz, dato che in questo caso il numero di spire del primario può essere piccolo e dunque l'induttanza può ridursi.

Se vogliamo determinare il rapporto di trasformazione in corrente dobbiamo avere una corrente che fluisce nel secondario, che pertanto deve essere *chiuso* su un *carico*, che immaginiamo rappresentato dalla resistenza R_2

(carico puramente resistivo). Le Eqs. 6 diventano:

$$V_{\omega 1} = (R_1 + j\omega L_1)I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \quad (6)$$

$$0 = (R_2 + j\omega L_2)I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1}, \quad (7)$$

dato che supponiamo nulla la differenza di potenziale al secondario ($V_{\omega 2} = 0$). Si ottiene facilmente:

$$I_{\omega 2} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} I_{\omega 1}, \quad (8)$$

da cui, nella solita approssimazione che la frequenza sia sufficientemente alta da permettere di trascurare le componenti resistive rispetto a quelle reattive (cioè che $\omega L_1 \gg R_1$ e $\omega L_2 \gg R_2$):

$$T_A = \frac{I_2}{I_1} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{\alpha}, \quad (9)$$

dove abbiamo introdotto il *rapporto di trasformazione in corrente* T_A , che è dunque il reciproco di T_V .

Nelle approssimazioni fatte si ha che anche T_A non dipende da ω e inoltre le correnti di primario e secondario sono sfasate di π tra loro (ricordate che lo sfasamento tra tensioni e correnti di primario e secondario è generalmente definito a meno di un segno, cioè di $\pm\pi$, a causa del fatto che normalmente non si sa in che senso sono avvolti gli avvolgimenti).

B. Resistenza "vista" dal primario

Sostituendo l'Eq. 8 nella prima delle Eqs. 6 si ha

$$V_{\omega 1} = \left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2} \right) I_{\omega 1} = \quad (10)$$

$$= \left(R_1 + \frac{-\omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2 + j\omega L_1 R_2}{R_2 + j\omega L_2} \right) I_{\omega 1} \quad (11)$$

$$= \left(R_1 + \frac{j\omega L_1 R_2}{R_2 + j\omega L_2} \right) I_{\omega 1}, \quad (12)$$

dove abbiamo sfruttato l'ipotesi $M \simeq \sqrt{L_1 L_2}$. Nella solita approssimazione $\omega L_2 \gg R_2$, che ancora non era stata introdotta nella derivazione di Eq. 10, si ottiene allora:

$$V_{\omega 1} = \left(R_1 + \frac{L_1}{L_2} R_2 \right) I_{\omega 1} = \left(R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 \right) I_{\omega 1} \quad (13)$$

$$= \left(R_1 + \frac{1}{\alpha^2} R_2 \right) I_{\omega 1}. \quad (14)$$

Questa equazione è molto importante poiché ci dice che, nelle approssimazioni fatte, il primario si comporta in modo esclusivamente resistivo e come se fosse dotato di una resistenza $R_{eff} = R_1 + R_2/\alpha^2$. L'"interazione" fra primario e secondario che determina R_{eff} non deve stupirvi, essendo in sostanza legata al coefficiente di accoppiamento tra gli avvolgimenti, che abbiamo supposto unitario.

Una conseguenza ovvia, ma degna di segnalazione, di questo aumento della resistenza effettiva è che, se a circuito aperto (senza carico al secondario) l'approssimazione $\omega L_1 \gg R_1$ era ben verificata, essa potrebbe essere non più strettamente valida in presenza di R_2 . Una possibile verifica sperimentale può essere basata sulla misura dello sfasamento $\Delta\phi$ tra $V_{\omega 1}$ e $I_{\omega 1}$, che potrebbe essere significativamente modificato quando il carico resistivo viene collegato al secondario.

C. Autoinduzione e resistenze di primario e secondario

Nei trasformatori che si usano comunemente per alimentare, previo raddrizzamento e livellamento, dei dispositivi elettronici, il rapporto di trasformazione in tensione è dell'ordine di diverse decine (per i trasformatori disponibili in laboratorio, il cui secondario genera 8 V_{rms} nominali, si ha, nominalmente e per $f = 50$ Hz, $T_V \simeq 1/30 = \alpha = N_B/N_A$ (la denominazione con i pedici A e B a indicare primario e secondario "di progetto" per quei trasformatori si riferisce alla scheda di laboratorio). Pertanto i coefficienti di autoinduzione di primario e secondario, L_A e L_B , sono fortemente diversi fra loro. Per i trasformatori di laboratorio, si ha infatti $L_A = (N_A/N_B)^2 L_B = L_B/\alpha^2 \sim 10^3 L_B$.

Tra le varie conseguenze di questa circostanza c'è sicuramente il fatto che una frequenza angolare che permette di trascurare le componenti resistive rispetto alle reattive per uno degli avvolgimenti, non necessariamente rende valida la stessa approssimazione per l'altro avvolgimento.

Similmente, la costruzione del trasformatore implica che le resistenze interne di primario e secondario, r_1 e r_2 , possano essere notevolmente diverse. Se il trasformatore viene usato per ridurre l'ampiezza della d.d.p. del generatore collegato al primario, il secondario è costruito con un numero minore di spire, che spesso sono anche fatte con un conduttore di maggiore sezione per favorire il passaggio della corrente (nelle condizioni di questo esempio, al secondario la corrente ha intensità maggiore rispetto al primario). Infatti, nel caso dei trasformatori di laboratorio, è facile verificare con misure in corrente continua che $r_B \ll r_A$. Anche per le resistenze interne, allora, si può affermare che trascurare quella di un avvolgimento non autorizza necessariamente a trascurare quella dell'altro. Fortunatamente resistenza interna e induttanza aumentano o diminuiscono nello stesso verso, ma, purtroppo, mentre le induttanze scalano come il quadrato delle spire, le resistenze vanno, nella migliore delle ipotesi (cioè supponendo spire di analogo diametro fatte dello stesso filo), linearmente con il numero delle spire.

In sostanza, quindi, pur trascurando altri effetti che accenneremo nel seguito, si può sicuramente dire che le condizioni che ci hanno portato a determinare i rapporti di trasformazione in tensione e in corrente devono essere considerate come "ideali". Ancora una volta, dal punto di vista sperimentale la verifica può essere condotta mi-

surando gli sfasamenti rilevanti e confrontandoli con le aspettative del modello "ideale".

D. Trasformazione in potenza

Cominciamo con il ricordare un concetto che abbiamo già implicitamente impiegato: la potenza (*media*), cioè mediata nel tempo, è in generale determinata dall'espressione

$$P = \frac{1}{2} \text{Re}\{V_{\omega} \cdot I_{\omega}^*\} = \frac{1}{2} VI \cos(\Delta\phi), \quad (15)$$

dove V_{ω} e I_{ω} sono due generici fasori di tensione e corrente, con ampiezza rispettivamente V e I (entrambi reali), e $\Delta\phi$ è lo sfasamento tra di loro. Nel caso di un ramo resistivo, corrente e tensione sono in fase tra loro e la potenza è massima (essa viene utilizzata per l'effetto Joule).

Nelle approssimazioni che abbiamo impiegato finora, gli sfasamenti tra tensione e corrente sono nulli sia al primario che al secondario. Dunque la potenza assorbita dal generatore, che è pari a quella sviluppata nel primario, è

$$P_1 = \frac{V_1 I_1}{2} = R_{eff} \frac{I_1^2}{2} = \quad (16)$$

$$= R_1 \frac{I_1^2}{2} + R_2 \frac{I_1^2}{2\alpha^2} = P_{J1} + P_{L1}, \quad (17)$$

dove abbiamo indicato con P_{J1} la potenza "dissipata" dalla resistenza R_1 (la resistenza R_1 potrebbe anche includere, o essere rappresentata dalla sola, resistenza interna), e con P_{L1} la potenza media "immagazzinata", o associata, all'avvolgimento del primario (dunque di origine reattiva).

La potenza trasferita al carico, che abbiamo supposto di tipo resistivo, è

$$P_2 = P_{J2} = R_2 \frac{I_2^2}{2} = R_2 \frac{I_1^2}{2\alpha^2}, \quad (18)$$

dove abbiamo sfruttato il rapporto di trasformazione in corrente stabilito prima (la resistenza R_2 potrebbe anche includere la resistenza interna del secondario, posto che questa non sia trascurabile nelle effettive condizioni sperimentali). Osservate che, avendo supposto un carico resistivo, nel quale non c'è sfasamento tra corrente e tensione, la definizione di P_2 vale a prescindere dalle approssimazioni. Inoltre notate che, nelle condizioni che stiamo esaminando, cioè supponendo che anche al primario il carico sia puramente resistivo ($\Delta\phi = 0$), è $P_2 = P_{L1}$.

Definiamo *rapporto di trasformazione in potenza*, o *rendimento* η del trasformatore, il rapporto tra la potenza trasferita al carico e quella assorbita dal generatore depurata delle perdite per effetto Joule al primario. In altre parole

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 - P_{J1}}. \quad (19)$$

È evidente che nelle condizioni “ideali” che stiamo trattando, in cui tutte le approssimazioni supposte sono (perfettamente) soddisfatte, si ha $\eta = 1$, cioè il rendimento di un trasformatore “ideale” è sempre unitario.

1. Accoppiamento con il carico

La potenza del generatore è ovviamente tanto meglio accoppiata al carico quanto minori sono le perdite per effetto Joule al primario. Poiché il carico collegato al secondario è resistivo, si ha sempre $P_2 = R_2 I_2^2 / 2 = R_2 I_1^2 / (2\alpha^2)$. Ma, nel modello “ideale” che stiamo considerando, $I_1 = V_1 / R_{eff} = V_1 / (R_1 + R_2 / \alpha^2)$, per cui

$$P_2 = \frac{V_1^2}{2} \frac{R_2 / \alpha^2}{(R_1 + R_2 / \alpha^2)^2}. \quad (20)$$

Ponendo V_1 costante, come si verifica se il generatore di d.d.p. alternata è considerato *ideale*, quella appena scritta può essere considerata come una funzione di R_2 , che va a zero per $R_2 \rightarrow 0$ e $R_2 \rightarrow \infty$, e che ha un *massimo* per $R_2 = \alpha^2 R_1$ (tutto questo può essere facilmente verificato con pochi passaggi matematici).

Dunque il trasferimento di potenza dal primario al secondario è massimizzato per un determinato valore di R_2 , in corrispondenza del quale, a parità di tutti gli altri parametri, la potenza persa per effetto Joule nel circuito del primario è minimizzata. È interessante notare che in queste condizioni si ha $R_{eff} = 2R_1$, cioè la resistenza “effettiva” del primario è pari al doppio di R_1 . Di conseguenza, e sempre supponendo condizioni “ideali”, metà della potenza fornita dal generatore viene spesa per effetti di natura resistiva (la P_{J1} citata prima) e metà per effetti di natura reattiva. Si verifica, quindi, una condizione di matching tra le resistenze della sorgente e del carico, che, in definitiva, è simile, almeno dal punto di vista concettuale, a quella di un generatore di Thévenin collegato a un carico resistivo.

III. RENDIMENTO IN TRASFORMATORI REALI

Riassumiamo le principali approssimazioni fatte per giungere alla conclusione $\eta = 1$: (i) accoppiamento magnetico unitario, cioè $M \simeq \sqrt{L_1 L_2}$; (ii) componenti resistive trascurabili al primario, cioè $\omega L_1 \gg R_1$ e al secondario, cioè $\omega L_2 \gg R_2$. Inoltre (iii) abbiamo immaginato di poter trascurare l’energia, o potenza, spesa per l’isteresi ferromagnetica e per gli effetti delle correnti parassite nel circuito magnetico.

Nella realtà tutte queste approssimazioni non sono mai soddisfatte in modo completo. In primo luogo, qualsiasi trasformatore ha una parte di flusso che viene dispersa fuori dal circuito magnetico. Notate che di conseguenza il coefficiente di accoppiamento k non è mai perfettamente unitario, e quindi alcuni dei passaggi che abbiamo usato

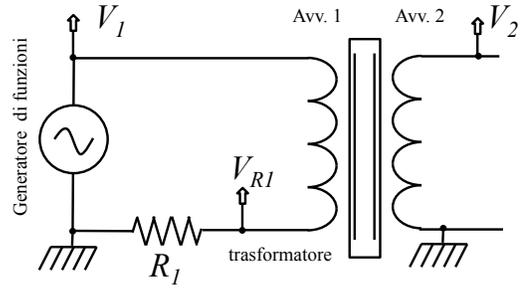


Figura 1. Schema per il circuito di misura delle caratteristiche del trasformatore realizzato nell’esperienza pratica e citato nel testo.

nelle equazioni scritte sopra non sono più completamente giustificati. Al giorno d’oggi sono frequenti costruzioni “toroidali” dei trasformatori che servono proprio per ridurre questa dispersione e aumentare il coefficiente di accoppiamento.

Inoltre gli effetti dissipativi associati alle (inevitabili) correnti parassite costituiscono un altro canale di perdita della potenza, che nella realtà è non trascurabile. Per limitare tali perdite il circuito magnetico viene tradizionalmente realizzato in forma di lamine isolate tra di loro. In questo modo la circolazione delle correnti parassite viene parzialmente impedita. Un’altra possibilità, molto frequentemente usata al giorno d’oggi, specie nei dispositivi *switching* che lavorano a frequenze relativamente alte (e dunque originando correnti parassite potenzialmente intense), consiste nell’usare materiali *isolanti* dotati di alta permeabilità magnetica. Le *ferriti* (genericamente ossidi di ferro) sono un ottimo esempio, e varie altre possibilità sono state rese disponibili grazie ai progressi nella scienza dei materiali.

A. Misura del trasferimento di potenza

Nell’esperienza pratica proposta in laboratorio, le misure vengono effettuate usando il circuito rappresentato in Fig. 1. Nella parte di maggiore interesse, il trasformatore è montato all’“inverso” rispetto alla progettazione, cioè il primario è costituito dall’avvolgimento in progetto pensato per funzionare da secondario (indicato come B nelle schede di laboratorio) e viceversa. Un’immediata conseguenza di questa scelta è che, per evitare problemi di varia natura, occorre che il generatore di funzioni nel circuito del primario eroghi una d.d.p. con un’ampiezza limitata (posta al massimo a 1 V_{pp}). Se così non fosse, al secondario si potrebbero registrare tensioni potenzialmente pericolose per persone e cose.

Il circuito permette la misura di tre segnali: V_1 è rappresentativo della d.d.p. applicata al primario, V_2 della d.d.p. al secondario, e V_{R1} della intensità di corrente I_1 che circola nel primario (infatti è sempre $V_{R1} = R_1 I_1$).

Una parte dell'esperienza prevede di verificare, a secondario *aperto*, dunque senza la resistenza R_2 indicata nello schema, il comportamento del primario in funzione della frequenza f prodotta dal generatore. Da una precedente esperienza sappiamo già che il circuito del primario costruito secondo quello schema si comporta come un *integratore*, o filtro passa-basso. In effetti nell'esperienza pratica si osserva come il guadagno, o attenuazione, cioè il rapporto tra le ampiezze, o ampiezze picco-picco, V_{R1} e V_1 (vedi Fig. 1) segue il comportamento atteso per un tipico filtro passa-basso, almeno per frequenze non troppo alte (circa sotto 20 kHz, oltre possono diventare rilevanti accoppiamenti induttivi e capacitivi spuri). Usando $R_1 = 33$ ohm (nominali), ed essendo la resistenza interna $r_1 = r_B \sim 1.6$ ohm (dunque trascurabile, almeno in corrente continua), la frequenza di taglio, corrispondente a uno sfasamento misurato $\Delta\phi_T = (0.235 \pm 0.012) \pi$ rad (compatibile con $\pi/4$), è $f_T \simeq 1.5$ kHz, da cui si può stimare $L_B \simeq R_1/(2\pi f_T) \approx 3.5$ mH.

Per la stima di L_B si può anche usare l'approccio sviluppato in una precedente esperienza, per cui $L_B \simeq V_1 R_1 / (V_{R1} 2\pi f)$. Per $f \simeq 3$ kHz, prescelta come frequenza di lavoro per il resto dell'esperienza, si ottiene $L_B \approx 3.2$ mH (si rinuncia a fornire l'incertezza perché la condizione necessaria per l'applicazione del metodo, che lo sfasamento approssimi $\pi/2$, non è verificata). Il rapporto di trasformazione in tensione, $T_V = V_2/V_1$, nella configurazione e alla frequenza descritte, è misurato a secondario aperto come $T_V = (48.1 \pm 2.9) \times 10^{-3}$.

Applicando un carico resistivo al secondario, cioè collegando R_2 come in Fig. 1, si riscontra una sensibile riduzione dello sfasamento $\Delta\phi$ tra tensione e corrente al primario. In queste condizioni, infatti, il modello che abbiamo trattato indica come la resistenza "vista" dal primario diventi $R_{eff} = R_1 + R_2 T_V^2$; a causa dell'elevato rapporto di trasformazione nelle condizioni considerate, i termini resistivi non possono più essere considerati trascurabili rispetto a quelli reattivi, per cui le approssimazioni usate nel modello non sono più rigorosamente valide.

Per analizzare il trasferimento di potenza da primario a secondario si sono scelti diversi valori della resistenza di carico al secondario R_2 e si è mantenuta fissa, al valore $V_1 = (412 \pm 16)$ mV_{pp}, la d.d.p. fornita dal generatore. Infatti, soprattutto in conseguenza della variazione della resistenza effettiva R_{eff} , il valore di R_2 determina l'intensità di corrente I_1 che scorre nel primario e quindi la caduta di potenziale sulla resistenza interna r_G del generatore. Affinché il valore di V_1 rimanga fisso, occorre agire sulla regolazione di ampiezza del generatore, diminuendola all'aumentare di R_2 . Se V_1 rimane costantemente fisso, allora la potenza trasferita al secondario è attesa seguire l'andamento di Eq. 20. D'altra parte, essendo noto il valore di R_2 ed eseguendo la misura di V_2 , è possibile determinare sperimentalmente la potenza impiegata dal carico, che è $P_2 = P_{J2} = V_2^2 / (2R_2)$.

La Fig. 2 mostra il risultato delle misure, assieme al best-fit condotto usando la funzione modello di Eq. 20 e lasciando liberi i parametri indicati come V_1 e α . I

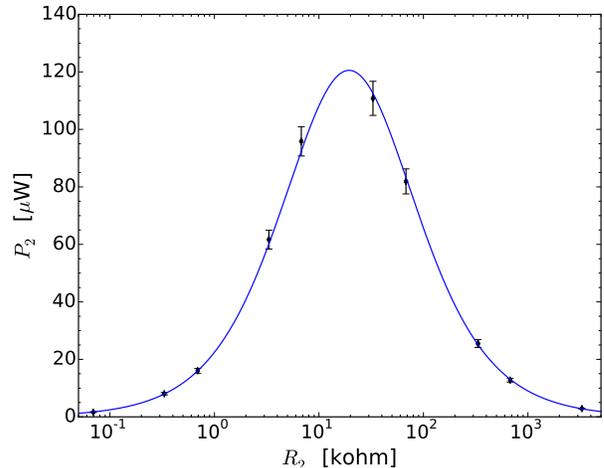


Figura 2. Misura della potenza $P_2 = P_{2J}$ trasferita al secondario e qui impiegata per effetto Joule dal carico resistivo R_2 in funzione di R_2 . I dati sono stati acquisiti mantenendo costantemente fissa l'ampiezza V_1 , come specificato nel testo. La linea continua rappresenta il best-fit discusso nel testo. Notate la rappresentazione semilogaritmica e l'unità di misura dell'asse verticale, conseguenza del fatto che, nelle condizioni dell'esperienza, le potenze in gioco sono piccole in termini assoluti.

risultati del best-fit (opzione `absolute_sigma = False`) sono

$$\alpha = 24.22 \pm 0.04 \quad (21)$$

$$V_1 = (178.7 \pm 0.8) \text{ mV} \quad (22)$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 2.2/8 \quad (23)$$

$$\text{norm. cov.} = 0.07. \quad (24)$$

Notate che, nel calcolo della potenza P_2 , devono essere impiegate le ampiezze di V_2 , e non le ampiezze picco-picco, che invece sono quelle effettivamente misurate. Analogamente, il parametro V_1 che compare nella funzione modello deve essere inteso come un'ampiezza, e non come un'ampiezza picco-picco. Ciò stabilito, risulta evidente che l'andamento atteso è riprodotto nei dati, che il χ^2_{rid} è piuttosto piccolo, a causa della consueta sovrastima delle incertezze, e anche che i parametri ottenuti possono essere considerati in accordo solo *grossolano* (ordini di grandezza) con le attese. Infatti, il valore di V_1 ottenuto dal fit è in disaccordo con il valore misurato e tenuto costantemente fisso, mentre il parametro α , che dovrebbe essere pari al reciproco del rapporto di trasformazione in tensione, è in disaccordo da $1/T_V$ misurato. Queste discrepanze rispetto alle aspettative possono essere facilmente giustificate con le carenze del modello, basato su approssimazioni che verosimilmente non sono rispettate in maniera rigorosa nell'esperienza pratica. Tuttavia il messaggio principale dell'analisi è chiaro: anche per un trasformatore reale, il trasferimento di potenza dipende dal valore di R_2 e raggiunge un massimo per $R_2 \simeq \alpha^2 R_1 \approx 19$ kohm (nel caso considerato).

B. Valutazione del rendimento

Le condizioni di lavoro dell’esperienza pratica, in cui il trasformatore viene impiegato all’inverso e a frequenze ben diverse rispetto a quelle di progetto, conducono intuitivamente a un rendimento decisamente sub-unitario. D’altra parte l’impiego “secondo progetto” del dispositivo renderebbe praticamente impossibile stimare il rapporto di trasformazione in potenza, che in quel caso sarebbe basato su misure affette da incertezze estremamente grandi (frutto di differenze tra valori molto simili, come insegnato dall’esperienza).

Invece operando in queste “strane” condizioni è piuttosto agevole valutare η . Allo scopo, nell’esperienza pratica è stato scelto un valore di R_2 per il quale il trasferimento di potenza fosse per quanto possibile prossimo al massimo. In particolare, è stata scelta $R_2 = (33.3 \pm 0.3)$ kohm e si è fissata la frequenza al valore $f = (2927 \pm 2)$ Hz. Con questi parametri si sono ottenuti i seguenti valori: $V_1 = (312 \pm 11)$ mV_{pp}, $V_{R1} = (148 \pm 5)$ mV_{pp}, $V_2 = (4.24 \pm 0.13)$ V_{pp}, e si è osservato uno sfasamento $\Delta\phi = (0.041 \pm 0.005)$ π rad tra V_1 e V_{R1} (che ricordiamo essere segnale rappresentativo di I_1). Notate come questo sfasamento sia fortemente diverso dal valore $\pi/2$ atteso, in condizioni “ideali”, e misurato sperimentalmente per circuito, e anche sensibilmente diverso dallo sfasamento nullo atteso in condizioni “ideali”. Osservate anche come il rapporto tra le ampiezze V_2 e V_1 sia diverso (minore) rispetto a quello misurato in assenza di carico, cioè a secondario aperto.

Da queste misure è possibile ricavare l’intero set di

potenze necessarie per definire η . Ricordiamo infatti che

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 - P_{J1}} \quad (25)$$

$$P_2 = P_{J2} = \frac{V_2^2}{2R_2} \quad (26)$$

$$P_1 = P_{GEN} = \frac{V_1 V_{R1}}{2R_1} \cos(\Delta\phi) \quad (27)$$

$$P_{J1} = \frac{V_{R1}^2}{2R_1}, \quad (28)$$

dove tutte le d.d.p. vanno intese come ampiezze, e non ampiezze picco-picco, e dove abbiamo trascurato le resistenze interne al primario e al secondario. Questa operazione appare lecita, poiché $R_1 = (32.6 \pm 0.4)$ ohm è maggiore di $r_B = (1.6 \pm 0.3)$ ohm, e R_2 è nettamente maggiore di $r_A = (35.1 \pm 0.4)$ ohm (tutti i valori qui riportati sono stati ottenuti con misure fatte in continua).

I valori ottenuti ponendo attenzione alla propagazione degli errori sono: $P_2 = (67.5 \pm 4.8)$ μ W, $P_1 = (177 \pm 14)$ μ W, $P_{J1} = (84.0 \pm 6.7)$ μ W, da cui si ottiene $\eta = 0.73 \pm 0.17$ (errore propagato in quadratura). Nonostante l’ampia incertezza attribuita alle varie misure, dovuta all’incertezza di calibrazione e anche a quella di lettura, specie per i segnali più deboli e rumorosi, il dato non è compatibile con l’unità. Anche in questo caso la discrepanza può essere facilmente giustificata tenendo conto delle approssimazioni del modello “ideale”, che conduceva al rendimento unitario, oltre che, ovviamente, alle effettive perdite di potenza dovute ai tanti effetti dissipativi che abbiamo trascurato (effetto Joule sulla resistenze interne, e, più ancora, energia spesa nel ciclo di isteresi e persa dalle correnti parassite).