

# Il pendolo e la misura di g

## Sommario

Il valore dell'accelerazione di gravità può essere dedotto misurando il periodo delle piccole oscillazioni di un pendolo. Si valuta l'incertezza dovuta al tempo di reazione umana e gli effetti relativi alla scarsa conoscenza dell'inerzia del corpo oscillante e quelli legati al non perfetto isocronismo

## 1 Introduzione

Una massa tenuta sospesa con un filo e posta in oscillazione rappresenta il più semplice tipo di pendolo.

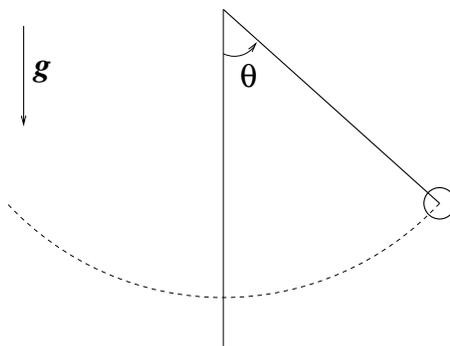


Figura 1: *Schema di un pendolo*

Galileo nei *Dialoghi intorno a due nuove Scienze* (1638) enuncia la legge dell'isocronismo secondo cui - a fissata la distanza tra il corpo appeso al punto di sospensione - il periodo delle oscillazioni è una costante indipendente dalla massa del corpo appeso e dall'ampiezza dell'oscillazione.

Qualche decennio dopo Charles Huyghens mostra che l'isocronismo è solo una legge approssimata valida nel regime di piccole oscillazioni. Huyghens modifica opportunamente il pendolo classico realizzando un pendolo cicloidale di periodo veramente indipendente dall'ampiezza.

All'epoca le misure di tempo si effettuavano con strumenti analoghi alle antiche clessidre o con orologi meccanici. Quest'ultimi non eccellevano certo in precisione, nell'arco di una giornata (24h) erano inevitabili avanzamenti o ritardi dell'ordine di un quarto d'ora (0.25h) corrispondenti alla precisione

$$\frac{\sigma_T}{T} \sim \frac{0.25}{24} \sim 1\%$$

Si deve ad Huyghens il primo brevetto per la costruzione di un orologio basato sul principio del pendolo. Un orologio di questo tipo, se costruito bene, sbaglia di circa una decina di secondi nell'arco della giornata equivalenti ad un errore percentuale pari a

$$\frac{\sigma_T}{T} = \frac{10}{24 \times 3600} \sim 1.5 \times 10^{-4}$$

L'invenzione dell'orologio a pendolo ha dunque permesso di migliorare la precisione passando da  $10^{-2}$  a  $10^{-4}$ . Il miglioramento di circa 2 ordini di grandezza rappresenta l'esempio, forse il più significativo, di quel passaggio dal *pressapoco alla precisione* che caratterizza la rivoluzione scientifica del XVII sec.

Prima di diventare un'oggetto di uso quotidiano, il pendolo ebbe inizialmente applicazioni in ambito scientifico consentendo la misura precisa della durata di fenomeni astronomici. L'astronomo danese Ole Roemer diede la prima stima della velocità della luce elaborando i dati relativi alle occultazioni dei satelliti di Giove.

L'applicazione scientifica più immediata è la misura della accelerazione di gravità infatti il periodo delle piccole oscillazioni e l'accelerazione di gravità  $g$  sono legati dall'espressione

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Ovviamente la precisione nella determinazione di  $g$  dipende dalla abilità nel limitare gli effetti sistematici. Il pendolo reversibile messo a punto da Henry Kater (fisico e capitano dell'esercito britannico) nel '800 raggiunge precisioni dell'ordine di

$$\Delta g/g \sim 7 \times 10^{-6}$$

Questa precisione va confrontata con la variazione  $\Delta g/g \sim 5 \times 10^{-3}$  con la latitudine dovuta alla rotazione e alla non perfetta sfericità della terra.

Il pendolo di Kater si rivelò dunque un importante strumento al servizio della geodesia

Gli attuali strumenti per misure di gravità (gravimetri) non impiegano più pendoli ma si basano sulla misura dell'allungamento di una molla dovuto al peso di una massa collegata. L'allungamento è dato da

$$\Delta l = \frac{mg}{k}$$

dove  $m$  e  $k$  sono rispettivamente la massa del corpo e la costante elastica della molla. I gravimetri possono misurare  $g$  con una precisione relativa anche pari a  $10^{-9}$  una volta che la molla sia stata adeguatamente calibrata. Le misure di precisione di  $g$  hanno svariate applicazioni tecnologiche, ad esempio contribuiscono all'individuazione di un giacimento petrolifero.

## 2 Piccole oscillazioni

L'energia meccanica totale di un pendolo puntiforme vale

$$E = mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (1)$$

tenendo conto dell'identità trigonometrica

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

si ha

$$\dot{\theta}^2 + 4\omega^2 \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

avendo definito la pulsazione

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \quad (3)$$

per oscillazioni piccole  $\theta < \theta_0 \ll \frac{\pi}{2}$  si può applicare l'approssimazione

$$\sin x \sim x$$

e derivando una volta rispetto al tempo la (2) si ha

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (4)$$

la cui soluzione è data dal moto armonico

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t)$$

la funzione è periodica di periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

tenendo conto della definizione (3) si ha

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (5)$$

da cui

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

### 3 Errore nella misura del periodo

La misura di  $g$  è dunque una misura indiretta ricavata dalla misura diretta del periodo di oscillazione. La misura del periodo avviene solitamente misurando il tempo  $\tau$  necessario affinché il sistema compia  $n$  oscillazioni da cui si deduce

$$T = \tau/n$$

Se la misura di  $\tau$  si effettua con un cronometro comandato a mano essa risulta affetta dalle fluttuazioni nel tempo di reazione umano dovute all'incertezza nel giudicare il momento in cui il pendolo ha effettivamente compiuto  $n$  oscillazioni complete. Questa incertezza va stimata preliminarmente in qualche modo e tipicamente l'errore  $\sigma_\tau$  sul tempo  $\tau$  vale qualche decimo di secondo. Propagando l'errore si ha

$$\sigma_T = \sigma_\tau/n$$

essendo  $g \propto T^{-2}$  si ha

$$\frac{\sigma_g}{g} = 2 \frac{\sigma_T}{T}$$

A titolo di esempio poniamo i valori ragionevoli  $T = 1$  s ,  $n = 40$  e  $\sigma_\tau = 0.2$  s ottenendo

$$\frac{\sigma_g}{g} = 10^{-2}$$

L'errore relativo su  $g$  si può anche mettere nella forma

$$\frac{\sigma_g}{g} = \frac{\sigma_\tau}{\pi n} \sqrt{g/l}$$

da cui si deduce immediatamente che per limitare le fluttuazioni dovute al tempo di reazione umana bisogna realizzare il pendolo in modo da avere  $n$  ed  $l$  abbastanza grandi.

## 4 Deviazione dal caso puntiforme

Vogliamo discutere le correzioni da apportare alla (5) nel caso di corpi estesi. In questo caso l'energia meccanica totale posseduta da un corpo rigido posto in oscillazione vale

$$E = mgl(1 - \cos \theta_0) = \frac{1}{2}(I_b + ml^2)\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) \quad (6)$$

dove  $I_b$  è il momento d'inerzia assiale del corpo appeso e  $l$  è la distanza del baricentro dall'asse di rotazione. Se  $d$  indica la dimensione caratteristica del corpo sospeso di massa  $m$  (ad esempio il raggio nel caso di una sfera, il lato nel caso di un cubo, etc..), il momento d'inerzia assume la forma

$$I_b = kmd^2$$

dove  $k$  è una quantità adimensionale dipendente dalla forma del corpo. Il valore di  $k$  si sa calcolare facilmente per solidi omogenei di forma regolare ad esempio per una sfera vale  $k = 2/5$ , per un cilindro  $k = 1/2$ , per un'asta  $k = 1/12$ . Per corpi abbastanza compatti  $k$  è dell'ordine dell'unità. Per solidi irregolari o non omogenei la determinazione di  $k$  può rivelarsi piuttosto complessa. Un momento di inerzia non nullo modifica l'equazione (2) nell'espressione

$$\dot{\theta}^2 + \frac{4mgl}{I_b + ml^2} \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad (7)$$

da cui segue la pulsazione

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I_b + ml^2}$$

e quindi il periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + k \left( \frac{d}{l} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Nel caso in cui le dimensioni del corpo siano molto più piccole della distanza del punto di sospensione dal baricentro  $d \ll l$  si può adottare l'approssimazione  $(1+x)^n \sim 1+nx$  valida quando  $x \ll 1$ . Detto  $T_0 = 2\pi\sqrt{g/l}$  il periodo corrispondente al caso puntiforme si ha

$$T = T_0 \left[ 1 + \frac{k}{2} \left( \frac{d}{l} \right) \right]^2$$

Un corpo esteso dunque ha un periodo leggermente più grande del corrispondente corpo puntiforme avente la medesima massa. La determinazione del coefficiente numerico  $k$  per corpi di forma arbitraria è abbastanza complessa e può essere evitata assumendo  $l \gg d$ . Infatti calcolando esplicitamente la correzione per un pendolo tipico ( $k \sim 1$ ,  $l = 50$  cm e  $d = 2$  cm) si ha

$$\frac{T - T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{T_0} \sim (2/50)^2 = 1.6 \times 10^{-3}$$

Propagando l'effetto sull'accelerazione di gravità ed essendo  $g \propto T^{-2}$  si ha

$$\frac{\Delta g}{g} = 2 \frac{\Delta T}{T} \sim 3 \times 10^{-3}$$

In presenza di altre sorgenti d'errore a livello più grande di qualche parte su mille, la deviazione dal caso puntiforme può essere trascurata. Naturalmente se la condizione  $d \ll l$  non fosse soddisfatta l'effetto potrebbe non essere trascurabile.

## 5 Deviazione dall'isocronismo

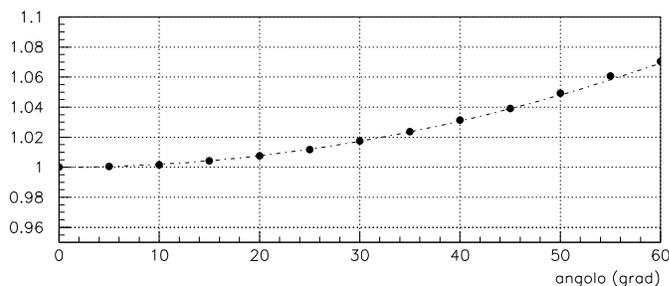


Figura 2: *Deviazione dall'isocronismo. La curva  $1 + (\theta_0/4)^2$  è sovrapposta ai valori numerici trovati*

Si è mostrato che il periodo non dipende dall'ampiezza solo se le oscillazioni hanno ampiezza piccola. Vogliamo ora determinare il periodo per oscillazioni di ampiezza arbitraria. Riscriviamo l'energia meccanica totale (2) nella forma

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega \sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

in cui ora  $\theta_0$  è un angolo arbitrario non necessariamente piccolo. Integrando su un quarto di oscillazione ( $0 < \theta < \theta_0$  per  $0 < t < T/4$ ) si ha

$$\int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{\omega T}{2}$$

Poniamo

$$a = \sin \frac{\theta_0}{2} \quad , \quad z = \frac{\sin(\theta/2)}{a}$$

con un po' di manipolazioni l'integrale assume la forma

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-a^2z^2)(1-z^2)}} \quad (8)$$

dove al solito  $T_0 = 2\pi/\omega$ . L'integrale <sup>1</sup> che compare nella (8) non è esprimibile con funzioni elementari ma si può calcolare numericamente. I valori numerici<sup>2</sup> sono riportati nella tabella (1) e sono graficati nella figura (2). Il periodo risulta aumentato rispetto a quello delle piccole oscillazioni di qualche punto percentuale. Tale aumento raggiunge un valore prossimo al 20% nel caso di oscillazione con ampiezza pari a 90°. L'andamento della

$\theta_0$	$T/T_0$
0 °	1.000
5 °	1.0005
10 °	1.0017
15 °	1.0042
20 °	1.0076
25 °	1.0118
30 °	1.0174
35 °	1.0237
40 °	1.0313
45 °	1.0390
50 °	1.0492
55 °	1.0607
60 °	1.0731
90 °	1.18

Tabella 1: Rapporto tra periodo effettivo e periodo delle piccole oscillazioni in funzione dell'ampiezza dell'oscillazione.

correzione ammette l'espressione approssimata

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{\theta_0^2}{16}$$

in cui l'ampiezza  $\theta_0$  è in radianti.

<sup>1</sup>Le sostituzioni di variabile effettuate hanno avuto lo scopo di mettere l'integrale nella forma tipica degli integrali ellittici di cui sono disponibili tabelle di valori numerici

<sup>2</sup>I valori numerici dell'integrale sono stati calcolati usando l'integratore disponibile in rete al sito [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)

## 6 Altri effetti

La massa d'aria che il pendolo spinge durante il suo moto modifica il momento d'inerzia del corpo sospeso e quindi altera il periodo dell'oscillazione rispetto al caso ideale. Inoltre la flessione continua a cui è sottoposto il filo nel punto di supporto tende a riscaldare il filo sottraendo energia meccanica. Questa perdita di energia combinata con altri attriti e con la viscosità dell'aria smorzano le oscillazioni. Tuttavia il periodo dell'oscillazione reale smorzata non è molto diverso da quello ideale se gli attriti sono abbastanza piccoli. Nell'ipotesi di attrito proporzionale alla velocità si può dimostrare che

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{1}{8\pi^2 n^2}$$

Dove  $n$  indica il numero di oscillazioni dopo le quali l'ampiezza si riduce di un fattore  $1/e$ . Se dopo  $n = 5$  oscillazioni non si osserva una diminuzione apprezzabile dell'ampiezza allora l'effetto si può trascurare.

Il lettore può valutare come esercizio (accademico) gli effetti della spinta di Archimede esercitata dall'aria, della variazione di pressione atmosferica, e della dilatazione termiche se la temperatura non è costante. Questi effetti sono totalmente trascurabili nel caso dei pendoli usati comunemente nei laboratori didattici, potrebbero non esserlo nel caso di misure di precisione con pendoli sofisticati.

## 7 conclusione

L'errore su  $g$  riceve due contributi principali

- Fluttuazioni statistiche nel tempo di reazione umana

$$\frac{\sigma_g}{g} = \frac{\sigma_\tau}{\pi n} \sqrt{g/l}$$

- Effetti sistematici dovuti alla forma del corpo e indotti dall'ampiezza non piccola delle oscillazioni.

Tenendo conto che per  $|x|, |y| \ll 1$  vale l'approssimazione

$$(1+x)(1+y) \sim 1 + (x+y)$$

gli effetti sistematici discussi si possono compendiare nella formula

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{k}{2} \left(\frac{d}{l}\right)^2 + \left(\frac{\theta_0}{4}\right)^2$$

I valori tipici per un pendolo da laboratorio sono  $l = 40$  cm,  $d = 1$  cm,  $k \sim 1$  e  $\theta_0 \sim 10^\circ = 0.17$  rad

inserendo i valori si ottiene

$$\Delta T/T = 0.002$$

Se questi effetti non vengono tenuti in conto si ha una sottostima sistematica di  $g$  pari a

$$\Delta g/g = -0.4 \times 10^{-2}$$

Ovviamente gli effetti sistematici potrebbero essere limitati cercando di misurare l'inerzia del corpo e l'ampiezza dell'oscillazione. Se non si effettuano queste misure è bene fornire una stima dell'errore associato.