Università di Pisa

Corso di Laurea in Fisica

Corso di Ottica Quantistica

Riccardo GOTTARDI

Formulazione matriciale dell'ottica geometrica

Docente del corso : Prof. D. Giulietti

Indice

Capitolo 1

L'approssimazione di Gauss

L'approssimazione di Gauss è l'approssimazione lineare dell'ottica geometrica. In queste condizioni è possibile sostituire le funzioni sinusoidali dell'ottica geometrica con le loro approssimazioni lineari e, scelto un sistema di riferimento, trattare quindi un sistema ottico utilizzando il metodo delle matrici. Analizziamo un caso semplice dopo aver dato alcune definizioni generali.

1.1 Alcune definizioni generali

Fascio omocentrico: un insieme di raggi con un punto comune d'intersezione.

Sistema ottico stigmatico: ad un fascio incidente omocentrico in A_1 corrisponde un fascio emergente pure omocentrico in A_2. I sistemi ottici di uso corrente si possono considerare stigmatici.

Punti coniugati: i punti A_1 ed A_2 sono punti coniugati; A_1 è l'oggetto, A_2 è l'immagine (Fig. 1.1).

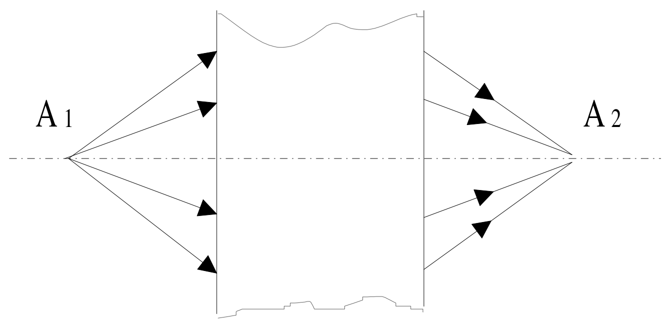

Figura 1.1: Sistema ottico stigmatico centrato.

Piani coniugati: il cammino ottico tra due punti su ciascun piano è lo stesso, indipendentemente dall'inclinazione dei raggi uscenti dall'uno ed entranti nell'altro.

Fuoco: il punto coniugato di un punto all'infinito. Se il punto all'infinito è l'oggetto il suo coniugato si chiama secondo fuoco, se il punto all'infinito è l'immagine il suo coniugato si chiama primo fuoco.

Sistema ottico centrato: un insieme di superfici rifrangenti o riflettenti, generalmente sferiche, che hanno simmetria cilindrica attorno ad un asse.

Matrice ABCD: indicazione generica della matrice che rappresenta il passaggio attraverso un elemento ottico. Le lettere ABCD indicano le posizioni dei quattro elementi della matrice 2x2 come mostrato qui di seguito

$$M_{ABCD} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

1.2 Il diottro sferico

La cosa più semplice che può succedere ad un raggio di luce è di trovarsi a passare da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un mezzo con un diverso indice di rifrazione n_2. Consideriamo quindi un raggio luminoso che incida su diottro sferico ad un certo angolo (Fig. 1.2).

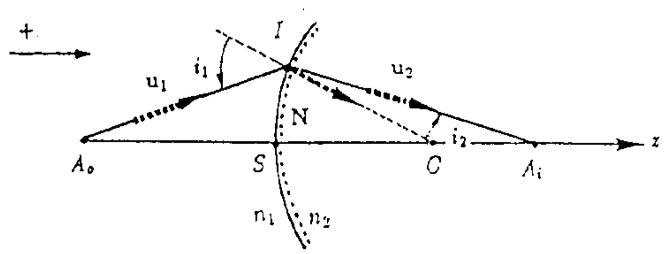

Figura 1.2: Incidenza su un diottro sferico.

Partendo dal raggio di incidenza, caratterizzato dal vettore $\mathbf{u_1}$, si ricava il vettore del raggio diffratto, $\mathbf{u_2}$, utilizzando le leggi di Descartes. Si calcola i_1 (angolo d'incidenza)

$$i_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{u_1})$$

se ne deduce i_1 noti gli indici di rifrazione dei due mezzi,

$$i_2 = \arcsin(\frac{n_1 \sin i_1}{n_2})$$

si valuta il coefficiente a

$$a = n_2(\mathbf{N} \cdot \mathbf{u_2}) - n_1(\mathbf{N} \cdot \mathbf{u_1}) = n_2 \cos i_2 - n_1 \cos i_1$$

e se ne deduce infine

$$\mathbf{u_2} = \frac{1}{n_2}(n_1 \mathbf{u_1} - a\mathbf{N})$$

L'intera procedura risulta piuttosto laboriosa e deve essere applicata a ciascun raggio luminoso. La determinazione dell'immagine di un oggetto è quindi molto lunga, anche utilizzando un computer, in quanto risulta necessario ripetere lo stesso calcolo per molti raggi luminosi che partano da ciascun punto dell'oggetto. Vediamo come le cose cambiano se utilizziamo l'approssimazione di Gauss.

1.3 Il diottro sferico nell'approssiamzione di Gauss

Consideriamo un sistema di assi $Sxyz$ con Sz coincidente con l'asse ottico ed il piano Sxy tangente al diottro in S (Fig. 1.3).

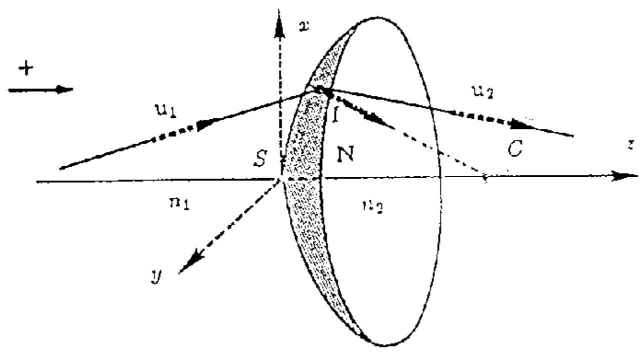

Figura 1.3: Incidenza su un diottro sferico considerato tridimensionalmente.

Se i raggi luminosi sono poco inclinati sull'asse ottico ed il punto di incidenza I non è molto distante da S possiamo approssimare linearmente la legge di Snell-Descartes

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \longrightarrow n_1 i_1 \simeq n_2 i_2$$

ed il coefficiente diventa

$$a = n_2 - n_1$$

per cui la relazione tra i vettori d'incidenza e di rifrazione diventa

$$n_2\mathbf{u_2} - n_1\mathbf{u_1} = a\mathbf{N} = (n_2 - n_1)\frac{\vec{IC}}{R}$$

ed in forma vettoriale, utilizzando le componenti del vettore $u_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ e le coordinate xyz del punto I

$$n_2 \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} - n_1 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = (n_2 - n_1) \begin{pmatrix} -x/R \\ -y/R \\ \gamma_N \end{pmatrix}$$

Essendo i raggi poco discosti dall'asse ottico si ha $\gamma_1 \simeq 1$,$\gamma_2 \simeq 1$ e $\gamma_N \simeq 1$ il che rende la terza riga una banale identità. Le altre due righe esprimono due equazioni lineari in cui, per la stessa approssimazione, $\alpha \simeq \theta_x$ e $\beta \simeq \theta_y$, dove θ_x e θ_y sono gli angoli che le proiezioni dei raggi luminosi sui piani Sxz e Syz rispettivamente formano con l'asse ottico. Se definiamo con la notazione complessa $\bar{\alpha} \equiv \alpha + \imath\beta$ e $\bar{x} \equiv x + \imath y$ possiamo condensare quanto succede durante la rifrazione nelle due seguenti equazioni

$$\bar{x_2} = \bar{x_1}$$
$$(n\bar{\alpha})_2 = (n\bar{\alpha})_1 - \frac{n_2 - n_1}{R}\bar{x_1}$$

in quanto la coordinata $\bar{x}$ chiaramente non cambia nel corso della rifrazione

1.4 Vergenza e matrice di rifrazione

Si definisce **vergenza** la quantità

$$V \equiv \frac{n_2 - n_1}{R}$$

in cui il segno di R è preso positivo nel senso della luce incidente. Quando R viene espresso in metri, l'unità di misura conseguente della vergenza è la diottria (δ). La vergenza è una caratteristica intrinseca del diottro, indipendente dal senso di propagazione della luce, ed è positiva nei diottri converegenti e negativa per quelli divergenti. Se si definisce il vettore $\bar{X}$ che ha per elementi la posizione $\bar{x}$ del punto d'intersezione del raggio luminoso con la superficie del diottro e "l'angolo ottico" $n\bar{\alpha}$, prodotto dell'indice di rifrazione con l'angolo definito precedentemente, si possono riscrivere le relazioni del paragrafo precedente come

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ n\bar{\alpha} \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ n\bar{\alpha} \end{pmatrix}_1 \tag{1.1}$$

Dove

$$R(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

è la **matrice di rifrazione**.

1.5 Un semplice esempio: il fuoco di un diottro

Applichiamo il metodo delle matrici ad un caso semplice, ricerchiamo cioè il fuoco di un diottro prima col metodo tradizionale e poi utilizzando le matrici e confrontiamo i risultati.
Sfruttando la condizione di parassialità dei raggi data dall'approssimazione di Gauss, con alcune semplice relazioni di geometria elementare ed impiegando la legge di Snell approssimata, si ricava l'equazione dei punti coniugati del diottro

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} \tag{1.3}$$

dove p, q sono rispettivamente la distanza del punto oggetto e del punto immagine sull'asse ottico dal vertice S, e R è il raggio di curvatura del diottro (Fig. 1.4).

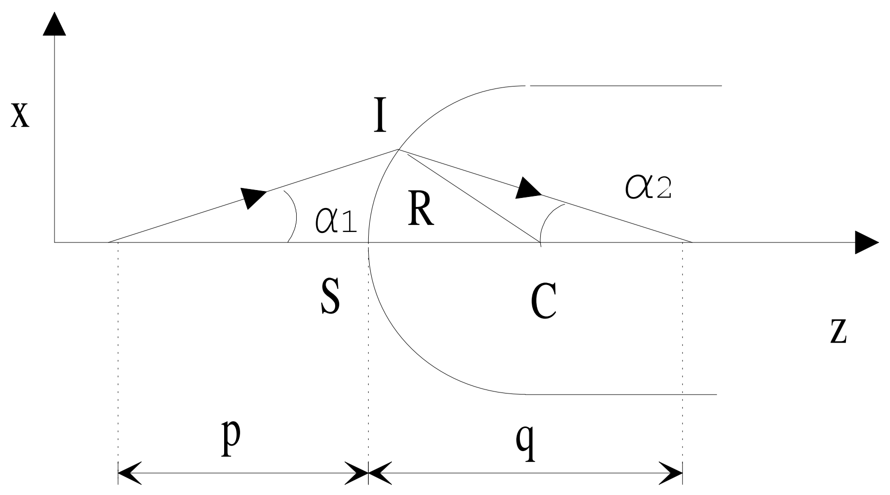

Figura 1.4: Punti coniugati di un diottro sferico.

Senza perdere di generalità abbiamo considerato qui un raggio sul piano Sxz. Dall'equazione dei punti coniugati del diottro discende immediatamente la posizione dei fuochi del diottro. Per $p \to \infty$ si ha $q = f_2$ e la (1.3) diventa

$$\frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

e quindi, come si vede in Fig. (1.5)

$$f_2 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R = \frac{n_2}{V} \tag{1.4}$$

Per $q \to \infty$ si ha $p = f_1$ e la (1.3) diventa

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

e quindi

$$f_1 = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R = \frac{n_1}{V} \tag{1.5}$$

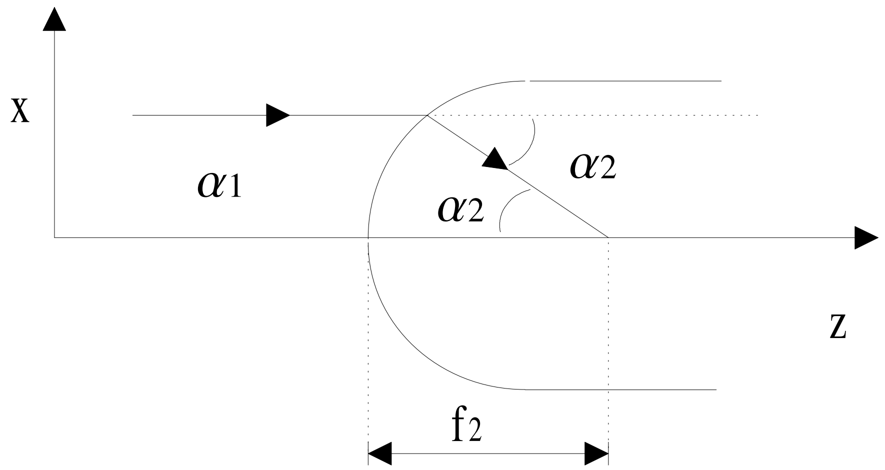

Figura 1.5: Secondo fuoco di un diottro sferico.

Ripetiamo il procedimento ora utilizzando il metodo delle matrici. Riprendiamo l'equazione (1.1) limitandoci al piano Sxz ed inserendo i valori appropriati dell'angolo $\alpha_1 = 0$ ed otteniamo.

$$\begin{pmatrix} x_2 = x_1 \\ n_2\alpha_2 = -Vx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ n_1 \cdot 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Nell'approssimazione di Gauss il punto di intersezione f_2 di questo raggio rifratto con l'asse ottico è dato da

$$x_2 \simeq f_2 \, |\alpha_2|$$

ed essendo α_2 dalla (1.6) esattamente

$$\alpha_2 = \frac{-Vx_1}{n_2}$$

si ha

$$f_2 = \frac{n_2}{V} \tag{1.7}$$

Similmente si ottiene f_1

$$f_1 = \frac{n_1}{V} \tag{1.8}$$

Chiaramente i due procedimenti portano alle stesse conclusioni.

Capitolo 2

Generalizzazione ai sistemi centrati

2.1 Matrice di traslazione

La matrice di traslazione formalizza matematicamente la propagazione in un mezzo omogeneo del vettore $\bar{X}$ da un piano A_1xy ad un piano A_2xy a lui parallelo (Fig. 2.1). L'introduzione di questa matrice si rende necessaria in quanto i sistemi ottici sono sistemi omogenei a tratti.

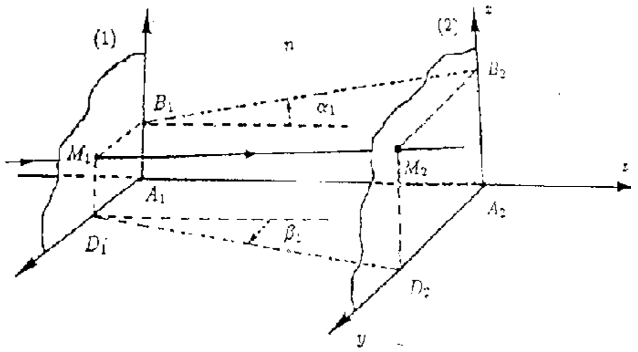

Figura 2.1: Propagazione in un mezzo omogeneo.

Essendo i raggi luminosi delle rette poco inclinate rispetto all'asse ottico, sfruttando l'approssimazione lineare di Gauss, si vede come ad esempio la coordinata spaziale lungo l'asse x diventi

$$x_2 = x_1 + \alpha_1 \overline{A_1A_2}$$

mentre gli angoli ovviamente si conservano

$$\alpha_2 = \alpha_1$$

Da cui, iterando i calcoli e raggruppandone i risultati, si ottiene la formulazione matriciale

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ n\bar{\alpha} \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \overline{A_1A_2}/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ n\bar{\alpha} \end{pmatrix}_1 \tag{2.1}$$

e la **matrice di traslazione** è quindi

$$\tau(\overline{A_1A_2}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{A_1A_2}/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

2.2 Composizione di matrici e matrice di trasferimento

Nel caso in cui si abbia un sistema ottico costituito da una successione di elementi semplici diversi (spazi omogenei, superfici diottriche, etc.) le coordinate di un raggio subiranno i vari cambiamenti, ognuno governato da una matrice come quelle descritte sopra. Se iniziamo a scrivere i vari passaggi da un elemento all'altro, indicati con delle matrici generiche M_i si ha

$$\bar{X}(s_1) = M_1\bar{X}(s_0)$$

$$\bar{X}(s_2) = M_2\bar{X}(s_1) = M_2M_1\bar{X}(s_0)$$

e così di seguito. Si deduce immediatamente la regola di composizione delle matrici. La matrice globale di trasferimento del sistema ottico, indicata con $T(\bar{ES})$ (Fig. 2.2) è data dal prodotto matriciale, ordinato in senso inverso rispetto a quello in cui il raggio incontra i vari elementi ottici, delle matrici di trasferimento dei singoli elementi ottici.

Figura 2.2: Sistema ottico generico.

In formule, numerando le matrici da sinistra a destra,

$$T(\overline{ES}) = M_n \cdot M_{n-1} \cdot ... \cdot M_2 \cdot M_1 \tag{2.3}$$

con $M_n = M(E)$ e $M_1 = M(S)$.

Utilizzando quanto sopra, esprimiamo la matrice di trasferimento tra due piani A_1xy e A_2xy di indici rispettivamente n_0 ed n_1 come in fig. (2.3).

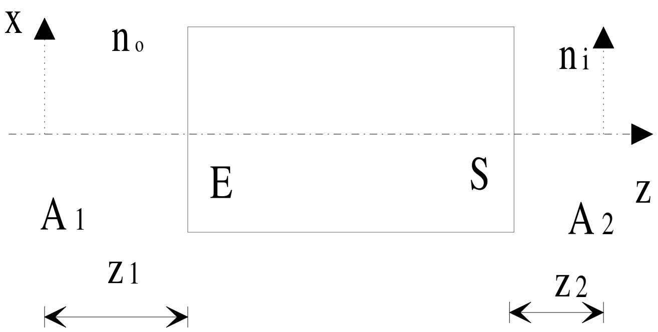

Figura 2.3: Trasferimento tra due piani esterni ad un sistema ottico.

Si ha

$$T(\overline{A_1A_2}) = \tau(\overline{SA_2})T(\overline{ES})\tau(\overline{A_1E}) \tag{2.4}$$

che diventa in maniera esplicita

$$T(\overline{A_1A_2}) = \begin{pmatrix} 1 & z_2/n_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_1/n_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Dei quattro elementi della matrice $T(\overline{A_1A_2})$ solo l'elemento "C" risulta indipendente da z_1 e z_2, e quindi risulta indipendente dai piani scelti. Esso è esattamente l'elemento T_{21} della matrice $T(\overline{ES})$ ed è una caratteristica intrinseca del sistema. Per definizione si chiama **vergenza**, come per il diottro sferico,

$$V \equiv -T_{21}$$

Spingiamoci oltre supponendo che i due piani A_1xy e A_2xy siano coniugati e prendiamo due punti, B_0 e B_1, su questi piani ed esplicitiamo la relazione matriciale $X_i = T(\overline{A_1A_2})X_0$

$$x_i = T_{11}x_0 + T_{12}n_0\alpha_0 \tag{2.6}$$

$$n_i\alpha_i = -Vx_0 + T_{22}n_0\alpha_0 \tag{2.7}$$

Essendo la posizione x_i dell'immagine B_i indipendente dall'inclinazione α_0 si ha

$$T_{12} = 0 \tag{2.8}$$

e risulta che T_{11} è proprio il rapporto x_i/x_0, cioè l'ingrandimento trasversale G_t. Se consideriamo poi il caso $x_0 = 0$ abbiamo

$$T_{22} = \frac{n_i \alpha_i}{n_0 \alpha_0}]_{x_0=0} \tag{2.9}$$

Che in funzione dell'ingrandimento angolare $G_a = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}]_{x_0=0}$ diventa

$$T_{22} = \frac{n_i}{n_0} G_a \tag{2.10}$$

Concludendo la matrice di trasferimento tra due piani coniugati diventa

$$T(\overline{A_1 A_2}) = \begin{pmatrix} G_t & 0 \\ -V & n_i/n_o G_a \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

In maniera generale si definiscono anche le lunghezze focali immagine ed oggetto, che algebricamente risultano

$$f_i \equiv \frac{n_i}{V} \tag{2.12}$$

$$f_0 \equiv -\frac{n_0}{V} \tag{2.13}$$

Una volta stabiliti i valori della matrice di trasferimento, è quindi possibile dedurre immediatamente alcune caratteristiche dell'immagine senza in realtà dover fare il conto vero e proprio di trasferimento dei raggi vettore.

Capitolo 3

Applicazione alle lenti

3.1 Lenti spesse

Ciò che viene naturale fare ora è di "costruire" la matrice di trasferimento di una lente in aria (il caso in cui la lente non sia in aria porta semplicemente all'aggiunta dei relativi indici di rifrazione). Una lente è formata da due diottri sferici, di raggio R_1 ed R_2, e da una certa quantità di materiale tra essi con indice di rifrazione n. Come da fig. (3.1) indichiamo con e la distanza tra i vertici dei due diottri ES ed inoltre con V_1 e V_2 la vergenza di ciascun diottro.

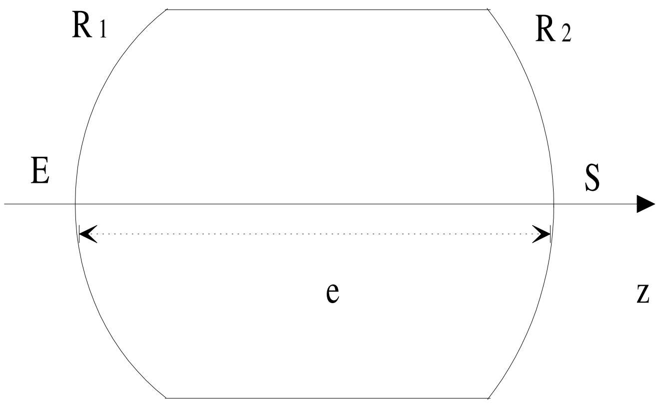

Figura 3.1: Lente spessa.

La matrice di trasferimento dal piano passante per E al piano passante per S sarà, usando le notazione dei paragrafi 1.4¶e 2.1¶,

$$T(\overline{ES}) = R(S)\tau(\overline{ES})R(E)$$

e in forma esplicita

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - eV_1/n & e/n \\ -V & 1 - eV_2/n \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

dove la vergenza V è

$$V = V_1 + V_2 - \frac{eV_1V_2}{n} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n}\frac{e}{R_1R_2}) \tag{3.2}$$

essendo la lente in aria dalle equazioni (2.12), (2.13) si ha semplicemente $f \equiv f_i = V^{-1}$ ergo

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n-1}{n}\frac{e}{R_1R_2}) \tag{3.3}$$

3.2 Lenti sottili

E' spesso possibile introdurre un'ulteriore approssimazione, ossia considerare una lente sottile, in cui e sia trascurabile. La matrice di trasferimento, che indicheremo con $R(L)$, diventa

$$R(L) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

in quanto la vergenza nell'equazione (3.2) diventa semplicemente la somma delle vergenze dei due diottri

$$V = V_1 + V_2 = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \frac{1}{f}$$

che è la stessa espressione per la lunghezza focale che si ricava utilizzando la geometria e la legge di Snell senza fare impiego della formulazione matriciale. Infatti l'equazione che si ricava col metodo tradizionale per una lente sottile è la ben nota

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}) = \frac{1}{f} \tag{3.5}$$

che, quando $p \to \infty$ (o equivalentemente per una lente in aria $q \to \infty$), diventa esattamente

$$\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

come già dedotto col metodo delle matrici.

Delle lenti sottili è anche ben nota la formula dell'ingrandimento trasversale di un oggetto (fig. 3.2) che è dato da

$$G_t = \frac{x_i}{x_0} = \frac{q}{p}$$

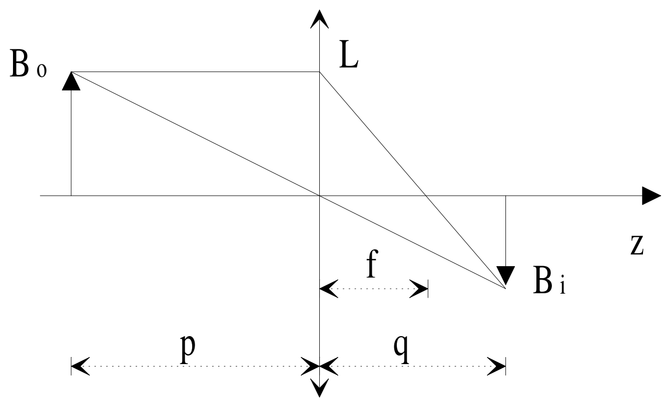

Figura 3.2: Rifrazione attraverso una lente sottile.

Guardando la matrice di trasferimento dal piano contenente B_0 al piano contenente B_i si ottiene lo stesso risultato. Costruiamo la matrice di trasferimento come $T(\overline{B_0 B_i}) = \tau(\overline{B_i L}) R(L) \tau(\overline{L B_0})$ che denotiamo con R e che esplicitamente diventa, essendo la lente in aria e quindi $n = 1$,

$$R(\overline{B_0 B_i}) = \begin{pmatrix} 1 & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - q/f & p + q(1 - p/f) \\ -1/f & 1 - p/f \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

ed applicando l'equazione (3.5) si ottiene

$$R(\overline{B_0 B_i}) = \begin{pmatrix} -(q/p) & 0 \\ -(1/f) & -(p/q) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Il termine "A" di questa matrice ABCD dà, come già visto, l'ingrandimento trasversale, $G_t = -(q/p)$. Il valore negativo dell'ingrandimento sta ad indicare che l'immagine viene capovolta.

3.3 Il telescopio a rifrazione

Il telescopio rifrattore è in generale composto da due sistemi ottici: un *obiettivo*, ossia un sistema convergente di grande focale ($f_1 \sim 1m$) che di un oggetto posto a grande distanza dà un'immagine nel proprio piano focale, e un *oculare* che pure è un sistema convergente con lo stesso asse ottico, ma la cui lunghezza focale è molto più piccola ($f_2 \sim 1cm$) e la cui distanza dall'obiettivo può essere regolata (fig. 3.3).

L'oculare viene sistemato in modo da portare il suo primo fuoco in prossimità dell'immagine formata dall'obiettivo che sarà circa sul secondo fuoco dell'obiettivo stesso. Come si vede in figura, data la grande distanza dell'oggetto, l'angolo α sotto cui si vede ad occhio nudo l'oggetto è praticamente coincidente con l'angolo con cui lo stesso oggetto è

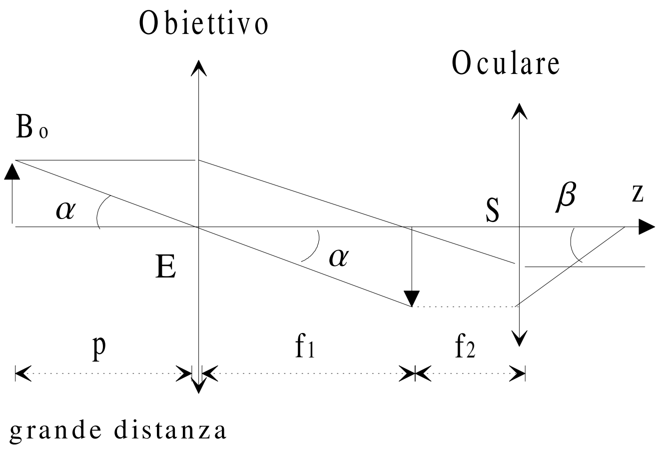

Figura 3.3: Principio del telescopio a rifrazione. Per chiarezza di rappresentazione le distanza non sono in scala.

visto dal centro dell'obiettivo. Tenendo presente quest'approssimazione scriviamo la matrice di trasferimento del sistema

$$T(\overline{ES}) = R(S)\tau(\overline{ES})R(E)$$

che in forma esplicita, essendo e la distanza tra le due lenti e trovandoci in aria ($n = 1$), è

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - eV_1 & e \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Siccome poi $V_1 = 1/f_1$ e $V_2 = 1/f_2$ avremo che $V = (V_1 + V_2 - eV_1V_2) = 0$, inoltre $e \simeq f_1 + f_2$ e quindi

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & f_1 + f_2 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

L'ingrandimento trasversale dell'immagine, G_t, è dato esattamente dal rapporto tra le focali

$$G_t = -\frac{f_2}{f_1} \tag{3.10}$$

il segno meno indica semplicemente, di nuovo, che l'immagine è invertita. L'ingrandimento angolare (quello che interessa per vedere un oggetto distante come se fosse vicino) è semplicemente $G_a = \beta/\alpha = G_t^{-1}$ che con le lunghezze focali che abbiamo considerato diventa, a meno del segno,

$$G_a = \left|\frac{f_1}{f_2}\right| = \frac{1m}{1cm = 10^{-2}m} = 100 \tag{3.11}$$

Capitolo 4

Applicazione agli specchi

4.1 Matrice di riflessione

Con un po' di geometria elementare, applicando l'approssimazione di Gauss ad uno specchio sferico, si ritrova senza difficoltà la nota equazione degli specchi sferici

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = -\frac{2}{R} \tag{4.1}$$

Da cui segue immediatamente la posizione dei due fuochi quando, a turno, $p \to \infty$ e $q \to \infty$

$$f_1 = -\frac{R}{2}$$

$$f_2 = \frac{R}{2}$$

Utilizzando lo stesso procedimento impiegato per il diottro (che qui non ripeteremo) se si definisce come vergenza

$$V = -\frac{2n_0}{R}$$

si ricava semplicemente la matrice di riflessione per uno specchio sferico

$$R_s(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

4.2 Il telescopio a riflessione

Il telescopio a riflessione è uno strumento analogo al telescopio a rifrazione, il cui obiettivo è però costituito da uno specchio M_p, lo specchio primario, il cui fuoco è F_p ed al quale è spesso associato un secondo specchio M_s, lo specchio secondario. In fig. (4.1) si vede il montaggio alla Cassegrain, in cui il fascio passa attraverso un'apertura in M_p e converge al fuoco Cassegrain F_C. I vantaggi dei telescopi a riflessione rispetto a quelli a rifrazione sono essenzialmente due:

1. non vi è aberrazione cromatica in quanto i fasci non passano attraverso un mezzo rifrangente,
2. il diametro d'apertura può essere molto più grande, in quanto è più facile costruire uno specchio di grandi dimensioni piuttosto che una lente.

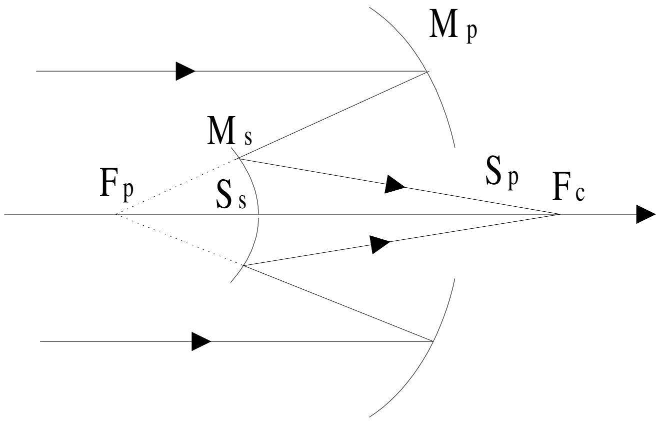

Figura 4.1: Principio del telescopio a riflessione.

La matrice di trasferimento dal vertice S_p di M_p prima della riflessione al vertice S_s di M_s dopo la riflessione è

$$T(\overline{S_pS_s}) = R_m(S_s)\tau(\overline{S_pS_s})R_m(S_p)$$

che esplicitamente diventa, considerando V_p e V_s la vergenza rispettiva di ciascun diottro,

$$T(\overline{S_pS_s}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - e_1V_p & e_1 \\ -V_1 & 1 - e_1V_s \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

dove $V_1 = V_p + V_s - e_1V_pV_s$. Se prendiamo $R_p = 20m$, $e_1 = 8m$ e $R_s = 4,5m$, avremo

$$T(\overline{S_pS_s}) = \begin{pmatrix} 0.2 & 8 \\ -0.012 & 4.52 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

da cui si deduce che la vergenza del sistema è $V = 0.012\delta$, il fuoco immagine è $f_i = 1/V_1 = 83.3m$, il fuoco oggetto $f_0 = -1/V_1 = -83.3m$.

Con un'osservazione oculare si costituisce un sistema afocale simile a quello del telescopio a rifrazione in cui il fuoco immagine dell'obiettivo coincida con il fuoco oggetto dell'oculare in modo che i raggi emergenti dall'obiettivo ed incidenti sull'occhio siano tra loro paralleli. Adottando come entrata E il punto principale oggetto dell'obiettivo e come uscita S il punto principale immagine dell'oculare ed e come distanza tra i due si ritrova la stessa matrice di trasferimento del telescopio a rifrazione che è in realtà caratteristica di ogni costruzione afocale

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} 1 - eV_E & e \\ -V & 1 - eV_S \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

con $V = V_E + V_S - eV_EV_S = 0$ ed $e = f_1 + f_2$, per cui

$$T(\overline{ES}) = \begin{pmatrix} -f_2/f_1 & f_2 + f_1 \\ 0 & -f_1/f_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Prendendo i valori del caso in esame, con un oculare di focale $f_2 = 8cm$ si ha un ingrandimento angolare $G_a = |f_1/f_2| = 1000$.

4.3 Cavità risonanti

4.3.1 Cavità sferica confocale

Consideriamo come esempio una cavità confocale simmetrica (fig. 4.2). I due fuochi sono coincidenti a metà della distanza $\overline{S_2S_1}$, al centro

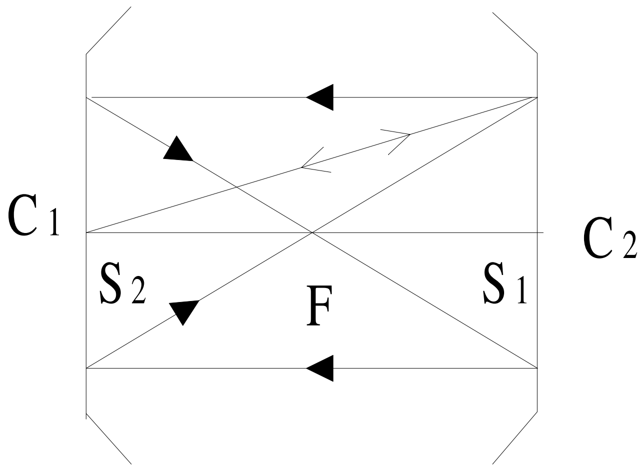

Figura 4.2: Cavità confocale simmetrica.

della cavità, i centri di curvatura C_1 e C_2 sono situati ai vertici S_2 ed S_1. Si vede semplicemente dalla figura che l'immagine di un oggetto su uno specchio torna a coincidere con l'immagine stessa dopo due *round trip* della luce in cavità. In queste condizioni siamo certi che il fascio non diverga lateralmente il che assicura una buona intensità del fascio uscente da una delle superfici semi-riflettenti. In altri tipi di cavità che danno delle performances migliori l'ingrandimento risulta uguale all'unità solo dopo un gran numero di *round trip*. Costruiamo la matrice di trasferimento tra due punti, A_i e A_0, su un piano interno alla cavità ottica.

$$T(\overline{A_0A_i}) = \tau(\overline{S_2A_i})R_m(S_2)\tau(\overline{S_1S_2})R_m(S_1)\tau(\overline{A_0S_1})$$

Sfruttando il fatto che un segmento può essere visto come somma di due segmenti e la relativa matrice di traslazione come prodotto delle due matrici di traslazione, abbiamo che $\tau(\overline{S_2A_i}) = \tau(\overline{S_1A_i})\tau(\overline{S_2S_1})$ che inserito nella precedente dà

$$T(\overline{A_0A_i}) = \tau(\overline{S_1A_i})T_{rt}\tau(\overline{A_0S_1})$$

dove

$$T_{rt} = \tau(\overline{S_2S_1})R_m(S_2)\tau(\overline{S_1S_2})R_m(S_1)$$

è la matrice di *round trip*. Chiamando V_1 e V_2 le vergenze dei due specchi ed e la loro distanza caratteristica che tiene conto anche dell'indice di rifrazione del mezzo abbiamo esplicitamente

$$T_{rt} = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{rt} = \begin{pmatrix} 1 - eV_1 - e(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & e + e(1 - eV_2) \\ -(V_1 + V_2 - eV_1V_2) & 1 - eV_2 \end{pmatrix}$$

Nel caso della cavità confocale simmetrica abbiamo $R_1 = R_2 = -e$, $V_1 = V_2 = 2/e$, $V = 0$ per cui

$$T_{rt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \tag{4.7}$$

Dopo un numero pari di riflessioni si ritrova appunto la coincidenza dell'oggetto con l'immagine in quanto A_0 ed A_i sono coniugati

$$T(\overline{A_0A_1}) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{S_1A_i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T_{rt}^{2m} \begin{pmatrix} 1 & -\overline{S_1A_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{S_1A_i} - \overline{S_1A_0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \tag{4.8}$$

4.3.2 Cavità sferica generica

Quando non ci si trova nel caso particolarmente stabile di una cavità sferica confocale c'è la possibilità che il raggio luminoso di riflessione in riflessione inizi a divergere ed esca dai lati della cavità. Si rende quindi necessario trovare una relazione che assicuri la stabilità della cavità. Consideriamo un piano β in cavità ed un raggio che parta da un punto P_0 su di esso (fig. 4.3). Dopo riflessione il raggio intersecherà il piano nel punto P_1. Se indichiamo con $\bar{X}_0$ ed $\bar{X}_1$ i raggi vettore nei due punti si avrà

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \bar{X}_0 \tag{4.9}$$

dove la matrice $ABCD$ è la matrice di trasferimento per un *round trip* in cavità. Dopo un'altra riflessione il raggio intersecherà il piano in un punto P_2 e si avrà

$$\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \bar{X}_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^2 \bar{X}_0 \tag{4.10}$$

dopo n *round trip* il punto P_n sarà dato da

$$\bar{X}_n = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \bar{X}_0 \tag{4.11}$$

Perché si abbia stabilità serve che la matrice $ABCD$ non diverga all'aumentare di n. Dalle proprietà del calcolo matriciale, dopo alcune elaborazioni, si trova che, affinché la matrice non diverga, deve essere

$$-1 < \frac{1}{2}(A + D) < 1 \tag{4.12}$$

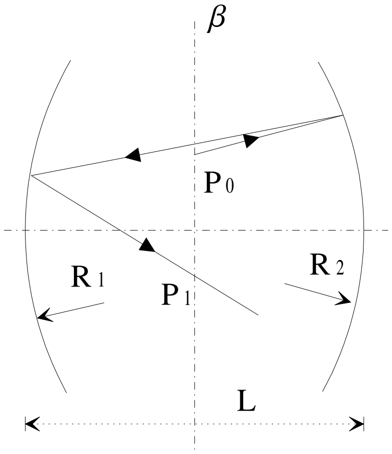

Figura 4.3: Cavità sferica generica.

Applichiamo quanto visto ora in generale alla cavità che stiamo considerando ponendo il piano β appena di fronte al primo specchio. La matrice di trasferimento sarà $T(\beta) = \tau(\overline{L})R_m(2)\tau(\overline{L})R_m(1)$ che esplicitamente diventa

$$T(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & L \\ -2/R_1 & 1-(2L/R_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ -2/R_2 & 1-(2L/R_2) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

ed una volta svolta l'ultima moltiplicazione si ha

$$\frac{A + D}{2} = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \tag{4.14}$$

che diventa infine

$$\frac{A + D + 2}{4} = (1 - \frac{L}{R_1})(1 - \frac{L}{R_2}) = g_1 g_2 \tag{4.15}$$

L'equazione (4.12) può essere riscritta come

$$0 < \frac{A + D + 2}{4} < 1 \tag{4.16}$$

e quindi si ritrova la condizione di stabilità

$$0 < g_1 g_2 < 1 \tag{4.17}$$

Capitolo 5

Onde sferiche e fasci gaussiani

5.1 Onde sferiche

La formulazione matriciale può essere utile non solo per studiare il comportamento di raggi luminosi, ma anche la propagazione di onde sferiche attraverso un sistema ottico. Consideriamo due raggi coniugati $\bar{X}_1$ ed $\bar{X}_2$ in aria di due onde sferiche con centro in P_1 e P_2 (fig. 5.1). I

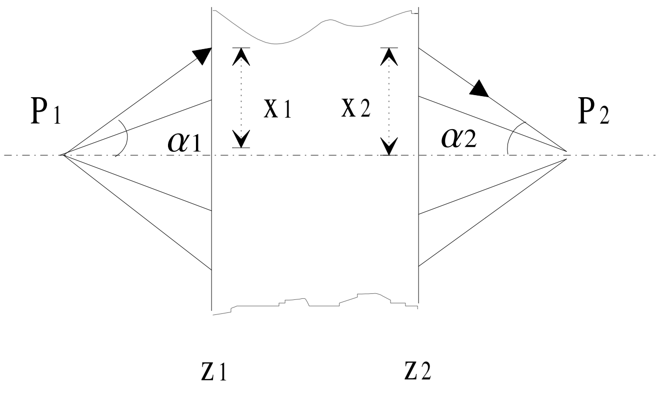

Figura 5.1: Propagazione di un'onda sferica attraverso un sistema ottico.

raggi di curvatura delle due onde saranno

$$R_1 = \frac{x_1}{\alpha_1}$$

$$R_2 = \frac{x_2}{\alpha_2}$$

ed utilizzando queste relazioni sul prodotto

$$\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \bar{X}_1 \tag{5.1}$$

si ottiene, con alcuni passaggi ed utilizzando proprietà delle matrici,

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D} \tag{5.2}$$

Quindi, data la matrice di trasferimento di un sistema ottico, si può ricavare il raggio di curvatura R_2 dell'onda in uscita, noto R_1 dell'onda incidente. Consideriamo due esempi banali.

Propagazione nello spazio Utilizziamo come matrice $ABCD$ la matrice di traslazione tra due punti z_1 e z_2. La (5.2) diventa la banale

$$R_2 = R_1 + (z_2 - z_1) \tag{5.3}$$

Propagazione attraverso una lente sottile Utilizziamo come matrice $ABCD$ la matrice di rifrazione della lente sottile. La (5.2) diventa

$$R_2 = \frac{R_1}{-\frac{R_1}{f} + 1} = \frac{fR_1}{-R_1 + f} \tag{5.4}$$

che con una minima elaborazione dà la familiare

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \tag{5.5}$$

5.2 Fasci gaussiani

Introduciamo nella trattazione dei fasci gaussiani il parametro complesso q, chiamato raggio complesso del fascio gaussiano, dato da

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - \imath\frac{\lambda}{\pi w^2}$$

Utilizzando il parametro q per descrivere un fascio gaussiano si può trattare in modo semplice il passaggio attraverso un sistema ottico. Si trova infatti che se q_1 è il raggio incidente e q_2 è il raggio emergente si ha un'equazione simile a quella per i fasci sferici

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{5.6}$$

nota come relazione $ABCD$ di propagazione per fasci gaussiani. Come semplice esempio consideriamo un fascio gaussiano con waist w_1 su una lente sottile di lunghezza focale f. Cerchiamo la posizione e la taglia del waist w_2 dopo la lente. La matrice $ABCD$ del sistema ottico è la composizione di una matrice di traslazione di una matrice di rifrazione della lente ed è

$$M_{ABCD} = \begin{pmatrix} 1 - z/f & z \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Applichiamo ora la relazione (5.6) riscritta come segue

$$\frac{1}{q_2} = \frac{C + D(1/q_1)}{A + B(1/q_1)} \tag{5.8}$$

dove $(1/q_1)$ è dato da

$$\frac{1}{q_1} = -\imath \frac{\lambda}{\pi w_1^2} = -\frac{\imath}{z_{R1}} \tag{5.9}$$

dove z_{R1} è il range di Rayleigh corrispondente al waist w_1. Imponendo che $(1/q_2)$ sia immaginario puro si ottiene il valore z_M

$$z_M = \frac{f}{1 + (f/z_{R1})^2} \tag{5.10}$$

Come noto si ottiene che la taglia più piccola del raggio occorre ad una distanza z_M che è minore di f. In condizioni tipiche però $z_{R1} \gg f$ cosicché $z_M \simeq f$ e con questa approssimazione si ottiene

$$w_2 \simeq \frac{\lambda f}{\pi w_1} \tag{5.11}$$