

GRAVITAZIONE

UNIVERSALE

GRAVITAZIONE UNIVERSALE

1.1 La filosofia antica.

La concezione filosofica dominante prima del 1600 era che i moti dei corpi celesti fossero perfetti, incorruttibili ed eterni mentre quelli terrestri, detti anche sublunari, fossero imperfetti e variabili. Fu Platone (427-347 a.C.) prima ed Aristotele (384-322 a.C.) poi a suggerire questa netta divisione fra cielo e terra, assegnando ai moti delle stelle un'orbita circolare uniforme di cui la terra ne costituiva il centro fisso e ai moti terrestri una caratteristica rettilinea con un inizio ed una fine.

Questa concezione geocentrica o tolemaica (Tolomeo 100-170 d.C.) dell'universo, fu assunta come propria anche dalla Chiesa cattolica che vedeva in ciò un privilegio concesso all'uomo culmine e coronamento della creazione divina del mondo. Il cielo, sede della divinità non poteva che essere perfetto eterno e incorruttibile; la Terra, casa dell'uomo caduco e peccatore, non poteva che essere il luogo dell'imperfezione e della precarietà.

1.2 Galileo Galilei.

Nel 1600 Galilei rovescia completamente il discorso filosofico di Aristotele sostenendo semplicemente che un'affermazione circa le leggi della Natura, per essere accettata deve essere provata da **esperimenti riproducibili**. Non basta cioè il linguaggio ed un ragionamento per quanto logico e raffinato a descrivere in modo esauriente le leggi fisiche, ma occorre passare le affermazioni fatte al vaglio della verifica sperimentale utilizzando la materia "volgare", se occorre, fatta per esempio di pietre levigate, corde, piani inclinati, orologi, metri, goniometri ecc. *"I discorsi nostri hanno a essere intorno al mondo sensibile e non sopra un mondo di carta"*.

In questo modo Galilei inventa una nuova metodologia di indagine della realtà che noi oggi chiamiamo **scienza** (di primo livello). E' dunque scienza galileiana tutto ciò che, scritto in linguaggio matematico, può essere verificato sperimentalmente da chiunque.

Si badi bene che questo atteggiamento di Galilei riguardo la conoscenza del mondo fisico deriva dalla sua profonda fede nel creatore del mondo e da una reale umiltà intellettuale. Galilei diceva infatti che non dobbiamo avere la pretesa di capire come Dio ha fatto il mondo semplicemente ragionando su di esso, perché Dio è infinitamente più intelligente di noi e potrebbe aver preso strade che noi neanche ce le immaginiamo per creare e governare l'Universo. Fra le infinite logiche possibili, Dio ne aveva scelta una sola e stava a noi capire quale, ponendo le domande giuste alla Sua creazione.

Secondo la sua mentalità quindi, l'unica via corretta da seguire era quella di porre domande precise al Creatore attraverso l'esecuzione di esperimenti che

mettessero in evidenza le leggi matematiche che governano il mondo fisico. Ogni legge trovata, era quindi per lui una risposta del Creatore all'umile creatura che si mette alla ricerca della verità accettando di essere nel buio e nell'ignoranza più completa.

Per Galilei infine era ovvio che fosse il linguaggio della matematica a descrivere le leggi fondamentali della Natura perché se Dio, Logica Assoluta, ha creato il mondo, non può non averlo fatto usando il linguaggio più logico che è la matematica. *“Questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'Universo), non si può intendere se prima se prima non si impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri nei quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.” Opere VI, 232.*

2.1 Le tre leggi (empiriche) di Keplero.

1. Le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.
2. Il raggio vettore che congiunge il Sole con il pianeta, copre aree uguali in tempi uguali (la velocità areolare è costante):

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \text{cost.} \quad (1.1)$$

3. Il rapporto fra il quadrato del periodo di rivoluzione (T) ed il cubo del semiasse maggiore dell'orbita ellittica (a) è costante per tutti i pianeti:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cost.} \quad (1.2)$$

Commenti.

1. E' chiara la visione eliocentrica o copernicana del sistema solare, in netto contrasto con quella geocentrica allora dominante. E' la terra che si muove attorno al Sole fisso nel fuoco dell'ellisse e non viceversa. Fra l'altro l'orbita non è neanche perfetta come un cerchio ma schiacciata come una ellisse. Anche Galileo credeva nel sistema eliocentrico e diceva che sostenere che fosse l'intero universo a girare attorno a noi e non viceversa era come pensare che per osservare un intero paese, un ipotetico turista in cima ad una torre pretendesse di stare fermo e che qualcuno gli ruotasse il paese intorno. Egli però non accettava l'idea che le orbite non fossero circolari per la sua visione divina ed armonica del mondo derivante dalla sua fede e morì con tale convinzione. C'è da dire che la visione eliocentrica del sistema solare non è nata con Copernico e Keplero, ma era già stata ipotizzata e avanzata su ragionevoli basi osservative dall'astronomo greco Aristarco di Samo

(310-230 a.C.) ma poi dimenticata nel corso dei secoli anche a causa del disastroso incendio della biblioteca di Alessandria d'Egitto.

2. Il significato profondo di questa legge risiede nella conservazione del momento angolare. Fissato un sistema di riferimento $oxyz$, definiamo momento angolare di un corpo di massa μ la quantità: $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ dove \vec{r} è il vettore posizione del corpo e $\vec{p} = \mu \vec{v}$ la sua quantità di moto. E' facile dimostrare che per un corpo soggetto alla forza di gravità (che è una forza centrale) il momento angolare si conserva. Infatti la variazione del momento angolare è:

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \quad (1.3)$$

Il primo addendo è nullo perché la velocità è parallela alla quantità di moto; il secondo è nullo perché la forza è centrale ed è perciò sempre diretta verso il centro di gravità. Quindi, se la variazione del momento angolare è nulla esso è costante.

Ora, l'area infinitesima spazzata dal raggio vettore è: $\Delta A = \frac{1}{2} r^2 \Delta \theta$ e la sua variazione nel tempo è:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{J}{2\mu} \quad (1.4)$$

Allora da ciò discende che essendo il momento angolare $\vec{J} \propto \frac{\Delta A}{\Delta t}$ si

ottiene che la velocità areolare sia costante.

Il motivo fisico ancora più profondo per cui si conserva il momento angolare è stato scoperto solo di recente da E. Noether (1882-1935) nel 1917. Esso risiede nell'invarianza per rotazione dell'energia totale di un corpo immerso in un campo gravitazionale. Ciò a sua volta significa che lo spazio fisico è isotropo, ossia ogni direzione è del tutto identica ad una qualunque altra. Tale tipo di analisi, sebbene estremamente interessante, ci porterebbe però troppo lontano per gli scopi che ci siamo prefissi in queste pagine.

3. La terza legge di Keplero contiene un grande tesoro che Newton seppe scoprire e valorizzare. Esso consiste nella **legge di Gravitazione Universale** che in forma scalare si scrive:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} \quad (1.5)$$

Vediamo come.

Un pianeta (per es. la Terra) di massa trascurabile rispetto al Sole che si muove attorno alla sua stella di moto circolare uniforme è soggetto alla forza centripeta:

$$F = m_T \omega^2 R \quad (1.6)$$

che scritta tenendo conto che $\omega = \frac{2\pi}{T}$ diventa:

$$F = m_T \frac{4\pi^2}{T^2} R \quad (1.7)$$

Ora sfruttando la terza legge di Keplero otteniamo:

$$F = \frac{4\pi^2}{K} \cdot \frac{m_T}{R^2} \quad (1.8)$$

dove abbiamo indicato con K la costante di proporzionalità presente nella terza legge di Keplero e abbiamo sostituito il semiasse maggiore dell'orbita a con il raggio dell'orbita circolare uniforme R .

La forza centripeta che tiene legato il pianeta al Sole non è altro che la forza di gravità, per cui la (1.8) rappresenta la forza di gravità con cui il Sole attira il pianeta. Ma per il 3° principio della dinamica di azione e reazione è anche la forza con cui il pianeta attira il Sole, ossia:

$$F_{TS} = \frac{4\pi^2}{K} \cdot \frac{m_T}{R^2} = \frac{4\pi^2}{K_0} \cdot \frac{m_S}{R^2} = F_{ST} \quad (1.9)$$

dove K_0 è una costante che dipende solo dal pianeta e non da ciò che ci gira attorno ed m_S è la massa del Sole. Dalla (1.9) deriva che $Km_S = K_0m_T$ è una costante fondamentale della fisica che non dipende da nulla, né dal pianeta né dal Sole. Se quindi indichiamo con G la quantità:

$$G = \frac{4\pi^2}{Km_S} = \frac{4\pi^2}{K_0m_T} \quad (1.10)$$

la (1.9) diventa:

$$F_{TS} = G \frac{m_S m_T}{R^2} \quad (1.11)$$

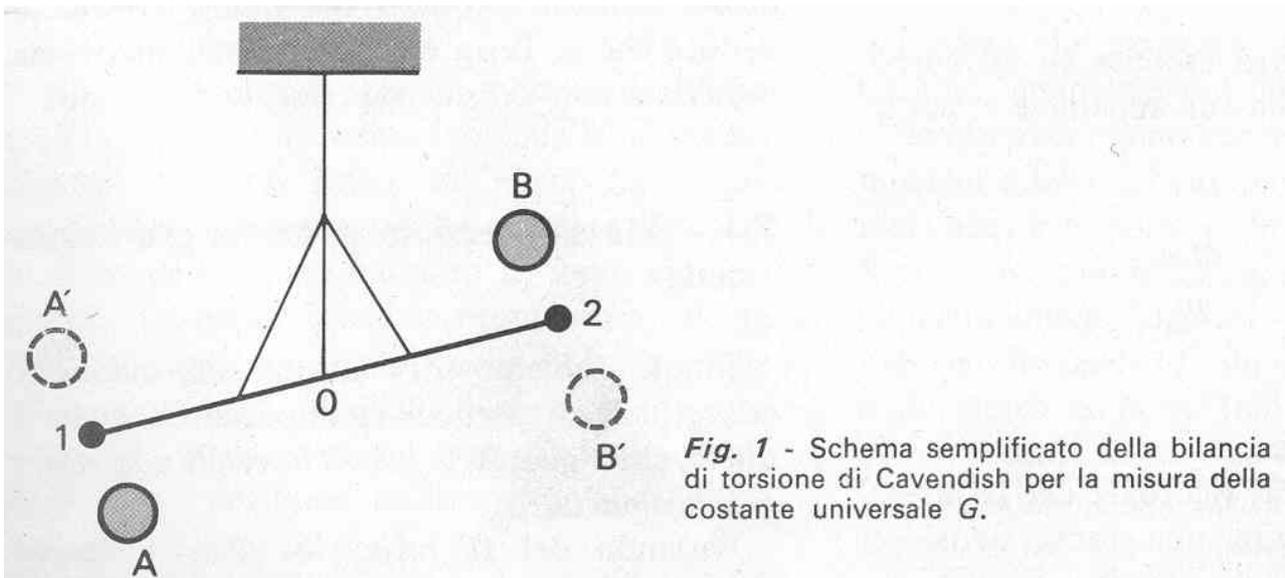
La (1.11) è la **LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE** in forma scalare trovata da **Newton**. Essa afferma che due corpi si attraggono con una forza che è direttamente proporzionale al prodotto delle loro masse gravitazionali (ossia cariche gravitazionali!) ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza. La costante G detta di gravitazione universale vale:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{Kg}} \quad (1.12)$$

e fu misurata sperimentalmente dal fisico Cavendish anni dopo grazie ad un ingegnoso esperimento descritto di seguito.

2.2 La misura di G: Cavendish pesa la Terra.

Grazie ad una bilancia a torsione (Fig. 1) Cavendish riuscì a misurare la costante G. Egli prese un filo metallico attaccato ad un estremo al soffitto e all'altro estremo legato al centro di un'asta rigida. Agli estremi dell'asta pose due sfere identiche di massa nota e, molto vicino ad esse altre due sfere identiche molto pesanti. In base alla torsione del filo dovuto all'attrazione della forza gravitazionale agente sulle masse in gioco, Cavendish riuscì a misurare l'intensità della forza gravitazionale in maniera indipendente e, conoscendo il valore "esatto" di tutte le masse e delle loro distanze ricavò G. La rotazione della bilancia era ovviamente piccolissima e quindi Cavendish amplificò l'effetto aiutandosi con uno specchietto collegato al filo verticale sul quale faceva incidere un raggio di luce che veniva poi riflesso su una parete lontana graduata. In questo modo, piccole torsioni della bilancia producevano effetti facilmente visibili sullo schermo.



Con questo esperimento si dice che Cavendish pesò la Terra. Infatti la forza con cui la Terra attira un oggetto è il suo peso: $F=mg$. Ma la stessa forza è anche esprimibile usando la legge di gravitazione universale (1.5) per cui si ha:

$$mg = G \frac{m \cdot M_T}{R^2} \Rightarrow M_T = \frac{R^2 g}{G} \approx \frac{(6.4 \cdot 10^6)^2 \cdot 10}{6.67 \cdot 10^{-11}} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg} \quad (1.13)$$

e quindi si riesce a determinare la massa della Terra conoscendone il raggio.

3 Il problema dei due corpi.

3.1 Introduzione.

Il problema più importante di tutta la meccanica classica è il cosiddetto problema dei due corpi. Esso riguarda la determinazione dell'equazione del moto di due corpi attratti da una forza centrale che varia come l'inverso del quadrato della distanza fra i due corpi stessi, così com'è la forza gravitazionale o elettrostatica.

3.2 Impostazione del problema.

Si considerino due corpi puntiformi di massa m_1 e m_2 posti rispettivamente alla distanza r_1 e r_2 dall'origine di un sistema di riferimento inerziale $oxyz$. Scriviamo le equazioni della dinamica per i due corpi:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \end{cases} \quad (1.14)$$

dove \vec{F}_{12} è la forza agente sul corpo 1 dovuto al corpo 2; \hat{r}_{21} è il versore che congiunge il corpo 1 con il corpo 2, ossia: $\hat{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Dalla (1.14) è evidente che sommando la prima equazione con la seconda si ottiene la conservazione della quantità di moto totale poiché il sistema è isolato. Moltiplicando la 1° equazione per m_2 e la seconda per m_1 e sottraendo la seconda dalla prima si ottiene dopo facili calcoli:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (1.15)$$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la cosiddetta massa ridotta dei due corpi e risulta essere più piccola della più piccola delle due masse coinvolte. \vec{r} è il raggio vettore del corpo 2 rispetto al corpo 1 e rappresenta quindi la sua posizione relativa. La (1.15) è molto importante perché coinvolge un solo vettore posizione e rappresenta l'equazione del **moto di una sola particella di massa ridotta μ** soggetta alla forza $-G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$.

3.3 Soluzione del problema.

Per la soluzione del problema consideriamo dapprima che c'è una quantità conservata (o integrale primo del moto) molto importante. Esso è il momento angolare del sistema ossia:

$$\vec{J} = \mu \vec{r} \times \vec{v} = \mu r^2 \omega \hat{z} \quad (1.16)$$

Questo perché la forza è di tipo centrale (ad un livello più profondo si può dimostrare che \vec{J} è conservato perché l'energia totale del sistema è invariante per rotazione). Ciò implica che il moto dei due corpi avviene in un piano formato dal vettore posizione e velocità iniziali. In questo piano scegliamo come sistema di coordinate quelle polari r e φ . Possiamo quindi limitarci a considerare l'equazione per il solo scalare r che dipenderà dall'angolo φ . Ricordiamoci anche che se descriviamo un fenomeno da un sistema rotante (non inerziale) di assi coordinati, si origina una forza centrifuga fittizia $\mu\omega^2 r$. In questo sistema rotante l'equazione del moto è:

$$\mu \ddot{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} + \mu \omega^2 r \quad (1.17)$$

In questa equazione sia r che ω variano con φ ed ovviamente nel tempo. La (1.16) permette di ricavarci ω in funzione di J ed r :

$$\omega^2 = \frac{J^2}{\mu^2 r^4} \quad (1.18)$$

per cui la (1.17) diventa:

$$\mu \ddot{r} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} + \frac{J^2}{\mu r^3} \quad (1.19)$$

dove ora solo r varia col tempo poiché J è costante. La soluzione della (1.19) è di importanza fondamentale nella storia della meccanica celeste: essa governa il movimento dei pianeti, delle stelle doppie e dei satelliti.

A questo punto è opportuno riscrivere la (1.17) tenendo presente che r è una funzione di φ , $r=r(\varphi)$ e che quindi la derivata prima rispetto al tempo diventa:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \omega \frac{dr}{d\varphi} = \frac{J}{\mu r^2} \frac{dr}{d\varphi} \quad (1.20)$$

Un procedimento simile si utilizza per la derivata seconda.

Introducendo poi la funzione $w(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$ otteniamo per la (1.17):

$$\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + w = \frac{\mu G m_1 m_2}{J^2} \quad (1.21)$$

Il membro di destra è una costante perciò l'equazione differenziale ammette una soluzione molto semplice. Infatti il primo membro non è altro che **l'equazione differenziale di un oscillatore armonico per l'inverso della distanza r !** La soluzione è dunque:

$$w = A \cos \varphi + \frac{\mu G m_1 m_2}{J^2} \quad (1.22)$$

Ricordandoci che $w = \frac{1}{r}$ otteniamo l'equazione di una CONICA in coordinate polari:

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{1}{s\varepsilon}(1 - \varepsilon \cos \varphi)} \quad (1.23)$$

dove abbiamo posto:

$$\frac{1}{s\varepsilon} = \frac{\mu G m_1 m_2}{J^2}; \quad \frac{1}{s} = -A \quad (1.24)$$

ε è l'eccentricità della conica secondo lo schema:

$\varepsilon = 0$	$0 < \varepsilon < 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon > 1$
Cerchio	Ellisse	Parabola	Iperbole

Tabella 1.

ed s il fattore di scala della traiettoria fisica.

L'inverso dell'equazione (1.23) è riportata nella Fig. 2 in cui si è scelto $s\varepsilon = 1$ e si sono plottate 6 curve con eccentricità comprese fra 0 e 1.25, passando da un cerchio ad una iperbole attraverso una parabola con eccentricità = 1. Per il sistema Sole-Terra si avrebbe $s\varepsilon = 1.5 \cdot 10^{11}$ m che rappresenta la distanza media Sole-Terra ossia circa 150 milioni di Km. Il centro di massa del sistema Sole-Terra (praticamente il centro del Sole) è nell'origine del sistema di riferimento cartesiano che rappresenta quindi il centro di forza.

Un commento molto importante: la soluzione dell'equazione del moto (1.23) per $0 < \varepsilon < 1$ rappresenta orbite chiuse! Ossia orbite in cui 2 perielii consecutivi sono distanziati dall'angolo costante $\Delta\varphi = 2\pi$ (π e 3π). Nella teoria di Newton non c'è assolutamente spazio per il ben noto effetto che va sotto il nome di "**Precessione degli Equinozi**" previsto teoricamente dalla teoria generale della relatività e misurato sperimentalmente per l'orbita di Mercurio. Avremo modo più avanti di approfondire l'argomento.

Prima di vedere qualche esempio di traiettoria, ricordiamoci che il campo di gravità è un campo conservativo per l'energia meccanica totale (ad un livello più profondo ciò è vero perché l'energia totale del sistema non dipende dal tempo), ossia si conserva la quantità:

$$E = T + U = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U = \frac{J^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_{\min}} \right)^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r_{\min}} = \frac{J^2}{2\mu} \left(\frac{1}{r_{\max}} \right)^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r_{\max}} \quad (1.25)$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che la componente radiale (ossia lungo r) del vettore velocità è 0 al perielio o all'afelio. Dall'equazione del moto (1.23), si ha per $\varphi = \pi$ (al perielio) e $\varphi = 0$ (all'afelio):

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{1}{s\varepsilon}(1 + \varepsilon); \quad \frac{1}{r_{\max}} = \frac{1}{s\varepsilon}(1 - \varepsilon) \quad (1.26)$$

Sostituendo queste espressioni nella (1.25) otteniamo l'espressione dell'energia totale del sistema in funzione dell'eccentricità e viceversa:

$$E = -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2J^2}(1 - \varepsilon^2); \quad \varepsilon = \left(1 + \frac{2EJ^2}{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

A questo punto è utile riassumere la relazione esistente fra l'energia totale dei due corpi, l'eccentricità dell'orbita e la sua forma geometrica espressa dall'equazione (1.27) nella tabella sottostante:

Forma dell'orbita	Eccentricità ε	Energia totale E	STATO
Cerchio	$\varepsilon = 0$	$E = -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2J^2}$, minima!	Legato
Ellisse	$0 < \varepsilon < 1$	$E = -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2J^2}(1 - \varepsilon^2) < 0$	Legato
Parabola	$\varepsilon = 1$	$E = 0$	Asintoticamente libero
Iperbole	$\varepsilon > 1$	$E = -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2J^2}(1 - \varepsilon^2) > 0$	Non legato

Tabella 2.

Per la Terra si ha:

$$J \approx 2.7 \cdot 10^{40} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$E \approx -\frac{\mu G^2 m_1^2 m_2^2}{2J^2} \approx -\frac{Gm_1\mu}{2R} \approx -2.7 \cdot 10^{33} \text{ J} \quad (1.28)$$

dove si è approssimata l'orbita della Terra con una circonferenza e questo è vero a meno di 3 parti su 10000 per quanto riguarda l'energia totale.

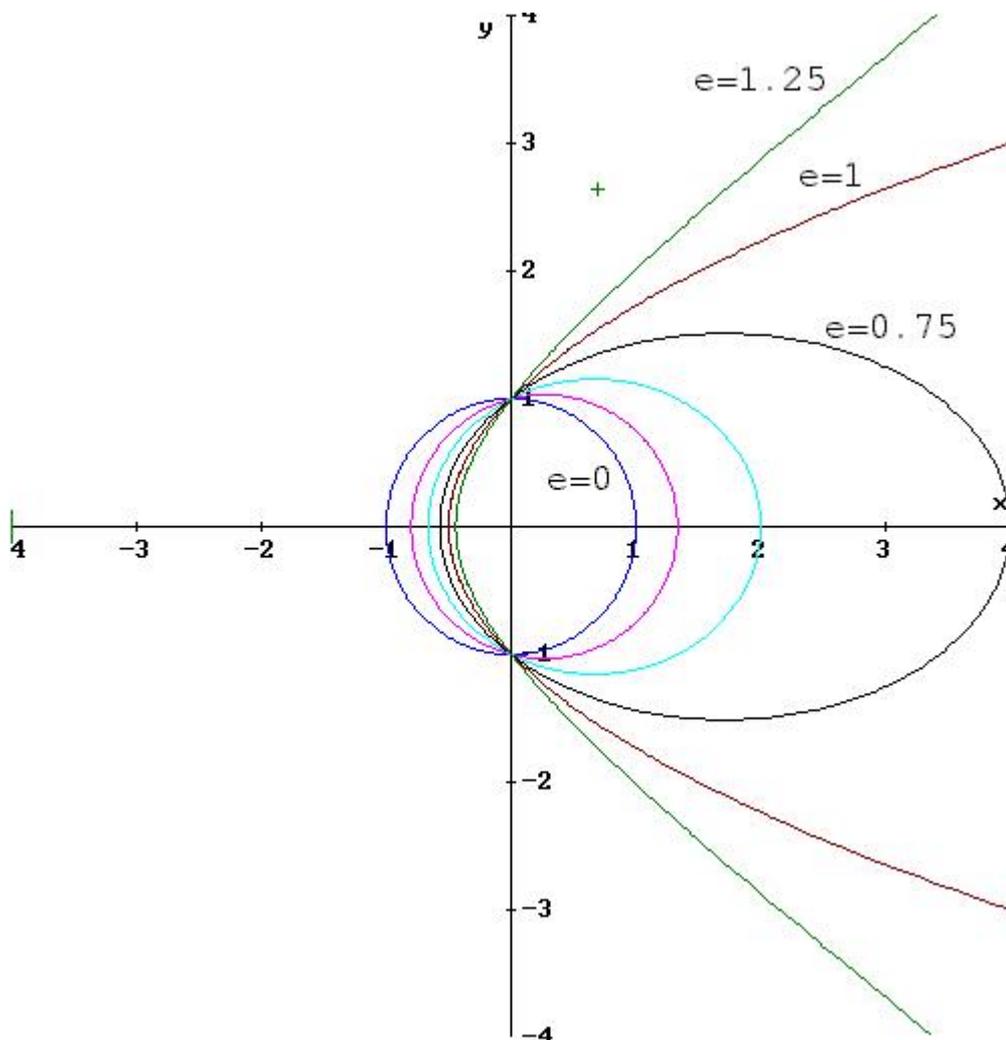


Fig. 2
 Grafico delle traiettorie di un sistema binario tipo Sole Terra con fattore $s\varepsilon = 1$ e con eccentricità e variabile da 0 (cerchio) a 1 (parabola) e 1.25 (iperbole). L'origine degli assi (posizione del centro di forza) è il centro dell'orbita circolare, oppure un fuoco per le ellissi; oppure il fuoco per la traiettoria parabolica.

3.4 L'energia potenziale.

Interessante è anche un commento alla equazione (1.19) che ci fornisce la forza nella direzione radiale in funzione della distanza r . Come ben sappiamo, data la funzione energia potenziale $U(r)$, la forza da essa prodotta è:

$$\mu \ddot{r} = F = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad (1.29)$$

dunque l'energia potenziale totale (o efficace) che genera il moto di un sistema a 2 corpi soggetto ad una forza centrale tipo quella gravitazionale è:

$$U_{eff.}(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} + \frac{J^2}{2\mu r^2} = U_{grav.}(r) + U_{rep.}(r) \quad (1.30)$$

Come si vede, essa è composta da 2 termini: il primo è quello propriamente dovuto all'interazione gravitazionale, mentre il secondo è un termine repulsivo poiché dà origine ad una forza positiva. Questo secondo contributo all'energia potenziale deriva dalla rotazione del corpo e più precisamente dalla **conservazione del momento angolare J** : più il corpo 1 tende ad avvicinarsi al corpo 2 (e viceversa) e più il termine repulsivo domina su quello attrattivo: il risultato è che, da una certa distanza in poi, i due corpi si respingono, ossia si allontanano. Ovviamente questo è strettamente vero per

corpi puntiformi. Per corpi sferici estesi come lo sono due corpi celesti, ciò non succede se il parametro dell'urto è inferiore alla somma dei raggi dei due oggetti. In questo caso ci sarà l'urto. A grandi distanze invece, domina il termine attrattivo gravitazionale ed i due corpi tendono ad avvicinarsi.

L'energia potenziale gravitazionale, quella repulsiva e quella efficace, sono riportate nella Fig. 3 sottostante.

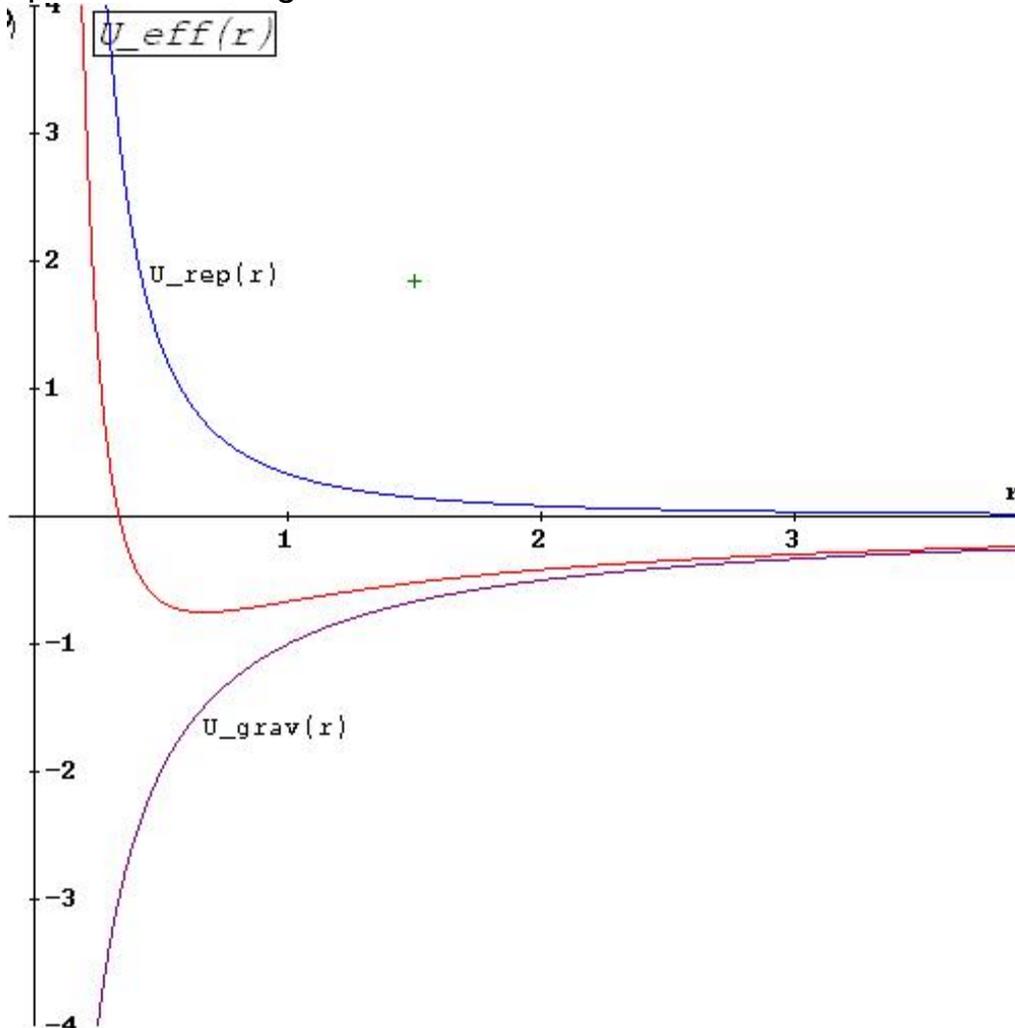


Fig. 3

L'energia potenziale gravitazionale (in viola), quella repulsiva (in blu) e quella efficace (in rosso, somma delle 2), per un sistema a due corpi legati dalla forza di gravità. Le unità di misura sono arbitrarie.

3.5 Effetto Fionda

Se uno dei due corpi è molto più leggero dell'altro (tipo una sonda spaziale ed un pianeta) accade che venga scaraventato violentemente nello spazio profondo determinando una sorta di “**effetto fionda**”. Questo è il principio usato nei viaggi spaziali per accelerare le sonde senza accendere i motori e sprecare carburante prezioso. Per la sonda Galileo per esempio, destinata a raggiungere Giove, prima la si è lanciata verso Venere, dalla parte opposta! per sfruttare il suo violento effetto fionda e dirigerla con grande velocità verso il pianeta desiderato. Spesso questo procedimento viene ripetuto per amplificare gli effetti. E' questo uno dei più grandi successi della meccanica celeste che si basa sulla legge di gravitazione universale di Newton scoperta e studiata 300 anni fa! Si riesce con estrema precisione a prevedere la

posizione e la velocità dei corpi celesti anche a distanza di decine di anni e a miliardi di chilometri!

3.6 Energia totale e tipo di orbite.

Abbiamo già visto nei paragrafi precedenti e nella tabella 2 che c'è una corrispondenza ben precisa fra il tipo di orbita percorsa dal corpo di massa μ e l'energia totale del sistema. Ciò può essere messo ben in evidenza nel grafico di fig. 2 nel modo seguente. L'energia totale E (vedi eq. (1.25)) è data da un termine dovuto al potenziale efficace riportato nella (1.30) e da un termine radiale "cinetico" $T = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2$. Quindi l'energia totale E deve essere sempre maggiore o al massimo uguale all'energia potenziale efficace. Il caso di uguaglianza corrisponde al caso limite in cui $T=0$ e quindi $\dot{r}=0$. Ma se $\dot{r}=0$ allora si ha che lungo la traiettoria il corpo mantiene costante la sua distanza dal centro di forza, ossia il moto avviene su una circonferenza! Se invece $\dot{r} \neq 0 \Rightarrow T > 0$ e l'energia totale $E > U_{eff}$ può essere negativa, 0 o positiva. Per ciascuno di questi 3 casi si ha rispettivamente un moto ellittico compreso fra un perielio ($r_{min.}$) ed un afelio ($r_{max.}$); un moto parabolico che si inverte all'infinito ed un moto iperbolico aperto, senza ritorno. Per una migliore comprensione di quanto detto facciamo riferimento alla Fig. 4 sottostante.

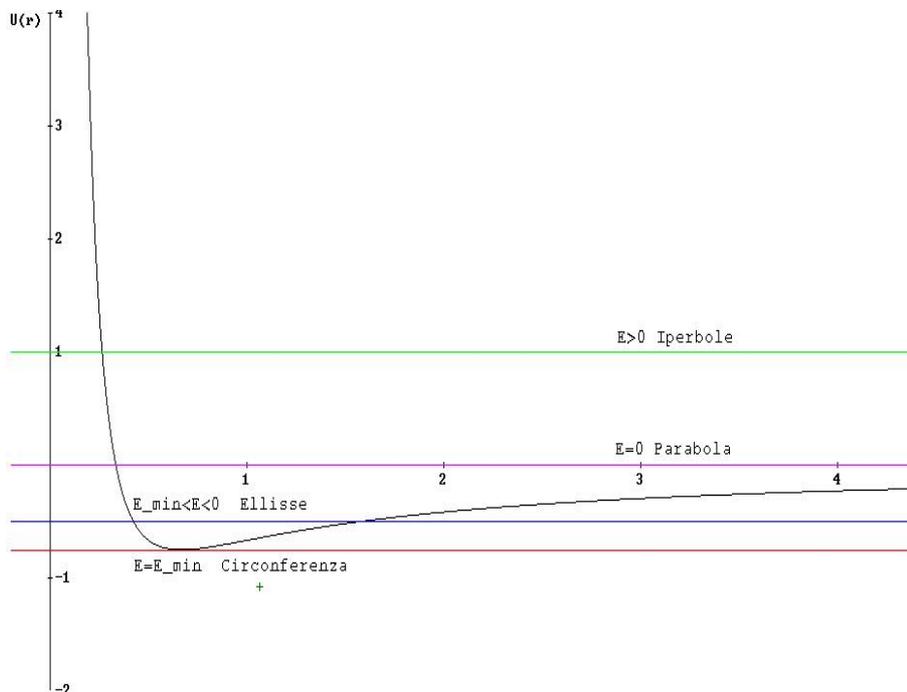


Fig. 4 Il valore di energia in rosso corrisponde al caso di orbite circolari e l' r corrispondente al punto di tangenza è il valore del raggio dell'orbita. L'energia blu dà origine ad orbite ellittiche chiuse comprese fra un r_{min} (perielio) ed un r_{max} (afelio). L'energia viola $E=0$ è quella di un moto parabolico mentre quella verde caratterizza un'orbita iperbolica aperta, non periodica con un solo punto di minima distanza.

4 Commenti.

Nel paragrafo 2.1 abbiamo enunciato le 3 leggi di Keplero. Dopo aver risolto l'equazione del moto dei due corpi legati dalla forza di gravità, tutto è diventato più chiaro. 1) La forma dell'orbita ellittica scaturisce

spontaneamente dalla soluzione matematica del problema e dipende strettamente dall'energia totale del pianeta; 2) La costanza della velocità areolare deriva dalla conservazione di \vec{J} ;

4.1 Derivazione della terza legge di Keplero.

La terza legge di Keplero però non è stata ancora derivata dalla teoria di Newton. E' quello che cercheremo di dimostrare ora. Innanzitutto consideriamo il caso più semplice di un'orbita circolare. Per essa si ha, per definizione, che la distanza fra la particella di massa μ ed il centro di forza è costante, per cui dalla (1.19) si ha:

$$0 = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} + \frac{J^2}{\mu r^3} \quad (1.31)$$

ossia:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \quad (1.32)$$

dove abbiamo sfruttato le ormai ben note espressioni di J ed ω . Come si vede da quest'ultima relazione, **il rapporto $\frac{T^2}{r^3}$ non è esattamente costante per tutti i pianeti**, ma dipende dalla massa del pianeta, anche se pur molto debolmente perché essa viene sommata alla massa del sole che è almeno da 1000 ad 1 milione di volte maggiore di qualunque pianeta del sistema solare per cui la massa del pianeta può essere del tutto trascurata. E' per questo che Keplero non se ne accorse (fortunatamente). Riscriviamo comunque l'equazione (1.32) mettendo in evidenza il rapporto fra le masse degli oggetti coinvolti (m_1 è la massa del Sole, m_2 quella del pianeta):

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_1} \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1} + O\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \right) \approx 3 \cdot 10^{-19} \left(1 - \frac{m_2}{m_1} + O\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 \right) \frac{s^2}{m^3} \quad (1.33)$$

Per le orbite ellittiche la derivazione è più complicata. Si parte dall'equazione (1.4). Integrando entrambi i membri si ottiene:

$$A = T \frac{J}{2\mu} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\mu A}{J} = \frac{2\mu\pi ab}{J} \quad (1.34)$$

dove A è l'area dell'ellisse ossia $A = \pi ab$. Per una ellisse, l'asse maggiore $2a$ è: $2a = r_{\min} + r_{\max}$ e quindi dalla (1.26) si ottiene:

$$2a = \frac{2se}{1-e^2} = \frac{2}{1-e^2} \cdot \frac{J^2}{Gm_1 m_2 \mu} \quad (1.35)$$

Sostituendo questa espressione nella (1.34) ed elevando entrambi i membri al quadrato, dopo facili calcoli si ottiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)} \tag{1.36}$$

che è formalmente identica alla (1.32) con $a=r$.

Nella tabella 3 sottostante sono riportati i dati relativi ai semiassi maggiori, periodo di rivoluzione, l'eccentricità, l'inclinazione del piano di rivoluzione, e la massa dei pianeti del sistema solare.

1 U.A. = $1,495 \times 10^{13}$ cm .

	<i>Semi-asse maggiore, U.A.</i>	<i>Periodo, sec</i>	<i>Eccen- tricità</i>	<i>Inclina- zione</i>	<i>Massa in gm</i>
Mercurio	0,387	$7,60 \times 10^6$	0,205	7°00	$3,28 \times 10^{26}$
Venere	0,723	$1,94 \times 10^7$	0,006	3°23'	$4,83 \times 10^{27}$
Terra	1,000	$3,16 \times 10^7$	0,016	$5,98 \times 10^{27}$
Marte	1,523	$5,94 \times 10^7$	0,093	1°51'	$6,37 \times 10^{26}$
Giove	5,202	$3,74 \times 10^8$	0,048	1°18'	$1,90 \times 10^{30}$
Saturno	9,554	$9,30 \times 10^8$	0,055	2°29'	$5,67 \times 10^{29}$
Urano	19,218	$2,66 \times 10^9$	0,046	0°46'	$8,80 \times 10^{28}$
Nettuno	30,109	$5,20 \times 10^9$	0,008	1°46'	$1,03 \times 10^{29}$
Plutone	39,60	$7,82 \times 10^9$	0,246	17° 7'	$5,4 \times 10^{27}$

Tabella 3. Dati astronomici relativi ai pianeti del sistema Solare.

Nella Fig. 4 è riportato un grafico che mostra i tempi di rivoluzione dei pianeti del sistema solare verso i semiassi maggiori; i dati di tale grafico sono riassunti nella tabella 4. E' del tutto evidente la legge di Keplero (1.36).

Terza legge di Keplero

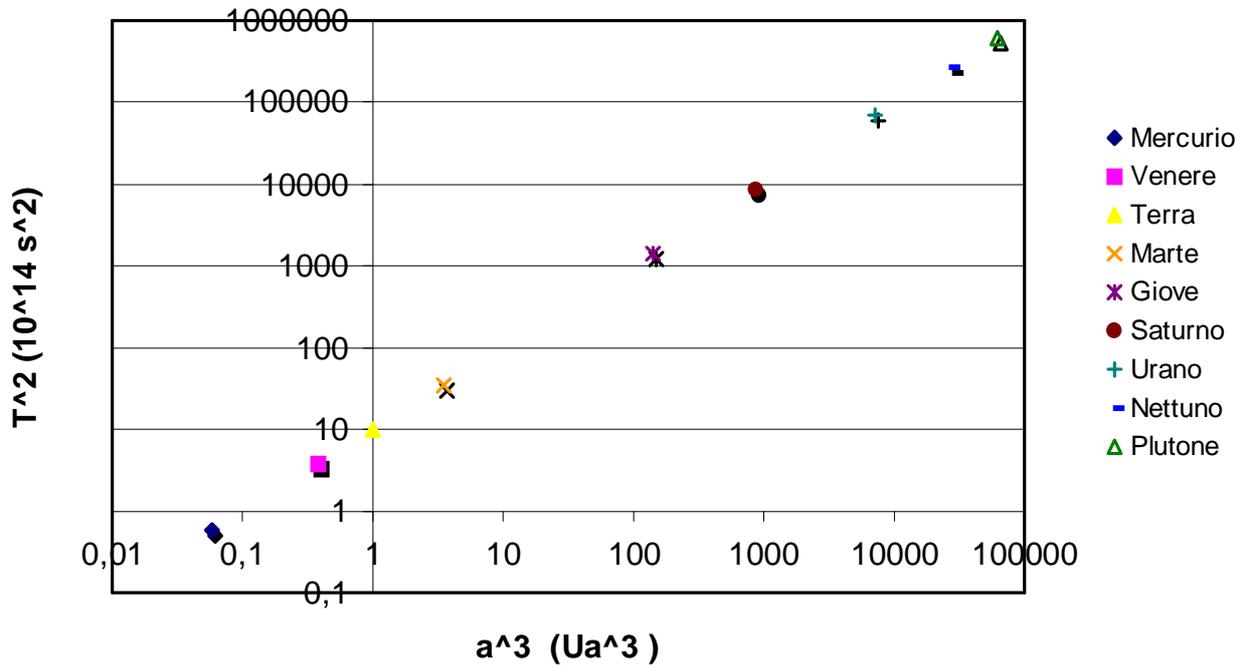


Fig. 4 Il grafico della terza legge di Keplero per tutti i pianeti del sistema solare in scala doppiamente logaritmica. E' evidente che il rapporto $\frac{T^2}{a^3}$ è costante per tutti i pianeti poiché tutti i punti sono allineati su una retta.

Pianeta	a (UA)	T (10 ¹⁴ s)	a ³ (UA ³)	T ² (s ²)
Mercurio	0,387	0,76	0,057960603	0,5776
Venere	0,723	1,94	0,377933067	3,7636
Terra	1	3,16	1	9,9856
Marte	1,523	5,94	3,532642667	35,2836
Giove	5,202	37,4	140,7703024	1398,76
Saturno	9,554	93	872,0787635	8649
Urano	19,218	266	7097,813228	70756
Nettuno	30,109	520	27295,37059	270400
Plutone	39,6	782	62099,136	611524

Tabella 4.

5. Relatività generale.

La meccanica celeste newtoniana è stato ed è tuttora un grandissimo successo dell'ingegno umano. E' grazie ad essa che riusciamo a progettare e portare a termine con estrema precisione missioni spaziali delicatissime e difficilissime come lo sbarco dell'uomo sulla Luna o come quella di inviare una sonda sulla superficie ghiacciata di una cometa che si muove a 50 km/s!

Ma la teoria della gravitazione universale di Newton non è completamente esatta. Einstein, dopo aver formulato nel 1905 la teoria della relatività cosiddetta "Ristretta", pensava con una certa ossessione alla strana coincidenza che la massa gravitazionale era numericamente equivalente a quella inerziale di un corpo, pur rappresentando due realtà completamente differenti.

Non credendo al caso, si rese poi conto che come per la relatività ristretta il principio fisico di base era la costanza della velocità della luce misurata da un qualunque sistema di riferimento inerziale e l'invarianza delle leggi della fisica per questa classe di riferimenti, così l'equivalenza della massa inerziale e quella gravitazionale assieme alla richiesta che le leggi della fisica fossero invarianti rispetto ad un qualunque sistema di riferimento anche accelerato, dovevano essere assunti come principi di una nuova teoria della relatività che si definì poi "Generale".

5.1 Soluzioni dell'equazione di Einstein nel vuoto.

E' in questo contesto *matematicamente molto complicato* che Einstein trova la sua famosa equazione del campo gravitazionale:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.37)$$

dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore di Ricci, R lo scalare di curvatura di Riemann, $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico e $T_{\mu\nu}$ è il tensore energia-impulso. Se risolviamo questa equazione nel vuoto ($T_{\mu\nu}=0$) otteniamo l'equazione $R_{\mu\nu}=0$ (Ricci nullo) che risolta ci fornisce la **soluzione di Schwarzschild**:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1.38)$$

$$m = \frac{GM}{c^2}$$

dove $2m$ è il raggio di Schwarzschild o di **Buco Nero**. Anche se a prima vista $r=2m$ può sembrare una singolarità, essa è però solo una singolarità fittizia, ossia dovuta alla particolare scelta di coordinate utilizzate per descrivere la varietà. Notiamo che la metrica espressa dalla (1.38) è asintoticamente

minkowskiana, ossia piatta! E così deve essere perché questo ci riporta al limite di Newton secondo il quale lo spazio tempo è piatto, euclideo.

Cambiando sistema di coordinate e passando all'estensione di Kruskal (metrica in coordinate doppiamente nulle) si ottiene:

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r}(dT^2 - dX^2) - r^2 d\Omega^2 \quad (1.39)$$

che rappresenta una metrica conformemente piatta per una funzione di r . In essa $r=2m$ non è più una singolarità ma $r=0$ sì! $r=0$ è una singolarità FISICA non removibile con un semplice cambio di coordinate!

Con questa metrica si trovano due soluzioni simmetriche: una riguardante il nostro universo ($r>2m$) e la regione cosiddetta di buco nero ($0<r<2m$) che ha nel suo futuro una singolarità fisica in $r=0$; l'altra soluzione descrive un ipotetico universo specchio (o parallelo) del tutto simile al nostro (sempre con $r>2m$) caratterizzato da una regione di **Buco Bianco** e da una singolarità fisica in $r=0$ nel suo PASSATO! I due universi paralleli sono collegati da ciò che viene chiamato "**Ponte di Einstein Penrose**".

Vale la pena ricordare che l'equazione di Einstein (1.37) venne modificata da Einstein stesso introducendo una **costante cosmologica** Λ (una sorta di forza repulsiva) per rendere l'universo stazionario. L'introduzione di questa costante fu in seguito alla scoperta di Hubble nel 1929 sulla recessione delle galassie definita da Einstein "il più grande errore della mia vita" (beato lui!). La nuova equazione di Einstein nel vuoto diventò quindi:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (1.40)$$

che fornisce l'equazione (si contrae per $g_{\mu\nu}$):

$$(R = 4\Lambda) \quad R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad \begin{cases} \Lambda > 0 & \text{Universo di De Sitter} \\ \Lambda < 0 & \text{Universo di Anti-De Sitter} \end{cases} \quad (1.41)$$

detti anche **UNIVERSI a CURVATURA COSTANTE** la cui soluzione è:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \Lambda > 0$$

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad \Lambda < 0 \quad (1.42)$$

Queste metriche sono regolari per $r=0$!

Fra le soluzioni di questa equazione, c'è anche la metrica che descrive **l'UNIVERSO INFLAZIONARIO**:

$$ds^2 = d\tilde{T}^2 - e^{\lambda\tilde{r}} (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.43)$$

Le superfici a $\tilde{T} = \cos t$. sono delle 3-sfere con raggio che aumenta esponenzialmente nel tempo! Si è calcolato che all'inizio dell'Universo in un tempo brevissimo di circa $\Delta t = 10^{-30}$ s l'Universo abbia aumentato il suo raggio di un fattore 10^{28} ! Un'espansione davvero prodigiosa che equivale a espandere un atomo di idrogeno in una bolla di 100 anni luce! Questa soluzione proposta da A. Guth nel 1980, è oggi accettata dalla maggior parte dei cosmologi per diversi motivi: 1) essa è in accordo con le teorie di grande unificazione delle interazioni fondamentali (GUT) proposte dai fisici delle particelle elementari, 2) essa è una valida spiegazione del fatto che l'Universo attuale sia sostanzialmente piatto (il cosiddetto "Flatness problem"); 3) esso dà una spiegazione del perché la radiazione cosmica di fondo a 2.7 °K sia così isotropa a meno di 1/100000 ("Horizon problem");

5.2 Correzioni alla soluzione di Newton: la precessione del perielio.

Nell'introduzione al capitolo 5 abbiamo detto che la meccanica celeste di Newton è solo una (ottima) approssimazione della relatività generale valida praticamente dovunque nello spazio ordinario, a patto che non si abbia a che fare con masse troppo grandi e concentrate, tipo stelle a neutroni o buchi neri. A differenza della soluzione di Newton riportata nella (1.21), quella di Einstein è:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{\mu G m_1 m_2}{J^2} + \frac{3Gm_1}{c^2} \cdot w^2 \quad (1.44)$$

il termine $\frac{3Gm_1}{c^2} \cdot w^2$ è in genere trascurabile a grande distanza dalle sorgenti

di campo gravitazionale sia a causa della sua dipendenza come $\frac{1}{r^2}$ dalla

distanza, sia perché il raggio di Schwarzschild $\frac{2Gm_1}{c^2}$ associato alla sorgente

1 è in genere piccolissimo (per la Terra è solo circa 1 cm !! mentre per il Sole è di circa 3 Km). Quindi in prima approssimazione possiamo scegliere come soluzione quella di Newton e sostituire tale espressione nella (1.44) al posto del termine correttivo tralasciando tutti i termini in ε^2 poiché $\varepsilon \ll 1$.

Dopo alcuni semplici calcoli si ottiene per la (1.44) l'equazione:

$$\frac{d^2w}{d\varphi^2} + w = \frac{\mu G m_1 m_2}{J^2} + 3 \cdot \frac{\mu^2 G^2 m_1^2 m_2^2}{J^4} \cdot \frac{Gm_1}{c^2} (1 - 2\varepsilon \cos \varphi) \quad (1.45)$$

la cui soluzione è:

$$\frac{1}{r} = A \left(1 - \varepsilon \cos \varphi \left(1 - 3A \frac{R_s}{2} \right) \right) \quad (1.46)$$

con $A = \frac{\mu G m_1 m_2}{J^2}$ ed $R_s = \frac{2Gm_1}{c^2}$ Raggio di Schwarzschild

Questa soluzione presenta una grossa novità rispetto a quella trovata da Newton: **LE ORBITE NON SONO CHIUSE!** Infatti se il primo perielio si ha

per: $\varphi_{p1} = \frac{\pi}{1 - 3A \frac{R_s}{2}}$, il perielio successivo si ottiene non dopo 2π , ma per:

$\varphi_{p2} = \frac{3\pi}{1 - 3A \frac{R_s}{2}}$ ossia con una differenza angolare rispetto a 2π di:

$$\delta\varphi = (\varphi_{p2} - \varphi_{p1}) - 2\pi = \frac{2\pi}{1 - 3A \frac{R_s}{2}} - 2\pi \approx 2\pi \left(1 + 3A \frac{R_s}{2} \right) - 2\pi = 6\pi \cdot A \frac{R_s}{2} \quad (1.47)$$

La quantità espressa dalla (1.47) è la famosa precessione degli equinozi. Dato che la quantità A è: $A = \frac{\mu G m_1 m_2}{J^2} \approx \frac{Gm_1}{r^2 v^2} \propto \frac{Gm_1}{r}$ essa diventa importante solo per i pianeti vicini al Sole ed in particolare per Mercurio. Infatti, per esempio, il rapporto delle distanze fra Giove e Mercurio è di circa 13 per cui l'effetto è molto piccolo per i pianeti esterni rispetto a quelli interni. Vediamo quanto vale $\delta\varphi$ nel caso di Mercurio. Essa è:

$$\delta\varphi = 6\pi \cdot A \frac{R_s}{2} \approx 43'' \text{ al secolo} \quad (1.48)$$

cioè solo 43'' d'arco al secolo, ma pur essendo una piccola quantità, essa è stata misurata ed il risultato trovato di 43'' \pm 1'' d'arco è in perfetto accordo con il dato teorico riportato nella (1.48). Questo decretò il successo finale della teoria della Relatività Generale.

Il moto del pianeta descritto dalla (1.46) è chiamato a **ROSETTA** perché le orbite non sono chiuse, ma formano delle ellissi lentamente rotanti nello stesso senso di rotazione del pianeta (è per questo che si chiama PRECESSIONE) che disegnano una bella figura che ricorda i petali di una rosa!