Seminario conclusivo del corso di
Ottica Quantistica
A.A. 2000-2001

SAL: Single Atom Laser

Le frontiere dell'interazione luce-materia

Fabio Zulli
Corso di Laurea in Fisica

Università di Pisa

Pisa, 19 Giugno 2001

Seminario conclusivo del corso di
Ottica Quantistica
Prof. Danilo Giulietti
A.A. 2000-2001

salbook 13 Agosto 2001 23:11 Fabio Zulli

Questo testo è stato ottenuto dall'autore riproducendo l'originale scritto dall'autore mediante l'uso del programma LaTeX, versione 2ε.
I caratteri usati sono quelli in distribuzione insieme al suddetto programma.
L'autore si è avvalso del file di stile `libro.sty` realizzato da Fabio Zulli.
Il testo è stato compilato alle 23:11 il 13 Agosto 2001 con TETEX 1.0 sotto un sistema operativo `linux` (distribuzione `Red Hat 6.2`).

Per eventuali comunicazioni: `http://bulgakov.monrif.net.`
E-mail `df207753@studenti.df.unipi.it`
oppure `bulgakov@monrif.net.`

Stampato in proprio. Pisa, 13 Agosto 2001.
Printed in Italy.

Nur die Fuelle fuehrt zur Klarheit
Und im Abgrund liegt die Wahrheit.
(Niels Bohr)

Solo la completezza porta alla chiarezza
e la verità abita nell'abisso.

Prefazione

Un laser a singolo atomo non può leggere codici a barre o compact disk, né tantomeno trovare impiego industriale. Ha una potenza di circa 1 pW mentre un laser Nd:YAG ha tipicamente una potenza dell'ordine di grandezza di un Watt.

Tuttavia questo dispositivo è già oggi, a pochi anni dalla sua realizzazione, molto importante. Costituisce infatti un ausilio strumentale per tutti coloro che si occupano di principi primi in QED poiché la luce che esso genera ha caratteristiche regolate esclusivamente dalla meccanica quantistica e lascia scarso spazio ad interpretazioni anche semiclassiche.

Tuttavia promette bene anche in campo di utilizzo più direttamente pratico: è un notevole strumento di indagine degli stati intrappolati. Quando un atomo entra in una cavità e, dopo aver cambiato stato una o più volte in quella che si chiama oscillazione, ne esce allo stesso stato iniziale, si parla di stato intrappolato ("trap state"). Questi stati hanno un'incertezza molto bassa dell'ampiezza e quindi possono essere utilizzati per spettroscopia di precisione. Si spera inoltre di riuscire ad indagare il fenomeno del "collapse-revival" quantico.

Esiste anche una diretta occasione di impiego tecnologico. La possibilità di manipolare informazioni a basso rumore consente lo studio del comportamento di dispositivi ottici votati alla costituzione di computer ottici permettendo di illuminare i meccanismi intimi dell'interazione tra radiazione e materia.

Il presente lavoro prenderà le mosse, dopo una breve illustrazione dello sviluppo storico del laser a singolo atomo, dalla descrizione del funzionamento del dispositivo. Seguirà l'analisi della teoria che giustifica i risultati ottenuti e, alla luce di quest'ultima, una revisione sulle migliorie da effettuare sull'apparato, nonché sulle tecniche più finemente ingegnose adottate nella realizzazione del laser. Contemporaneamente saranno presentati i risultati sullo studio dell'emissione del dispositivo. Nel corso del lavoro saranno anche affrontati gli aspetti della QED sui quali ci si attende che il laser a singolo atomo faccia nuova luce, i lavori in corso d'opera e le prospettive future.

Fabio Zulli
Pisa, 19 Giugno 2001

Indice generale

Prefazione v

Capitolo I Introduzione 1

I.1 Storia della realizzazione del S.A.L. 1
I.1.1 Una teoria per l'interazione tra atomi e cavità 1
I.1.2 Micromaser e Microlaser 1
I.1.3 Il laser a singolo atomo 2

Capitolo II Descrizione di un Laser a Singolo Atomo 3

II.1 Laser tradizionali e S.A.L. 3
II.2 Accumulazione di fotoni in cavità 3
II.2.1 Supercavità 4
II.3 Meccanismi di eccitazione 5
II.3.1 Preparazione del fascio di atomi di Bario 5
II.3.2 Eccitazione degli atomi di Bario 6
II.3.3 Il laser Ti:Zaffiro 6
II.4 Rivelazioni e ottiche 6
II.5 Risultati 7
II.6 Prospettive future 8
II.6.1 Bistabilità ottica 8
II.6.2 Collapse-revival quantistico 8

Capitolo III Teoria degli atomi in cavità ad alto Q 9

III.1 Il campo elettromagnetico in meccanica quantistica 9
III.1.1 Hamiltoniana classica 9
III.1.2 Hamiltoniana quantistica 10
III.1.3 Rabi semiclassico 11
III.2 Atomi in cavità ad alto Q 11
III.2.1 Hamiltoniana nel caso di atomo a due livelli 11
III.2.2 Livelli energetici e "dressed states" 13
III.2.3 Evoluzione temporale del sistema 14
III.2.3.1 L'operatore evoluzione temporale 14
III.2.3.2 L'operatore densità 15

III.2.3.3 Evoluzione temporale degli stati del sistema 15
III.3 Riscontri sul microlaser 16

Capitolo IV Analisi dell'emissione del S.A.L. 17
IV.1 Intensità del S.A.L. 17
IV.1.1 Espressione per il numero medio di fotoni in cavità 18
IV.1.2 Dipendenza del numero di fotoni dal numero medio di atomi 20
IV.1.3 Comportamento sperimentale del microlaser 21
IV.1.4 Schema ad "onde viaggianti" 21
IV.2 Spettro di emissione del S.A.L.: previsione teorica 22
IV.2.1 Soluzione delle equazioni di Maxwell Schrödinger 23
IV.2.2 Potenza emessa in funzione del tempo 24
IV.2.3 Spettro in frequenza dell'output 24
IV.3 Spettro di emissione del S.A.L.: risultati sperimentali 25
IV.3.1 Il contributo delle fluttuazioni 25
IV.3.2 Regime di singolo atomo 26

Bibliografia 29

Indice delle immagini 31

Indice analitico 32

CAPITOLO I

Introduzione

I.1 Storia della realizzazione del S.A.L.

A volte accade che in fisica le situazioni più semplici da analizzare per un teorico siano tra le più complicate da realizzare per uno sperimentale. Questo è, tra gli altri, il caso del laser a singolo atomo (S.A.L., acronimo di Single Atom Laser).

I.1.1 *Una teoria per l'interazione tra atomi e cavità*

Il problema dell'interazione di un singolo atomo con un singolo modo quantizzato di un campo elettromagnetico ha una soluzione esatta qualora i processi irreversibili che danno origine a smorzamento (quali l'emissione spontanea o il decadimento del modo del campo) siano trascurabili. A questo punto lo scambio di energia tra atomo e campo è accompagnato da un fattore di accoppiamento caratterizzabile in maniera analoga al caso di oscillatori accoppiati. Un importante risultato teorico che si raggiunse fu che questo "coupling" è apprezzabile anche non in presenza di un campo, ma nel vuoto. Una completa descrizione di questi comportamenti, dovuta a E.T. Jaynes e F.W. Cummings, risale ormai già ad alcune decine di anni fa [1].

I.1.2 *Micromaser e Microlaser*

Numerosi si susseguirono negli anni successivi progressi teorici ed esperimenti, ma solo dopo venti anni si giunse a quello che indubbiamente fu allora uno dei migliori strumenti di studio della QED delle cavità: il micromaser, il maser a singolo atomo. La realizzazione di questo pioneristico dispositivo si deve a Meschede e altri ed è ormai datata di quindici anni [16].

La presenza di questo sistema aprì la strada allo studio di numerosi fenomeni quali la misura dell'ampiezza di riga del micromaser [17], la generazione del numero di stati [18], "squeezing" [19], stati intrappolati [20] e collassi e rinascite quantistiche [21]; tuttavia molti di questi progetti rimasero in cantiere e ad oggi devono ancora essere realizzati.

Il più forte deterrente per lo sviluppo della ricerca su questo sentiero è stata infatti la nascita, relativamente molto ravvicinata per questo tipo di dispositivi, del primo microlaser[a],

[a]Il termine microlaser si usa attualmente anche per riferirsi a dispositivi a stato solido di misure ridotte. Nel seguito di questo lavoro non si farà riferimento a tali devices, quindi si continuerà a parlare di microlaser con l'unica accezione di laser a singolo atomo.

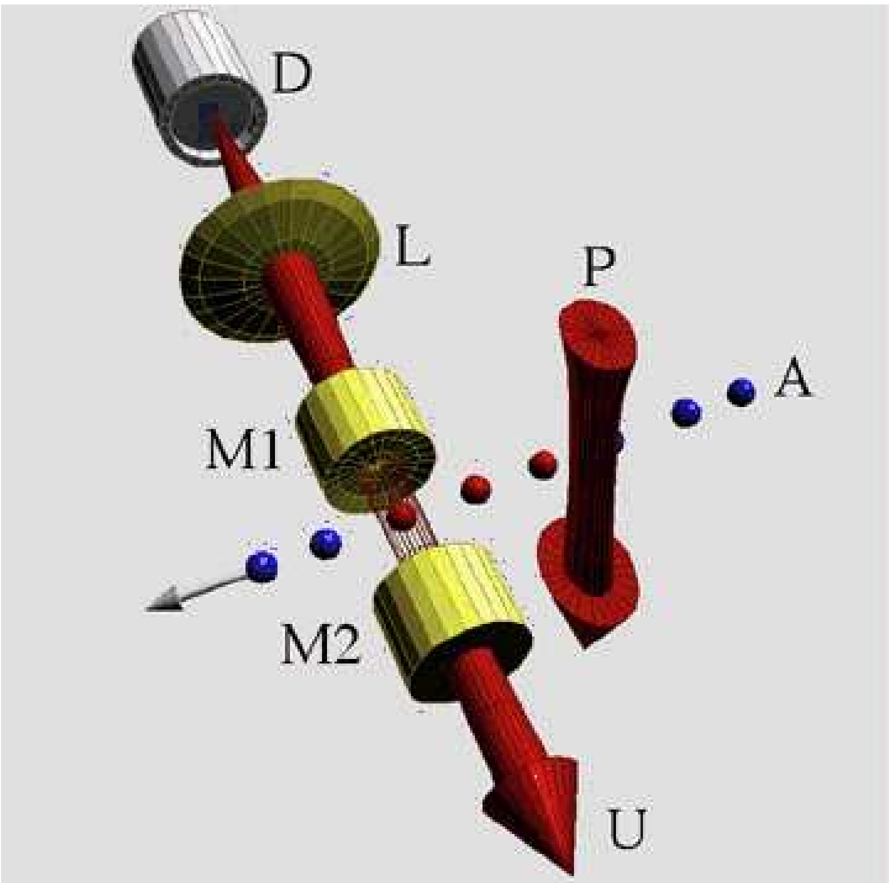


Fig. I.1.1 Vista schematica 3D del SAL [`sorak.kaist.ac.kr/~kwan`].

la controparte ottica del micromaser. Un tale strumento infatti ha catalizzato subito su di sé l'attenzione dei fisici impegnati nella QED delle cavità dal momento che permetteva, oltre la detezione di atomi come nel regime delle microonde, anche misure sui fotoni; quindi lo studio approfondito delle statistiche dei fotoni.

I.1.3 *Il laser a singolo atomo*

Questo passaggio da un micromaser a un laser a singolo atomo ha richiesto circa una decina di anni. Un tempo breve se si considera che tra il primo maser e il primo laser trascorsero cinque anni; tuttavia importante considerando i tempi rapidi dell'evoluzione tecnologica oggigiorno. L'ostacolo maggiore fu la realizzazione di cavità ad alto Q nel range delle frequenze ottiche. Il contributo della tecnologia delle supercavità è stato perciò determinante permettendo di ottenere per le cavità fattori di merito anche superiori a 10^6. Il primo laser a singolo atomo è stato realizzato nel 1994 nei laboratori del MIT da un'equipe di ricercatori guidata da Childs, An, Feld e Dasari [7; 6].

A tutt'oggi questa tecnologia è ancora da migliorare per permettere di eseguire studi più efficaci sul comportamento quantistico dell'interazione atomo-fotone. Detettori per il foto-conteggio con efficienze fino all'80% permettono infatti di migliorare gli studi sulle statistiche dei fotoni, cosa che risulta molto difficile nei micromaser per il fatto che è richiesta una complicata configurazione del tipo di quelle per le frange di Ramsey.

CAPITOLO II

Descrizione di un Laser a Singolo Atomo

Il lavoro con il microlaser piuttosto che con il micromaser permette indagini più interessanti dovute al fatto che si lavora nel range ottico dove c'è un importante aumento dell'energia dei fotoni e dell'impulso. L'aumento dell'impulso permette lo studio delle oscillazioni di Rabi con i gradi di libertà dell'atomo poiché lo scambio di un fotone con la cavità può sensibilmente deviare la traiettoria dell'atomo; l'aumento dell'energia permette la misura del numero di fotoni e dello spettro di emissione attraverso la misura diretta dei fotoni, mentre per il micromaser ciò è possibile solo per gli atomi.

II.1 Laser tradizionali e S.A.L.

Idealmente il laser a singolo atomo ha lo stesso funzionamento dei laser tradizionali. È cioé costituito da un blocco in cui si realizza un'eccitazione, una cavità in cui si realizza l'accumulazione di fotoni emessi dal mezzo attivo e fasi successive di ulteriori amplificazioni.

Tuttavia nel nostro caso è arduo parlare di inversione di popolazione o amplificazione in cavità perché, essendoci mediamente un numero di atomi che va da zero a uno[a], non ci sono possibilità per l'amplificazione come la conosciamo per i laser tradizionali, essendo assente mezzo attivo. Avendo comunque al massimo un atomo in transito, ed essendo su uno stato eccitato, sarà realizzata ogni volta una sorta di inversione di popolazione che però non si concretizza come nei casi tradizionali in una amplificazione dei fotoni emessi, ma può, qualora ci fosse emissione e intrappolamento dei fotoni in cavità, indurre con maggiore probabilità l'emissione per gli atomi successivi. La regolazione dei parametri dell'esperimento, e in particolare della cavità, agisce sul tempo di vita medio in cavità dei fotoni e quindi sulla bontà del laser.

II.2 Accumulazione di fotoni in cavità

Il S.A.L. ha un sistema insolito di amplificazione: sfrutta il processo di oscillazione quantizzata di Rabi. Il fenomeno è conosciuto anche dagli studenti che sanno che un campo sinusiodale interagisce con un atomo a due livelli in modo che la probabilità di assorbimento (e quindi di emissione) sia anch'essa sinusoidale a meno di una fase (costante nel tempo); ecco il perché

[a] Si capisce bene che in cavità non c'è una frazione di atomo, ma ci si intenda sul fatto che ci si riferisce al numero di atomi mediamente presenti in cavità nel tempo loro necessario all'attraversamento.

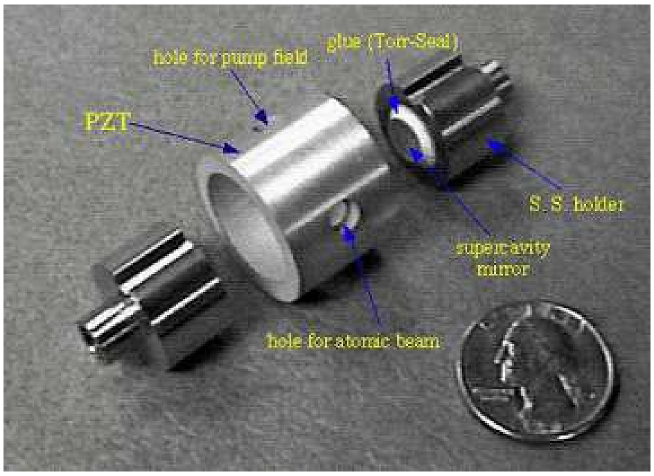


Fig. II.2.1 Fotografia della cella utilizzata [web.mit.edu/minwah/www/sal.html].

dell'uso del riferimento all'oscillazione.

Nel 1963 Cummings e Jaynes [1], a partire dai risultati di Rabi, giunsero a spiegare come un singolo atomo a due livelli di energia possa interagire con un'onda a basso numero di fotoni. Con un solo atomo le frequenze di oscillazione di Rabi non possono essere arbitrarie, ma quantizzate secondo l'intensità del campo.

La conseguenza più significativa del loro lavoro teorico fu che si intravide la possibilità che un atomo fosse indotto all'emissione anche senza la presenza di un campo esterno, ma solo perché si trova in una cavità [2].

Se la cavità (formata da due specchi opposti) è ben accordata sulla frequenza di risonanza per i fotoni emessi, essi rimangono in cavità e inducono a loro volta all'emissione gli atomi che via via giungono in cavità. C'è in questo modo una sorta di accoppiamento tra atomi e fotoni. Su questo principio si fonda il funzionamento della cavità di un laser a singolo atomo.

Quindi, una volta entro gli specchi, l'atomo emette per oscillazione Rabi. Quando un nuovo atomo entrerà trovando un fotone, la sua probabilità di emissione sarà decisamente maggiore. Questo porta a una situazione di equilibrio in cui il numero di fotoni rimane costante perché l'energia persa dovuta al decadimento del modo della cavità e all'emissione spontanea è esattamente bilanciata dal trasferimento medio di energia dall'atomo eccitato al modo del campo [3; 4; 5].

II.2.1 *Supercavità*

Il risuonatore utilizzato è composto da una supercavità a due specchi. Gli specchi hanno una curvatura di 10 cm e sono tra loro separati da 1.1 mm, montati su un trasduttore piezoelettrico per regolare la frequenza della cavità e porla in risonanza. La cavità è una supercavità con fattore di merito di $8 \cdot 10^5$ per il primo esperimento ed è ora passato a valori dell'ordine di grandezza di 10^9; quindi permette di aumentare sensibilmente la probabilità di emissione quand'anche fosse vuota. Il montaggio degli specchi è tale da minimizzare vibrazioni meccaniche. Una volta allineati gli specchi una tecnica di "locking" fissa la frequenza della cavità a quella della pompa laser.

Q è stata misurata con tecniche di ring-down [9]. $\Delta\omega$=190 kHz è la larghezza in frequenza

Tabella II.2.1 Alcuni dispositivi laser a confronto.

	He-Ne	Nd:YAG	semiconduttore in microcavità	S.A.L.
dist. specchi	$20 \div 100$ cm	$5 \div 15$ cm	$2 \div 5$ mm	1 mm
N_{at}	10^{16} atomi Ne	10^{19} ioni Nd	10^{6} coppie lacuna-elettrone	1[b]
Potenza	1 mW	1000 mW	0.1 mW	10^{-9} mW

di pulsazione associata al fattore di merito. Il range spettrale di 150 GHz e la separazione tra i modi trasversali di 6.8 GHz concorrono ad assicurare facilmente il solo modo TM_{00} tra gli specchi. La geometria del sistema fornisce inoltre per il coefficiente di accoppiamento il valore $\lambda \simeq 2.2 \cdot 10^{6}$ rad/sec.

Per misurare la Q, si investiga il decadimento del modo della cavità. In uno schema tradizionale viene immagazzinato in cavità un impulso elettromagnetico e nel tempo viene osservato il suo decadimento. La durata dell'impulso deve essere molto più corta del tempo di decadimento in modo che si possa considerare una funzione delta. Questo si fa con l'ausilio di un interruttore e di un trigger; tuttavia ci sono dei limiti per Q alte.

Più utile per una supercavità è un'altra tecnica che non richiede l'utilizzo né di una sorta di interruttore, né tantomeno di un trigger. Il principio di funzionamento è questo: se lo scanning della cavità è breve, è risonante solo per un tempo molto piccolo col probe del laser, quindi è effettivamente ben ottenuta una delta. Controllando la velocità di scanning si può controllare quanto campo viene realizzato; il ripetuto scanning della cavità permette poi di misurare con un fotodiodo il decadimento e visualizzarlo in tempo reale su un oscilloscopio.

II.3 Meccanismi di eccitazione

Per rispettare le condizioni della teoria di Jaynes e Cummings è necessario disporre di atomi a due livelli ed in più a basso coefficiente di emissione spontanea. Per questo si usano atomi di ^{138}Ba nella transizione $^{3}\mathrm{P}_1(\mathrm{m}=0) \rightarrow {}^{1}\mathrm{S}_0$ di energia equivalente a una lunghezza d'onda di 791 nm. La larghezza di riga è di 50 kHz.

Gli atomi in vapore poco denso vengono fatti entrare in tubi di acciaio. Il vapore viene poi deviato sulla cavità posta a 43 cm dal forno avendo selezionato gli atomi in un fascio di spot dalle dimensioni lineari di 0.34 mm.

II.3.1 *Preparazione del fascio di atomi di Bario*

La loro preparazione si svolge facendo evaporare Ba metallico in un forno a temperatura piuttosto elevata e deviando i vapori così generati sulla cavità. Il Ba metallico è composto al 72% da atomi di ^{138}Ba. Dal momento che tali vapori hanno una velocità rms di circa 350 m/sec e non sono eccessivamente densi si può lavorare in modo che nel tempo di transito attraverso la cavità (il cui modo è largo circa 80 μm) ci sia meno di un atomo alla volta.

Questo si fa regolando la temperatura del forno che agisce tanto sulla velocità che sul flusso. Ad esempio variando la temperatura attorno ai 550°C si misura un flusso di densità $4 \cdot 10^{5}$ atomi/cm^{3}. Per calibrare l'intensità del flusso si usa la transizione $^{1}\mathrm{P}_1 \rightarrow {}^{1}\mathrm{S}_0$ che ha lunghezza d'onda di 553 nm. Un "diaframma" di dimensoni lineari di 0.34 mm viene piazzato davanti la cavità per confinare il fascio atomico trasversalmente.

[b] È evidente che questa esattezza non ha molto senso fisico.

II.3.2 *Eccitazione degli atomi di Bario*

Il fascio prodotto è di atomi praticamente tutti allo stato fondamentale. Per permettere la prima emissione e il successivo riempimento della cavità con fotoni è necessario che essi arrivino eccitati. Prima dell'ingresso in cavità gli atomi devono essere portati al livello $^3P_1$ che per comodità diremo superiore.

Questo è possibile grazie all'uso di un laser a Ti:Sapphire in modo continuo. Il laser è calibrato in maniera tale che gli atomi a velocità più probabile siano investiti da una radiazione a impulso π per avere il massimo della popolazione nello stato superiore. Questa regolazione si effettua agendo su sezione del fascio e intensità. Il "waist" misurato è nel primo esperimento di microlaser di 30 micrometri equivalenti a un tempo di broadering di 250 nsec (4MHz). Un campo di 10 Gauss era applicato parallelamente alla pompa per assicurare le sole transizioni $\Delta m = 0$.

Normalmente il tempo di decadimento del ^{138}Ba dal livello $^3P_1$ al $^1S_0$ è di 3 μsec, ma il transito attraverso la cavità li induce all'emissione nell'attraversamento, cioé entro i 240 nsec necessari al transito. In queste condizioni al primo transito avremo il 23% di probabilità di emissione. La probabilità di emissione del secondo sarà del 42% e così via mentre i fotoni si accumulano come in una cavità tradizionale.

II.3.3 *Il laser Ti:Zaffiro*

La pompa laser ha nominalmente una frequenza di stabilità di 300 kHz relativa alla frequenza di emissione. Tuttavia certi shift, anche se piccoli, sono imaccettabili per il pompaggio che vuolsi essere molto efficace, quindi si chiede una grande stabilità in frequenza.

Questo si realizza utilizzando tecnica di locking FM impiegando una cella separata di vapori di Bario in una configurazione Lamb-dip [10].

La stabilizzazione della frequenza di un laser è fondamentale per la spettrometria ad alta sensibilità, la rivelazione di onde gravitazionali, microlaser. Le tipologie più utilizzate sono riconducibili a schemi a due tappe: prima si aggancia la frequenza del laser alla frequenza di riferimento di una cavità stabile, poi questa viene agganciata alla transizione atomica o molecolare che sia.

Un metodo a un solo "step" è più semplice ed è quello utilizzato per accordare il laser Ti:Sapphire alla transizione del Bario. Senza perdersi nei dettagli, lo schema è semplicemente fatto in modo che la spettroscopia FM, applicata alla cella Lamb-dip, indichi la dispersione del segnale la quale fornisce una reazione negativa che corregge la frequenza del laser.

II.4 Rivelazioni e ottiche

I fotoni in cavità possono essere trattenuti per 1 μsec. Feld e An misurarono il numero di fotoni trattenuti misurando l'intensità del fascio in uscita con un rivelatore che poteva contare il 40% dei fotoni che lo raggiungono. Si poteva variare la densità del vapore con la temperatura e quindi il numero di fotoni in cavità.

Un fotodiodo a silicio "avalanche" con raffreddamento termoelettrico (EG&G modello C30902S-TC) è stato utilizzato per la detezione dell'output del microlaser. Quando il dispositivo è raffreddato a -20°C, l'efficienza del conteggio è di circa il 36%. Con un circuito di

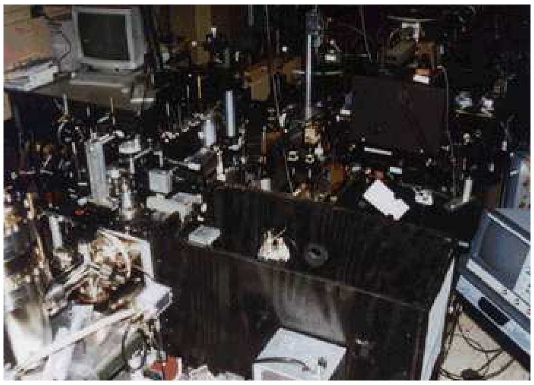
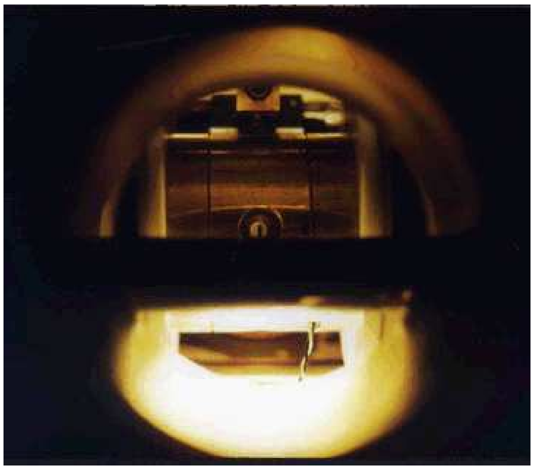



Fig. II.3.1 Fotografia del montaggio del dispositivo [`sorak.kaist.ac.kr/~kwan`].
Fig. II.3.2 Vista camera a vuoto che alloggia il SAL [`sorak.kaist.ac.kr/~kwan`].

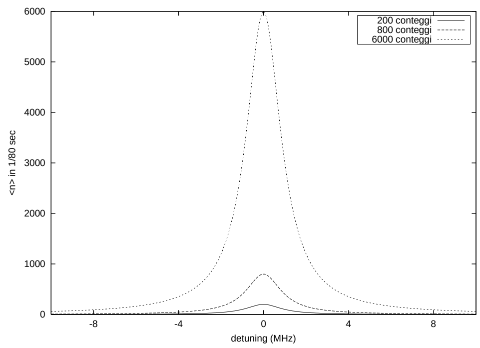


Fig. II.5.1 Potenza emessa dal laser a singolo atomo.

quenching passivo, il detettore comincia a saturare attorno ai 10^4 counts/sec portando una riduzione del 10% alla efficienza dei conteggi. Ecco che per segnali maggiori di questo livello si usano filtri a densità neutra atti all'attenuazione.

II.5 Risultati

Quando è 0.1 il rate di passaggio, cioé quando la cavità è occupata da un atomo di Bario per il 10% del tempo, l'intenssità è minima: la maggior parte dei fotoni se ne va prima che entrino dei nuovi atomi a produrne degli altri.

Ma già a 0.4 gli atomi emettono circa 1000000 fotoni/sec, abbastanza da rimanere in cavità per tutto il tempo, e quindi aumenta la probabilità addizionale di emissione che passa dal 20% al 43%.

A 0.7 la potenza del laser aumenta di 7 volte. Questo risultato non è più in accordo con le previsioni della teoria e si spiega con due fattori: il breakdown della teoria del singolo atomo e la struttura stazionaria della cavità combinata con effetti di saturazione per valori alti del numero medio di fotoni in cavità [8].

II.6 Prospettive future

Ci si occupa ora del possibile auspicato impiego sperimentale del laser a singolo atomo. Numerose sono infatti le aspettative ereditate dal micromaser e tra queste lo squeezing e il collapse-revival quantico. Inoltre la peculiarità del microlaser ha aperto la porta all'osservazione di nuovi aspetti di fenomeni ottici già noti quali la bistabilità.

Finora gli unici risultati acquisiti in letteratura riguardano appunto la bistabilità [15], ma si deve considerare che lo sviluppo del S.A.L. è ancora in corso e solo nel 1997 è stato realizzato il primo laser con le nuove supercavità con Q di circa 10^9.

II.6.1 *Bistabilità ottica*

La bistabilità ottica è un fenomeno molto conosciuto e studiato[c] [4] nel quale l'assorbimento o la dispersione in un mezzo posto in un risuonatore induce un cambiamento del cammino ottico che è proporzionale all'intensità della luce in cavità in modo tale che la trasmissione mostra più di un punto di stabilità.

Fino al 1997 la bistabilità era stata investigata solo con l'ausilio di mezzi non lineari, anche se una bistabilità ottica puramente classica, dovuta alla pressione di radiazione su specchi mobili, era ampiamente conosciuta dal punto di vista teorico. Sostanzialmente questo aspetto si deve al fatto che il riscaldamento degli specchi è in grado di cambiare la distanza degli specchi in una cavità. Per l'osservazione sono tuttavia necessari requisiti molto stringenti: il campo deve essere estremamente localizzato, si richiede una Q molto alta e una ampiezza di riga molto stretta in grado di risolvere il piccolo shift dovuto all'espansione termica (0.1 nm).

L'equipe del S.A.L. nel 1997 per prima ha osservato questo tipo di bistabilità [15] in condizioni tali da avere la ampiezza di riga 10 volte inferiore allo shift termico. Un tale risultato fa sperare per uno studio più accurato anche della convenzionale bistabilità ottica.

II.6.2 *Collapse-revival quantistico*

Il collasso quantistico è il crollo della probabilità di occupazione di uno stato eccitato in un tempo finito. Se si dispone di uno stato coerente le sue varie componenti in frequenza subiranno interferenza distruttiva dovuta alle oscillazioni quantistiche di Rabi e l'evoluzione temporale dell'atomo che interagirà col campo non sarà più rappresentabile con la solita sinusoide, ma sarà molto simile alla figura di un battimento.

Si potranno quindi evidenziare situazioni di interferenza distruttiva, ma anche di interferenza costruttiva. In questo caso si parlerà di revival. È molto importante notare come questo sia un fenomeno prettamente quantistico; infatti dalla teoria [3] si evince che nel limite classico la differenza tra due frequenze di Rabi vicine si riduce a zero e il tempo necessario alla resurrezione diventa infinito.

[c] Negli anni dal 1980 al 1990 un'intensa attività in questo campo si è registrata anche nel Dipartimento di Fisica dell'Università di Pisa (Gozzini, Maccarone, Arimondo, ...).

CAPITOLO III

Teoria degli atomi in cavità ad alto Q

La teoria che regola l'interazione tra atomi e cavità è una teoria non eccessivamente complessa la cui importanza non è però sempre evidente nelle situazioni sperimentali. Per spiegare i sistemi formati da atomi e cavità, infatti, non è sempre necessario ricorrere al modello Jaynes-Cummings che verrà tra poco illustrato.

Infatti per cavità dal fattore di merito piuttosto basso, l'atomo non risente della presenza della cavità e si può trattare il sistema come nel caso della fluorescenza risonante [5]; cioé dell'atomo nel vuoto. All'aumentare di Q, il fatto che si è in cavità comincia a pesare di più, ma si rimane al livello di perturbazione al problema della fluorescenza.

Improvvisamente, quando Q diventa sufficientemente elevato e i fotoni in cavità vivono sufficientemente da investire nuovamente un atomo, la situazione cambia radicalmente e si può parlare di vera e propria interazione tra atomi e cavità.

III.1 Il campo elettromagnetico in meccanica quantistica

L'equazione delle onde scritta per il potenziale vettore $\boldsymbol{A}$ scritta nella gauge di Coulomb con il campo magnetico ed elettrico ricavati da

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{rot}\boldsymbol{A}(\mathbf{r},t) \tag{eq-III.1}$$

avendo supposto che nella equazione del campo elettrico non ci sia contributo di alcun potenziale elettrico $\phi(\mathbf{r},t)$ per l'assenza di cariche libere. Supponendo inoltre che $\mathbf{J}=0$ allora

$$\nabla^2 \boldsymbol{A}(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0. \tag{eq-III.2}$$

III.1.1 *Hamiltoniana classica*

Se si considera una cavità descritta come una superficie S vengono richieste le condizioni al contorno di annullamento di $\boldsymbol{A}$ su S. Se si decompone il potenziale vettore nelle sue componenti di Fourier

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{r},t) = \sum_k \left[\boldsymbol{A}_k(t)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \boldsymbol{A}_k^*(t)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right] \tag{eq-III.3}$$

con i coefficienti tali che

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}_k(t)}{\partial t^2} + \omega_k^2 \boldsymbol{A}_k(t) = 0. \tag{eq-III.4}$$

La soluzione si può scrivere come

$$\boldsymbol{A}_k(t) = \boldsymbol{A}_k^0 \mathrm{e}^{-i\omega_k t} \tag{eq-III.5}$$

inoltre la gauge di Coulomb impone

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{A}_k(t) = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{A}_k^*(t) = 0. \tag{eq-III.6}$$

Il campo elettrico e quello magnetico associati al modo k possono essere derivati dalle eq-III.1:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k(\mathbf{r},t) &= i\omega_k \left[\boldsymbol{A}_k^0 \mathrm{e}^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \boldsymbol{A}_k^{0*} \mathrm{e}^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]; & \text{(eq-III.7)} \\ \mathbf{B}_k(\mathbf{r},t) &= i\mathbf{k} \times \left[\boldsymbol{A}_k^0 \mathrm{e}^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \boldsymbol{A}_k^{0*} \mathrm{e}^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]. & \text{(eq-III.8)} \end{aligned}$$

L'energia associata al modo è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{cav} \left[\varepsilon_0 \mathbf{E}_k^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_k^2\right] \mathrm{d}x^3 = 2\varepsilon_0 V \omega_k^2 \left(\boldsymbol{A}_k^{0*} \cdot \boldsymbol{A}_k^0\right). \tag{eq-III.9}$$

III.1.2 *Hamiltoniana quantistica*

La quantizzazione del campo elettromagnetico si basa sulla analogia delle equazioni eq-III.2 e eq-III.9 con quelle di un oscillatore armonico in meccanica quantistica. L'analogia sarà ancora più evidente se si pone

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_k^0 &= \left[\omega_k \mathbf{Q}_k + i\mathbf{P}_k\right] \mathbf{u_k} \\ \boldsymbol{A}_k^{0*} &= \left[\omega_k \mathbf{Q}_k - i\mathbf{P}_k\right] \mathbf{u_k} \end{aligned} \tag{eq-III.10}$$

dove $\mathbf{u_k}$ rappresenta il versore unitario della polarizzazione del modo $\mathbf{k}$[a]; l'energia diventa infatti

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{P}_k^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k^2\right]. \tag{eq-III.11}$$

Sostituendo i relativi operatori si ritrova l'hamiltoniana di un oscillatore armonico quantistico. A questo punto è ovvio definire gli operatori di salita e discesa

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{a}}_k &= \left[\omega_k \mathbf{Q}_k + i\mathbf{P}_k\right] \\ \widehat{\mathbf{a}}_k^\dagger &= \left[\omega_k \mathbf{Q}_k - i\mathbf{P}_k\right] \end{aligned} \tag{eq-III.12}$$

e in base a questi riscrivere

$$\widehat{\mathcal{H}} = \sum_k \hbar\omega_k \left[\widehat{\mathbf{a}}_k^\dagger \widehat{\mathbf{a}}_k + \frac{1}{2}\right]. \tag{eq-III.13}$$

[a]Si noti come k e $\mathbf{k}$ indichino la stessa cosa, infatti le componenti di $\mathbf{k}$ sono discretizzate e si ha $\omega_k = c|\mathbf{k}|$; per cui in definitiva si può scrivere $\mathbf{k} = k\frac{\omega_0}{c}$.

Sugli autostati di tale hamiltoniana, caratterizzati dal numero n_k di fotoni nel modo di vettore d'onda $\mathbf{k}$, gli operatori $\hat{\mathbf{a}}_k$ e $\hat{\mathbf{a}}_k^\dagger$ agiscono come per l'oscillatore armonico:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_k \left| n_k \right\rangle &= \sqrt{n_k} \left| n_k - 1 \right\rangle \\ \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \left| n_k \right\rangle &= \sqrt{n_k + 1} \left| n_k + 1 \right\rangle \end{aligned} \tag{eq-III.14}$$

Utilizzando gli operatori di salita e discesa gli operatori associati ai campi si scrivono

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}}_k &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \left[\hat{\mathbf{a}}_k \mathrm{e}^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \mathrm{e}^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right] \mathbf{u_k}, \\ \widehat{\mathbf{B}}_k &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \left[\hat{\mathbf{a}}_k \mathrm{e}^{-i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{a}}_k^\dagger \mathrm{e}^{i\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right] \mathbf{k} \times \mathbf{u_k}. \end{aligned} \tag{eq-III.15}$$

III.1.3 *Rabi semiclassico*

Un sistema affine a quello che andremo a studiare, con soluzione molto nota e facile da trovare, è quello di un sistema a due livelli che interagisce in modo semiclassico con un onda elettromagnetica piana monocromatica. Quello che più ci interessa è l'evoluzione temporale degli stati che porta alla luce oscillazione di probabilità per i due livelli.

Il problema si può porre nei seguenti termini:

$$\begin{aligned} H_0 &= E_1 \left|1\right\rangle \left\langle 1\right| + E_2 \left|2\right\rangle \left\langle 2\right| \\ W(t) &= \gamma \mathrm{e}^{i\omega t} \left|1\right\rangle \left\langle 2\right| + \gamma \mathrm{e}^{-i\omega t} \left|2\right\rangle \left\langle 1\right| \end{aligned} \tag{eq-III.16}$$

dove γ e ω sono reali e positive; $W(t)$, rappresenta l'hamiltoniana di interazione di questo sistema con il campo elettrmognetico e H_0 è l'hamiltoniana del solo sistema a due livelli.

Se scriviamo un stato come somma dei due autostati di come

$$\left|\psi(t)\right\rangle = c_1(t)\left|1\right\rangle + c_2(t)\left|2\right\rangle \tag{eq-III.17}$$

avremo con le condizioni iniziali

$$c_1(0) = 1 \qquad\qquad c_2(0) = 0 \tag{eq-III.18}$$

la soluzione (soluzione di Rabi)

$$\begin{cases} \left|c_2(t)\right|^2 = \dfrac{\gamma^2}{\gamma^2 + \hbar^2(\omega - \omega_{21})^2/4} \sin^2\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega-\omega_{21})^2}{4}} t\right), \\ \left|c_1(t)\right|^2 = 1 - \left|c_2(t)\right|^2. \end{cases} \tag{eq-III.19}$$

III.2 Atomi in cavità ad alto Q

Il problema dell'interazione di un singolo atomo con il singolo modo di una cavità in condizione prossima alla risonanza, cioé quando l'energia della transizione atomica è prossima a quella associata al modo della cavità, è stato studiato in base al modello di Jaynes-Cummings.

III.2.1 *Hamiltoniana nel caso di atomo a due livelli*

Il passo più importante da fare è scrivere l'hamiltoniana del sistema. Chiaramente si avrà:

$$\widehat{\mathcal{H}} = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \widehat{\mathcal{H}}_{int} \tag{eq-III.20}$$

dove $\widehat{\mathcal{H}}_0$ è l'hamiltoniana separabile che raccoglie i contributi indipendenti di quella dell'atomo e di quella del modo relatvo al campo della cavità e $\widehat{\mathcal{H}}_{int}$ che esprime l'interazione tra atomo e cavità. Un autostato di $\widehat{\mathcal{H}}_0$ sarà classificabile come $|i,n\rangle$ e tale che

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 \, |i,n\rangle = \hbar \left(\omega_i + n\omega\right) |i,n\rangle \,. \tag{eq-III.21}$$

Per quanto è stato detto è evidente che si può scrivere

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \widehat{\mathcal{H}}_{at} + \hbar\omega \hat{\mathbf{a}}^\dagger \hat{\mathbf{a}}. \tag{eq-III.22}$$

Considerando il caso di atomo a due livelli (cioé $i = 1,2$), $\widehat{\mathcal{H}}_{at}$ si può riscrivere facilmente con l'ausilio di un operatore $\widehat{\mathbf{A}}_{kl}$ che rappresenta un tensore che accoppia i livelli dell'atomo come δ_{kl} se si lavora in rappresentazione di Heisenberg, per cui

$$\widehat{\mathcal{H}}_{at} = \hbar\omega_1 \widehat{\mathbf{A}}_{11} + \hbar\omega_2 \widehat{\mathbf{A}}_{22}. \tag{eq-III.23}$$

Lavorando con un atomo a due livelli diventa relativamente facile esprimere anche $\widehat{\mathcal{H}}_{int}$. Le considerazioni di Cummings e Jaynes furono molto semplici [2]. Come interazione è ovvio considerare $\widehat{\mathbf{J}} \cdot \widehat{\mathbf{A}}$ che tuttavia non permette di risolvere esattamente il sistema. Ma è possibile trovare stati stazionari entro un'accuratezza di una parte per milione nei casi standard se si assume come interazione la più semplice

$$\widehat{\mathcal{H}}_{int} = -\widehat{\mu} \cdot \widehat{\mathbf{E}} \tag{eq-III.24}$$

dove $\widehat{\mu}$ è l'operatore del momento di dipolo elettrico.

Ricordando la relazione eq-III.15 si ha

$$\langle n| \, \widehat{\mathbf{E}} \, |n'\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \left[\sqrt{n}\delta_{n(n'+1)} + \sqrt{n+1}\delta_{(n+1)n'}\right] \tag{eq-III.25}$$

dove $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ è il campo del modo della cavità che per simmetria dipende dalla sola coordinata dell'asse di simmetria della cavità che stiamo considerando cilindrica. Se poi indichiamo con J_1 la funzione valutata nel primo zero della funzione di Bessel $J_0(u) = 0$, per un solo modo TM lower si ottiene

$$\langle n| \, \widehat{\mathbf{E}} \, |n'\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 J_1^2 V}} \left[\sqrt{n}\delta_{n(n'+1)} + \sqrt{n+1}\delta_{(n+1)n'}\right] \mathbf{n_3}. \tag{eq-III.26}$$

Quindi ricordando che

$$\langle m,n| \, \widehat{\mu}_3 \, |m',n'\rangle = \mu(1-\delta_{mm'})\delta_{nn'} \tag{eq-III.27}$$

si ha

$$\langle m,n| \, \widehat{\mathcal{H}}_{int} \, |m',n'\rangle = -\hbar\lambda \left[\sqrt{n}\delta_{n(n'+1)} + \sqrt{n+1}\delta_{(n+1)n'}\right] (1-\delta_{mm'}) \tag{eq-III.28}$$

dove $\lambda = \frac{\mu}{J_1}\sqrt{\frac{\omega}{2\varepsilon_0\hbar V}}$. In forma più compatta, utilizzando gli operatori che compaiono in $\widehat{\mathcal{H}}_0$, si trova

$$\widehat{\mathcal{H}}_{int} = -\hbar\lambda \left(\hat{\mathbf{a}}^\dagger \widehat{\mathbf{A}}_{12} + \widehat{\mathbf{A}}_{21} \hat{\mathbf{a}}\right). \tag{eq-III.29}$$

In conclusione quindi l'hamiltoniana del sistema composto dalla cavità e dall'atomo si può scrivere come

$$\widehat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_1 \widehat{\mathbf{A}}_{11} + \hbar\omega_2 \widehat{\mathbf{A}}_{22} + \hbar\omega \widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}\widehat{\mathbf{a}} - \hbar\lambda \left(\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger} \widehat{\mathbf{A}}_{12} + \widehat{\mathbf{A}}_{21} \widehat{\mathbf{a}} \right). \qquad \text{(eq-III.30)}$$

III.2.2 *Livelli energetici e "dressed states"*

Lavorando con atomi a due livelli si può trovare una soluzione analitica. Per risolvere il problema degli autovalori si scrive $\widehat{\mathcal{H}}$ in forma matriciale sulla base degli autostati di $\widehat{\mathcal{H}}_0$ così oridnati: $\{|1,0\rangle ;\ldots;|1,n\rangle ; |2,n\rangle ; |1,n+1\rangle ;\ldots\}$.

$$\begin{array}{c} \\ \vdots \\ |1,n\rangle \\ |2,n\rangle \\ |1,n+1\rangle \\ |2,n+1\rangle \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \ldots & |1,n\rangle & |2,n\rangle & |1,n+1\rangle & |2,n+1\rangle & \ldots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\ddots & \ldots & \ldots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \omega_1 + n\omega & 0 & 0 & \lambda\sqrt{n+1} & 0 \\
\vdots & 0 & \omega_2 + n\omega & \lambda\sqrt{n+1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda\sqrt{n+1} & \omega_1 + (n+1)\omega & 0 & \vdots \\
0 & \lambda\sqrt{n+1} & 0 & 0 & \omega_2 + (n+1)\omega & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array} \qquad \text{(eq-III.31)}$$

Si vede come la matrice sia costituita di blocchi 2x2 affiancati alla diagonale ed è piuttosto complicata da risolvere. Tuttavia, supponendo trascurabili le perdite (cioé Q $\gg 1$), la matrice si semplifica riducendosi a blocchi 2x2 sulla diagonale. In pratica stiamo trascurando $\widehat{\mathbf{a}}^{\dagger}\widehat{\mathbf{A}}_{12}$ perché connette livelli imperturbati separati in energia $\hbar(\omega_2 - \omega_1 + \omega) \sim 2\omega$; questa considerazione regge finché i campi non sono estrememente intensi, situazione che non si verifica nel nostro caso.

$$\widehat{\mathcal{H}} \equiv \begin{pmatrix}
\ddots & & & & \\
& \boxed{\begin{array}{cc} \ldots & \ldots \\ \ldots & \omega_1 + n\omega \end{array}} & & 0 & \\
& & \boxed{\begin{array}{cc} \omega_2 + n\omega & \lambda\sqrt{n+1} \\ \lambda\sqrt{n+1} & \omega_1 + (n+1)\omega \end{array}} & & \\
& 0 & & \boxed{\begin{array}{cc} \omega_2 + (n+1)\omega & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{array}} & \\
& & & & \ddots
\end{pmatrix} \qquad \text{(eq-III.32)}$$

Per trovare gli autovalori si procede alla diagonalizzazione dei singoli blocchi. Trattandosi di matrici 2x2 il problema è facile da risolvere e si ottiene quindi:

$$\begin{aligned}
\omega_{n\pm} &= \left[\omega_1 + \omega_2 + (2n+1)\omega \pm \sqrt{\delta^2 + \Omega_n^2} \right] && \text{(eq-III.33)} \\
\delta &= \omega_2 - \omega_1 - \omega && \text{(eq-III.34)} \\
\Omega_n &= 2\lambda\sqrt{n+1}. && \text{(eq-III.35)}
\end{aligned}$$

Si possono poi trovare gli autostati e porre nella forma

$$\begin{cases} |n,+\rangle = \cos\Theta_n\,|1,n+1\rangle - \sin\Theta_n\,|2,n\rangle \\ |n,-\rangle = \sin\Theta_n\,|1,n+1\rangle + \cos\Theta_n\,|2,n\rangle \end{cases} \tag{eq-III.36}$$

avendo posto che $\Delta_n^2 = \delta^2 + \Omega_n^2$

$$\sin\Theta_n = \frac{\Omega_n}{\sqrt{(\Delta_n-\delta)^2+\Omega_n^2}} \qquad \text{e} \qquad \cos\Theta_n = \frac{\Delta_n-\delta}{\sqrt{(\Delta_n-\delta)^2+\Omega_n^2}}. \tag{eq-III.37}$$

Gli stati $|n,\pm\rangle$ si chiamano "dressed states" perché in cavità si vestono dell'interazione con il modo del campo elettromagnetico [3; 4]. Fin qui abbiamo però trovato i soli stati eccitati. Si deve trovare il livello fondamentale, ma si vede come sia ancora $|1,0\rangle$

$$\widehat{\mathcal{H}}\,|1,0\rangle = \widehat{\mathcal{H}}_0\,|1,0\rangle = \hbar\omega_1\,|1,0\rangle\,. \tag{eq-III.38}$$

Nel caso di esatta risonanza ($\delta = 0$ ovvero $\omega_{12} = \omega$) gli autostati e i relativi autovalori assumono una forma molto semplice ed interessante:

$$|n,\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1,n+1\rangle \mp |2,n\rangle\Big) \qquad\qquad \omega_{n\pm} = \Big(\omega_2 + n\omega\Big) \pm \frac{1}{2}\Omega_n. \tag{eq-III.39}$$

III.2.3 *Evoluzione temporale del sistema*

Per questo sistema, con gli autostati appena trovati, l'equazione di completezza si scrive

$$|1,0\rangle\,\langle 1,0| + \sum_{a=\pm}\sum_{n=0}^{+\infty} |n,a\rangle\,\langle n,a| = \widehat{\mathrm{Id}}. \tag{eq-III.40}$$

III.2.3.1 *L'operatore evoluzione temporale*

L'operatore di evoluzione temporale è definito come

$$\widehat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i\widehat{\mathcal{H}}t}{\hbar}\right). \tag{eq-III.41}$$

Nella base degli stati vestiti si ha semplicemente

$$\widehat{U}(t) = \mathrm{e}^{-i\omega_1 t}\,|1,0\rangle\,\langle 1,0| + \sum_{a=\pm}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-i\omega_{na}t}\,|n,a\rangle\,\langle n,a|\,. \tag{eq-III.42}$$

Se poi si vuole esprimere tutto in funzione degli stati "imperturbati" si trova

$$\begin{aligned} \widehat{U}(t) \quad = \quad & \mathrm{e}^{-i\omega_1 t}\,|1,0\rangle\,\langle 1,0| + \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-i\frac{\omega_1+\omega_2+(2n+1)\omega}{2}t\right)\cdot\Bigg\{ \\ & \left[\cos\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right) + i\frac{\delta}{\Delta_n}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right)\right]|1,n+1\rangle\,\langle 1,n+1| + \\ & \left[\cos\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right) - i\frac{\delta}{\Delta_n}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right)\right]|2,n\rangle\,\langle 2,n| + \\ & i\frac{\Omega_n}{\Delta_n}\sin\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right)\Big(|1,n+1\rangle\,\langle 2,n| + |2,n\rangle\,\langle 1,n+1|\Big)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{eq-III.43}$$

Quindi, posto $U_{i,n;j,m} = \langle i,n| \widehat{U}(t) |j,m\rangle$, si vede come siano diversi da 0 i soli elementi $U_{1,n;1,n}$, $U_{2,n;2,n}$, $U_{1,(n+1);2,n}$ e $U_{2,n;1,(n+1)}$; i restanti sono nulli. In particolare:

$$\begin{aligned}&U_{2,n;2,n} = a_n = \cos^2\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n+}t} + \sin^2\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n-}t};\\ &U_{1,n+1;1,n+1} = c_n = \cos^2\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n-}t} + \sin^2\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n+}t};\\ &U_{1,n+1;2,n} = U_{2,n;1,n+1} = b_n = \sin\Theta_n \cdot \cos\Theta_n \cdot \left[\mathrm{e}^{-i\omega_{n-}t} - \mathrm{e}^{-i\omega_{n+}t}\right].\end{aligned} \tag{eq-III.44}$$

Si noti come in queste condizioni la matrice che rappresenta l'operatore unitario $\widehat{U}$ sia simmetrica e costituita da blocchi 2x2 simmetrici e unitari della forma

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}. \tag{eq-III.45}$$

III.2.3.2 *L'operatore densità*

Si ricordi che due operatori di densità, rispettivamente agli istanti t e t', sono legati dalle relazioni

$$\widehat{\varrho}(t) = \widehat{U}(t-t')\widehat{\varrho}(t')\widehat{U}^\dagger(t-t'), \tag{eq-III.46}$$

$$\varrho_{i,n;j,m} = \langle i,n| \widehat{\varrho}(t) |j,m\rangle, \tag{eq-III.47}$$

$$\varrho_{i,n;j,m}(t) = \sum_{i'n'}\sum_{j'm'} U_{i,n;i',n'}(t-t')U^*_{j,m;j',m'}(t-t')\varrho_{i',n';j',m'}(t'). \tag{eq-III.48}$$

Questa rappresenta la soluzione genrale delle equazioni del moto in termini dell'operatore di densità.

III.2.3.3 *Evoluzione temporale degli stati del sistema*

Invertendo le equazioni dei "dressed states" eq-III.36 si può scrivere

$$\begin{cases} |1,n+1\rangle = \cos\Theta_n |n,+\rangle + \sin\Theta_n |n,-\rangle, \\ |2,n\rangle = -\sin\Theta_n |n,+\rangle + \cos\Theta_n |n,-\rangle. \end{cases} \tag{eq-III.49}$$

L'evoluzione temporale per questi stati è

$$\begin{cases} |1,n+1;t\rangle = \cos\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n+}t} |n,+\rangle + \sin\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n-}t} |n,-\rangle, \\ |2,n;t\rangle = -\sin\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n+}t} |n,+\rangle + \cos\Theta_n \cdot \mathrm{e}^{-i\omega_{n-}t} |n,-\rangle. \end{cases} \tag{eq-III.50}$$

La probabilità di transizione dal livello superiore all'inferiore è data in cavità dalla relazione

$$\begin{aligned}\langle 2,n;0|1,n+1;t\rangle &= \sin\Theta_n \cdot \cos\Theta_n \left[\mathrm{e}^{-i\omega_{n-}} - \mathrm{e}^{-i\omega_{n+}}\right]\\ &= 2i \cdot \mathrm{e}^{-i[\omega_{n+}+\omega_{n-}]t} \sin\Theta_n \cdot \cos\Theta_n \cdot \sin\left(\frac{\Delta_n}{2}t\right);\end{aligned} \tag{eq-III.51}$$

$$\mathrm{P}_{2\to1} = \sin^2 2\Theta_n \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}\Delta_n t\right). \tag{eq-III.52}$$

Analogo risultato si sarebbe trovato semplicemente considerando $|b_n|^2$ dove b_n è dato dalla precedente eq-III.44. In figura III.2.1 si mostra l'andamento della probabilità di transizione al variare del parametro $\frac{\delta}{\Omega_n}$.

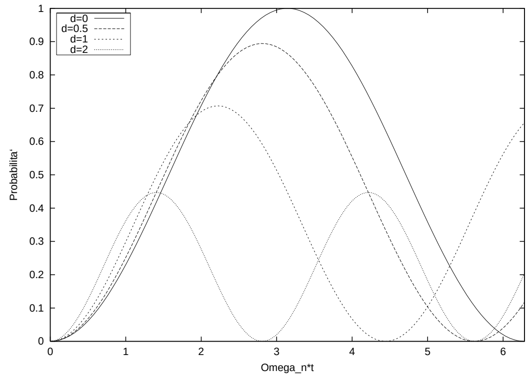


Fig. III.2.1 Grafico della funzione $\mathrm{P}_{2\to1}$ al variare del parametro $\mathrm{d} = \delta/\Omega_n$.

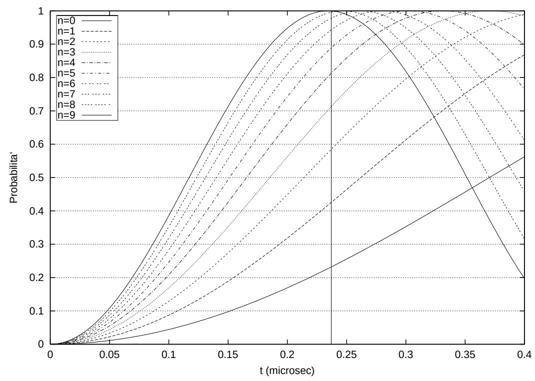


Fig. III.3.1 Grafico della funzione $\mathrm{P}^{\mathrm{ris}}_{2\to1} = \sin^2(0.51\sqrt{n+1})$ a vari n.

Quando consideriamo perfetta risonanza siamo in condizione di porre $\delta = 0$, l'equazione per la probabilità di transizione eq-III.52 per i due stati atomici diventa

$$\mathrm{P}^{\mathrm{ris}}_{2\to1} = \sin^2\left(\lambda\sqrt{n+1}t\right). \qquad \text{(eq-III.53)}$$

III.3 Riscontri sul microlaser

Nel nostro apparato troviamo che lo spot di attraversamento ha dimensioni lineari di 0.042 mm. La distanza degli specchi è di 1.1 mm. J_1 vale circa 0.52, mentre la transizione del Bario corrisponde a una lunghezza d'onda di 791 nm. Quindi si ha $\lambda = 8.68 \cdot 10^{35} \cdot \mu$.

Ricordando che vale in generale la relazione nel sistema C.G.S.

$$\frac{1}{\tau} = 3.14 \cdot 10^{29} \cdot \frac{\mu^2}{\lambda^3}. \qquad \text{(eq-III.54)}$$

Dal momento che $\tau = 3$ μsec, dopo le opportune conversioni, $\mu = 2.45 \cdot 10^{-30}$, dunque $\lambda = 2.12 \cdot 10^6$ rad/sec, ma allora ricordando che il tempo di attraversamento è di 237 nsec si ha che $P^{\mathrm{ris}}_{2\to1} = \sin^2(0.5084\sqrt{n+1})$. Se $n = 0$ la probabilità è in effetti 0.23; se $n = 2$ la probabilità è 0.43. La figura III.3.1 mostra la probabilità di transizione all'uscita della cavità a seconda del numero di fotoni in cavità.

Capitolo IV

Analisi dell'emissione del S.A.L.

Fin qui ci si è occupati della realizzazione del laser a singolo atomo e dell'apparato teorico che ne giustifica il funzionamento, ma questo dispositivo è comunque votato alla produzione di segnali luminosi. Si dovranno quindi analizzare gli output prodotti: sia quello luminoso che attraversa gli specchi, sia quello atomico che attraversa trasversalmente la cavità. A questo scopo verranno battute due strade.

La prima, seguendo ragionementi quantistici, ci porta a formalizzare una relazione teorica che esprima il numero medio di fotoni prodotti "in cavità" $\langle n \rangle$ in funzione del numero medio di atomi presenti $\langle N \rangle$. Questo lavoro è svolto ancora a regime di singolo atomo, si ha cioé un solo atomo che attraversi tutto il volume della cavità. In realtà, infatti, come si vedrà più avanti, la condizione $\langle N \rangle \approx 1$ vuol dire che in cavità ce ne sono effettivamente 4.6 e non si può più parlare propriamente di regime di singolo atomo [8].

Il secondo percorso si occuperà, con una chiave di lettura semiclassica, dello spettro degli atomi che attraversano la cavità e dell'output luminoso. Dall'analisi sperimentale si evidenzieranno le interessanti e inattese correzioni quantiche da apportare al modello [11].

IV.1 Intensità del S.A.L.

Quando non sono presenti atomi in cavità, l'operatore di densità riferito al solo campo $\widehat{\varrho}^F$ è soggetto a un decadimento generato dalle perdite della cavità. Distinguiamo tre diversi regimi temporali e quindi tre differenti tempi caratteristici:

- t_{int}, tempo di volo dell'atomo in cavità;
- t_{free}, tempo che intercorre tra l'uscita di un atomo con l'entrata del successivo;
- t_{cav}, legato[a] a Q, rappresenta il tempo di vita dei fotoni in cavità.

La relazione tra i tre tempi è $t_{int} \ll t_{free} < t_{cav}$. Poiché il numero di fotoni associati alla radiazione di corpo nero, anche a temperatura ambiente, è virtualmente zero, nel microlaser l'equazione del moto per $\widehat{\varrho}^F$ è semplicemente nella forma

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\varrho}^F}{\mathrm{d}t} = \frac{\Gamma_C}{2}\left[2\widehat{\mathbf{a}}\widehat{\varrho}^F\widehat{\mathbf{a}}^\dagger - \widehat{\mathbf{a}}^\dagger\widehat{\mathbf{a}}\widehat{\varrho}^F - \widehat{\varrho}^F\widehat{\mathbf{a}}^\dagger\widehat{\mathbf{a}}\right] \qquad \text{(eq-IV.1)}$$

dove Γ_C è il rate de perdite della cavità.

[a] Q è infatti $2\pi\nu t_{cav}$.

Se un atomo entra in cavità a $t = 0$ nello stato $c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$ ed esiste a $t = t_{int}$ si possono trovare delle relazioni di ricorrenza per $\varrho^F_{n,m}(t)$ applicando l'equazione eq-III.46. In particolare

$$\begin{aligned}
\varrho^F_{n,m}(t) \;=\; & \varrho^F_{n,m}(0)\Big\{\varrho^A_{22}\Big[C_n(t)C_m(t) + S^\delta_n(t)S^\delta_m(t) - i\left(C_n(t)S^\delta_m(t) - C_m(t)S^\delta_n(t)\right)\Big] \\
& +\varrho^A_{11}\Big[C_{n-1}(t)C_{m-1}(t) + S^\delta_{n-1}(t)S^\delta_{m-1}(t) \\
& -i\left(C_{n-1}(t)S^\delta_{m-1}(t) - C_{m-1}(t)S^\delta_{n-1}(t)\right)\Big]\Big\} + \\
& \varrho^F_{n+1,m+1}(0)\varrho^A_{11}S^\kappa_n(t)S^\kappa_m(t) + \\
& \varrho^F_{n-1,m-1}(0)\varrho^A_{11}S^\kappa_{n-1}(t)S^\kappa_{m-1}(t) + \\
& i\varrho^F_{n,m+1}(0)\varrho^A_{21}\left(C_n(t) + iS^\delta_n(t)\right)S^\kappa_m(t) - \\
& i\varrho^F_{n+1,m}(0)\varrho^A_{12}\left(C_m(t) - iS^\delta_m(t)\right)S^\kappa_n(t) - \\
& i\varrho^F_{n,m-1}(0)\varrho^A_{12}\left(C_{n-1}(t) - iS^\delta_{n-1}(t)\right)S^\kappa_{m-1}(t) - \\
& i\varrho^F_{n-1,m}(0)\varrho^A_{21}\left(C_{m-1}(t) + iS^\delta_{m-1}(t)\right)S^\kappa_{n-1}(t)
\end{aligned} \qquad \text{(eq-IV.2)}$$

avendo posto

$$\begin{aligned}
\varrho^A_{xy} &\equiv c_x(0)c^*_y(0), \quad x,y = 1,2; \\
C_n &= \cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\kappa_n^2 + \Delta_n^2}t\right); \\
S^\delta_n &= \tfrac{\Delta_n}{\sqrt{\kappa_n^2+\Delta_n^2}}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\kappa_n^2 + \Delta_n^2}t\right); \\
S^\kappa_n &= \tfrac{\kappa_n}{\sqrt{\kappa_n^2+\Delta_n^2}}\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\kappa_n^2 + \Delta_n^2}t\right); \\
\kappa_n &= 2\lambda\sqrt{n+1}.
\end{aligned} \qquad \text{(eq-IV.3)}$$

Alla luce di ciò si può scrivere la eq-IV.1 come

$$\frac{\mathrm{d}\varrho^F_{n,m}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_C\left[\sqrt{(n+1)(m+1)}\varrho^F_{n+1,m+1} - \frac{1}{2}(n+m)\varrho^F_{n,m}\right] \qquad \text{(eq-IV.4)}$$

non prima di aver notato che se $\widehat{\varrho}^F$ è diagonale ad un istante t' lo sarà ad ogni istante successivo. Questo è un dato importante nel micromaser per il quale si assume che gli elementi fuori diagonale siano tutti nulli. Nel laser a singolo atomo si avrà invece una soluzione più generale.

IV.1.1 *Espressione per il numero medio di fotoni in cavità*

Si definisca $Q_{n,m}$ come la $\varrho^F_{n,m}$ all'equilibrio mediata in un tempo Δt. Il tempo t_i è l'istante in cui entra in cavità l'atomo, il successivo entra a t_{i+1}. Per $t_i + t_{int} < t < t_{i+1}$ si ha

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\varrho}^F}{\mathrm{d}t} = \frac{\Gamma_C}{2}\left[2\hat{\mathbf{a}}\widehat{\varrho}^F\hat{\mathbf{a}}^\dagger - \hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\widehat{\varrho}^F - \widehat{\varrho}^F\hat{\mathbf{a}}^\dagger\hat{\mathbf{a}}\right] \equiv L\widehat{\varrho}^F \qquad \text{(eq-IV.5)}$$

allora formalmente

$$\widehat{\varrho}^F(t_{i+1}) = \mathrm{e}^{Lt_p}\widehat{\varrho}^F(t_i + t_{int}) \qquad \text{(eq-IV.6)}$$

dove $t_p \equiv t_{i+1} - (t_i + t_{int}) = t_{free}$. Assumendo che l'intervallo di tempo tra un atomo e l'altro segua la distribuzione di Poisson

$$f(t_p) = \frac{1}{\Delta t} \cdot \exp\left(-\frac{t_p + t_{int}}{\Delta t}\right) \qquad \text{(eq-IV.7)}$$

e mediando sulla distribuzione si ottiene

$$\left\langle \widehat{\varrho}^F(t_i + 1) \right\rangle = \frac{1}{1 - L\Delta t} \cdot \exp\left(-\frac{t_{int}}{\Delta t}\right). \qquad \text{(eq-IV.8)}$$

Supponendo che l'evoluzione temporale di $\widehat{\varrho}^F$ sia la stessa atomo dopo atomo per ognuno, si ha all'equilibrio

$$\left\langle \widehat{\varrho}^F(t_i + 1) \right\rangle_{eq} = \left\langle \widehat{\varrho}^F(t_i) \right\rangle_{eq} \quad \forall i. \qquad \text{(eq-IV.9)}$$

Quindi, poiché

$$Q_{n,m}(t) = \left\langle \varrho^F_{n,m}(t) \right\rangle_{eq} \qquad \text{(eq-IV.10)}$$

si ha

$$\begin{aligned} Q_{n,m}(0) - \Delta t L Q_{n,m}(\Delta t) &= Q_{n,m}(t_{int}), & \text{(eq-IV.11)} \\ Q_{n,m}(0) - \Delta t \left.\frac{\mathrm{d}Q_{n,m}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\Delta t} &= Q_{n,m}(t_{int}). & \text{(eq-IV.12)} \end{aligned}$$

Inoltre applicando la definizione eq-IV.10 alla eq-IV.4, similmente si trova

$$\frac{\mathrm{d}Q_{n,m}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_C \left[\sqrt{(n+1)(m+1)}Q_{n+1,m+1} - \frac{1}{2}(n+m)Q_{n,m}\right]. \qquad \text{(eq-IV.13)}$$

Applicando la definizione di $Q_{n,m}$ anche alla eq-IV.2 si ottiene una relazione ricorsiva per $Q_{n,m}$.

$$\begin{aligned} Q_{n,m}(t) &= Q_{n,m}(0) - \Delta t \cdot \Gamma_C \Big[\sqrt{(n+1)(m+1)}Q_{n+1,m+1}(0) - \frac{1}{2}(n+m)Q_{n,m}(0)\Big] \\ &= Q_{n,m}(0)\Big\{ \varrho^A_{22}\Big[C_n(t)C_m(t) + S^\delta_n(t)S^\delta_m(t) - i\left(C_n(t)S^\delta_m(t) - C_m(t)S^\delta_n(t)\right)\Big] \\ &\quad + \varrho^A_{11}\Big[C_{n-1}(t)C_{m-1}(t) + S^\delta_{n-1}(t)S^\delta_{m-1}(t) \\ &\quad - i\left(C_{n-1}(t)S^\delta_{m-1}(t) - C_{m-1}(t)S^\delta_{n-1}(t)\right)\Big]\Big\} + \\ &\quad Q_{n+1,m+1}(0)\varrho^A_{11}S^\kappa_n(t)S^\kappa_m(t) + \\ &\quad Q_{n-1,m-1}(0)\varrho^A_{11}S^\kappa_{n-1}(t)S^\kappa_{m-1}(t) + \\ &\quad iQ_{n,m+1}(0)\varrho^A_{21}\left(C_n(t) + iS^\delta_n(t)\right)S^\kappa_m(t) - \\ &\quad iQ_{n+1,m}(0)\varrho^A_{12}\left(C_m(t) - iS^\delta_m(t)\right)S^\kappa_n(t) - \\ &\quad iQ_{n,m-1}(0)\varrho^A_{12}\left(C_{n-1}(t) - iS^\delta_{n-1}(t)\right)S^\kappa_{m-1}(t) - \\ &\quad iQ_{n-1,m}(0)\varrho^A_{21}\left(C_{m-1}(t) + iS^\delta_{m-1}(t)\right)S^\kappa_{n-1}(t). \end{aligned} \qquad \text{(eq-IV.14)}$$

In base alla definizione di $Q_{n,m}$ è facile trovare una relazione per $\langle n \rangle$ che è

$$\langle n \rangle = \int_0^\infty f_{Boltz}(v) \sum_{k=1}^{\infty} k Q_{k,k}(v)\,\mathrm{d}v. \qquad \text{(eq-IV.15)}$$

Conoscendo $Q_{k,k}$ dalla eq-IV.14, al calcolatore si potrà valutare $\langle n \rangle$ in funzione di $\langle N \rangle$.

Resta da chiarire dove compare nella eq-IV.15 la dipendenza da $\langle N \rangle$. Nel micromaser si può supporre costante il coefficiente di accoppiamento tra campo e atomo giacché in cavità ci sono pochi multipli interi di lunghezza d'onda. Questo non succede nei range ottici per i quali in cavità si trovano $10^3 \div 10^4$ lunghezze d'onda.

IV.1.2 *Dipendenza del numero di fotoni dal numero medio di atomi*

Poiché il diametro atomico $2R$ è molto maggiore delle lunghezze d'onda, allora il coefficiente di accoppiamento non può essere costante e varia sinusoidalmente lungo la sua larghezza; in più la distribuzione del campo trasversale sarà gaussiana per cui si potrà scrivere una dipendenza del tipo

$$\lambda(\mathbf{r}) = \lambda_0 \cdot \exp\left(-\frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{w_m^2}\right)\cos(k\mathrm{z}) \qquad \text{(eq-IV.16)}$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\mu^2\omega}{2\varepsilon_0\hbar V_m}} \qquad \text{(eq-IV.17)}$$

dove V_m indica il volume del modo del campo in cavità e w_m è la dimensione lineare trasversale del volume associato al modo della cavità. Se definiamo la densità degli atomi in cavità, evidentemente sarà

$$n_0 = \frac{1}{\pi R^2 v(t_{free}+t_{int})}; \qquad \text{(eq-IV.18)}$$

quindi ponendo $\Delta t = (t_{free}+t_{int})$

$$\langle N \rangle = n_0 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-R}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-\mathrm{y}^2}}^{\sqrt{R^2-\mathrm{y}^2}} \exp\left(-2\frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{w_m^2}\right)\cos^2(k\mathrm{z})\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy}\,\mathrm{dx}. \qquad \text{(eq-IV.19)}$$

Se tutti gli atomi passano su un ventre si ha integrale elementare per z e approssimando il resto considerando che $R \gg w_m$, si ottiene

$$\langle N \rangle = n_0 \frac{1}{\sqrt{2}}\pi R^2 \sqrt{\pi} w_m = \frac{\sqrt{\pi} w_m}{v\Delta t\sqrt{2}} = \frac{\pi w_m}{\sqrt{2} v \Delta t}. \qquad \text{(eq-IV.20)}$$

In un modo gaussiano però $t_{int} \equiv \frac{\sqrt{\pi} w_m}{v}$ da cui la relazione che lega $\langle N \rangle$ a Δt da inserire nella eq-IV.14 e che lega $\langle n \rangle$ a $\langle N \rangle$ come dalla eq-IV.15

$$\Delta t = \frac{t_{int}}{\sqrt{2}\,\langle N \rangle}. \qquad \text{(eq-IV.21)}$$

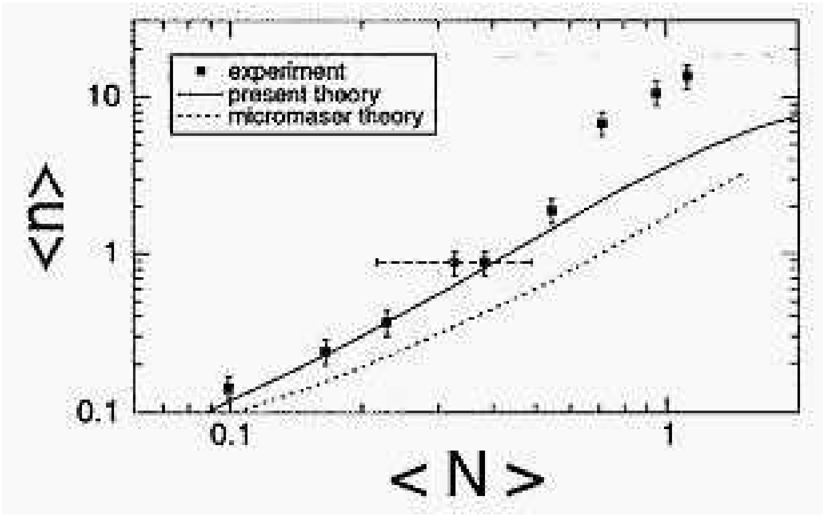


Fig. IV.1.1 Misura di $\langle n \rangle$ rispetto a $\langle N \rangle$ [`Phys.Rev.A, vol.52, pag.1695`].

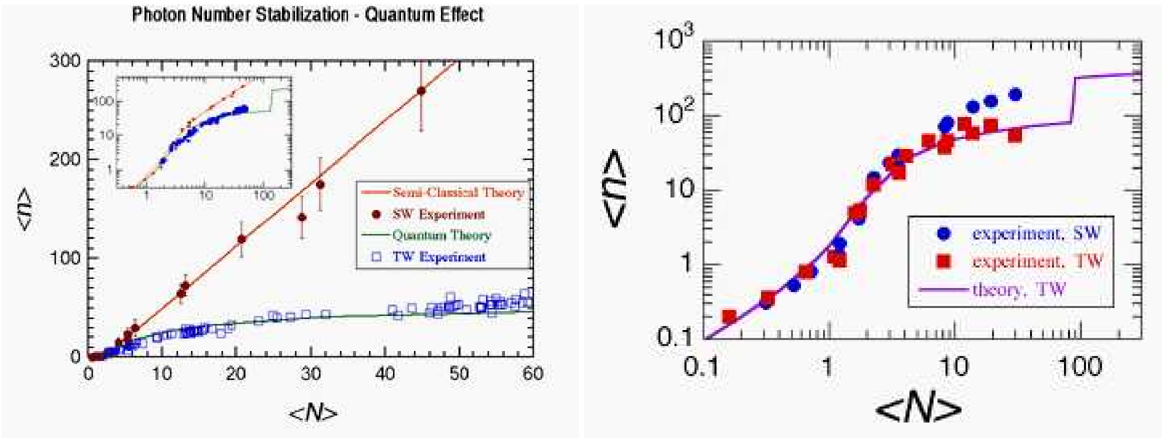


Fig. IV.1.2 Dati raccolti di $\langle n \rangle$ rispetto a $\langle N \rangle$ [`web.mit.edu/minwah/www/sal.html`].

IV.1.3 *Comportamento sperimentale del microlaser*

In figura IV.1.1 e IV.1.2 si nota un discostamento dal risultato teorico previsto quando $\langle N \rangle \simeq 1$ dovuto al fatto che per la Poissoniana del numero di atomi in ingresso in cavità la probabilità di avere 2 o 3 atomi in cavità è paragonabile a quella di avere un solo atomo.

Un ulteriore abbassamento del limite della bontà della teoria a $\langle N \rangle \approx 0.6$ è dovuto al forte ruolo giocato dalla dipendenza spaziale della costante di accoppiamento e che innalza il numero di fotoni in cavità rispetto alle previsioni.

IV.1.4 *Schema ad "onde viaggianti"*

Nei paragrafi precedenti si è supposto che gli atomi viaggino su un ventre del campo elettromagnetico, ma il passaggio per una traiettoria definita è impraticabile. Questo è un serio ostacolo qualora si intenda investigare una qualche questione di interazione tra radiazione e materia.

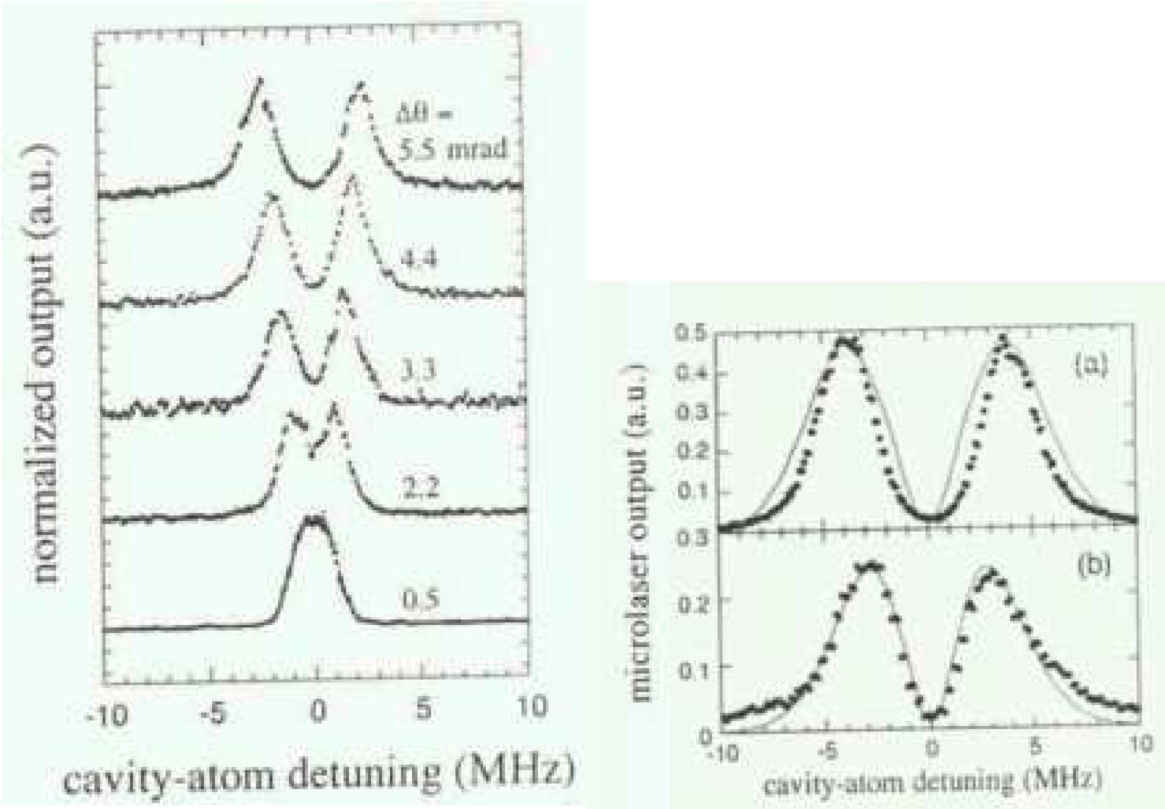


Fig. IV.1.3 Output del SAL a "travelling-waves" [`Opt.Lett., vol.22, pag.1501`].

Il problema si può risolvere inclinando leggermente dalla normale all'asse di simmetria della cavità il fascio atomico a formare un angolo $\alpha \ll 1$. In questo modo per effetto Doppler l'atomo "sente" due onde alle diverse frequenze $\nu_0\left(1 \pm \alpha\frac{v}{c}\right)$. Il vantaggio risiede nel fatto che l'atomo, nel sistema di riferimento in cui è in quiete, vede l'onda "viaggiare", cioé la fase non è costante lungo la traiettoria e quindi in media le interazioni sono costanti qualunque sia il percorso dell'atomo [12].

Questo sistema è chiamato "travelling-waves" a dispetto del precedente sistema ad $\alpha = 0$ detto "standing-wave". Nel seguito del capitolo ci si occuperà ancora della sola modalità ad onde statiche sebbene una qualunque delle due soluzioni produrrebbe lo stesso effetto, a patto di "riaccordare" le frequenze di cavità e transizione atomica tenendo in considerazione l'effetto Doppler.

IV.2 Spettro di emissione del S.A.L.: previsione teorica

In questo paragrafo si lavorerà nel sistema CGS. Si inizia scrivendo le equazioni di Maxwell-Schrödinger

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'' + 2\gamma_p\mathbf{p}' + \omega_p^2\mathbf{p} &= -\frac{2\mu^2\omega_p}{\hbar}\mathcal{N}\mathbf{E_c}; \\ \mathbf{E_c}'' + 2\gamma_c\mathbf{E_c}' + \omega_p^2\mathbf{E_c} &= +\frac{4\pi\omega_p^2}{V}\mathbf{p}. \end{aligned} \qquad \text{(eq-IV.22)}$$

$\mathbf{p}$ è il dipolo elettrico e $\mathbf{E_c}$ il campo valutato alla posizione dell'atomo. γ_p è il rate di decadimento del dipolo; γ_c si riferisce invece alla cavità.

Le equazioni eq-IV.22 descrivono il comportamento medio atomo-cavità dovuto alla successione di eventi di singolo atomo, l'atomo si può supporre a inversione media $\mathcal{N}$ con decadimento γ_p e N_0 assente $\mathbf{E_c}$. Si noti come $2\gamma_p = A_{free}(1-f)$ con $f \ll 1$.

L'eq. di rate per il flusso di energia al livello superiore dell'atomo è:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= N_u - N_1; \qquad\qquad N = N_u + N_1 = 1; & \text{(eq-IV.23)} \\ \hbar\omega_p N_u' &= [\hbar\omega_p N_u^0 2\gamma_p] - [\hbar\omega_p N_u 2\gamma_p - (\mathbf{p}' + \gamma_p \mathbf{p})\mathbf{E_c}]. & \text{(eq-IV.24)} \end{aligned}$$

IV.2.1 *Soluzione delle equazioni di Maxwell Schrödinger*

Si assumono come soluzioni delle equazoni differenziali eq-IV.22

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{Re}\,(\mathrm{p}(t)) = \mathbf{Re}\,(\mathrm{p}_0 \mathrm{e}^{i\sigma t})\,; \\ \mathbf{E_c} &= \mathbf{Re}\,(\mathrm{E}(t)) = \mathbf{Re}\,(\mathrm{E}_0 \mathrm{e}^{i\sigma t})\,. \end{aligned} \qquad \text{(eq-IV.25)}$$

dove σ è un numero immaginario la cui parte reale rappresenta la effettiva frequenza del modo e la parte immaginaria il rate di decadimento. Con queste posizioni si trovano per σ le equazioni secolari

$$\begin{aligned} \left[\omega_p^2 - \sigma^2 + 2i\sigma\gamma_p\right] \mathrm{p}_0 &= -\frac{2\mu^2\omega}{\hbar}\mathcal{N}\mathrm{E}_0; \\ \left[\omega_c^2 - \sigma^2 + 2i\sigma\gamma_c\right] \mathrm{E}_0 &= +\frac{4\pi\omega^2}{V}\mathrm{p}_0. \end{aligned} \qquad \text{(eq-IV.26)}$$

Smorzamenti, "atom-cavity detuning" e "coupling" si possono supporre molto minori delle frequenza ottiche e quindi $\omega^2 - \sigma^2 \simeq 2\sigma(\omega - \sigma)$, condizione equivalente alla condizione di quasi risonanza applicata al dominio delle frequenze. Le equazioni diventano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p(\sigma)\mathrm{p}_0 &= -\frac{i\mu^2\mathcal{N}}{\hbar}\mathrm{E}_0; & \text{(eq-IV.27)} \\ \mathcal{L}_c(\sigma)\mathrm{E}_0 &= \frac{2\pi i\omega}{V}\mathrm{p}_0; & \text{(eq-IV.28)} \\ \mathcal{L}_{c,p}(x) &= -i(x - \omega_{c,p}) - \gamma_{c,p}. & \text{(eq-IV.29)} \end{aligned}$$

Allora ne risulta l'equazione secolare, identica per E_0 e p_0,

$$\left[\mathcal{L}_p(\sigma)\mathcal{L}_c(\sigma) - \mathcal{N}\lambda^2\right] \equiv \mathcal{L}_+(\sigma)\mathcal{L}_-(\sigma) = 0 \qquad \text{(eq-IV.30)}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pm(x) &= -i\,(x - \sigma_\pm) \\ \sigma_\pm &= \Omega_\pm + i\Gamma_\pm \\ \Gamma_\pm &= \gamma_+ \pm I \\ \Omega_\pm &= \omega_+ \pm R \\ 2R^2 &= (\omega_-^2 - \mathcal{N}\lambda^2 - \gamma_-^2) + \sqrt{(\omega_-^2 - \mathcal{N}\lambda^2 - \gamma_-^2)^2 + 4\omega_-^2\gamma_-^2} \\ 2I^2 &= -\,(\omega_-^2 - \mathcal{N}\lambda^2 - \gamma_-^2) + \sqrt{(\omega_-^2 - \mathcal{N}\lambda^2 - \gamma_-^2)^2 + 4\omega_-^2\gamma_-^2} \\ \omega_\pm &= \tfrac{1}{2}(\omega_c \pm \omega_p) \\ \gamma_\pm &= \tfrac{1}{2}(\gamma_c \pm \gamma_p). \end{aligned} \qquad \text{(eq-IV.31)}$$

Si noti che se γ_c e γ_p tendono a 0, allora $\Omega_\pm$ tendono a $\omega_\pm$ delle eq-III.33.

Le soluzioni, scritte in forma complessa, in generale sono

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(t) &= \mathrm{p}_0^+ \mathrm{e}^{i\sigma_+ t} + \mathrm{p}_0^- \mathrm{e}^{i\sigma_- t}; \\ \mathrm{E}(t) &= \mathrm{E}_0^+ \mathrm{e}^{i\sigma_+ t} + \mathrm{E}_0^- \mathrm{e}^{i\sigma_- t}. \end{aligned} \tag{eq-IV.32}$$

Con le condizioni iniziali di dipolo eccitato, cioé con l'energia tutta nel dipolo ($\mathcal{E} = \mathrm{p}$),

$$\mathrm{p}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(t=0) = \mathrm{P}_0 \qquad \mathbf{E_c}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(t=0) = 0 \tag{eq-IV.33}$$

con P_0 quantità reale. Quindi finalmente si trova:

$$\begin{aligned} \mathrm{p}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(t) &= \tfrac{\mathrm{P}_0}{i(\sigma_- - \sigma_+)} \left[\mathcal{L}_c(\sigma_+)\mathrm{e}^{i\sigma_+ t} - \mathcal{L}_c(\sigma_-)\mathrm{e}^{i\sigma_- t}\right]; \\ \mathbf{E_c}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(t) &= \tfrac{2\pi i\omega}{V} \tfrac{\mathrm{P}_0}{i(\sigma_- - \sigma_+)} \left[\mathrm{e}^{i\sigma_- t} - \mathrm{e}^{i\sigma_+ t}\right]. \end{aligned} \tag{eq-IV.34}$$

Adesso si può determinare la potenza dovuta agli atomi che attraversano i lati della cavità e quella ottica dovuta al passaggio di fotoni attraverso gli specchi; la prima con la formula di Larmour, l'altra con la nota espressione per i campi elettromagnetici.

$$\begin{aligned} W_{side}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(t) &= 2\mathbf{p}''(t)\tfrac{(1-f)}{3c^3} \approx 2\mathbf{p}^2(t)\frac{\omega^4(1-f)}{3c^3}, \\ W_{ends}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(t) &= 2\eta \cdot \gamma_c \frac{V{\mathbf{E_c}}^2(t)}{4\pi}, \end{aligned} \tag{eq-IV.35}$$

dove $\eta = \frac{\mathrm{T}}{1-\mathrm{R}}$, T la trasmissione e R la riflettività (1-R=T+S dove S sono le perdite degli specchi).

IV.2.2 *Potenza emessa in funzione del tempo*

Si lavora a regime di perfetto accoppiamento $\omega_- = 0$ quindi nelle eq-IV.31 si hanno le semplificazioni

$$\begin{aligned} \Gamma &= 2\gamma_+; \\ \Omega_\pm &= \omega_+ \pm \lambda_s; \\ \lambda_s &= \sqrt{|\mathcal{N}\lambda^2 - \gamma_-^2|}. \end{aligned} \tag{eq-IV.36}$$

Nel caso di Q molto alti $\lambda \gg \gamma_-$

$$W_{side}(t) = 2\gamma_p \cdot \left(\frac{P_0}{2\mu}\right)^2 \hbar\omega \cdot \mathrm{e}^{-2\gamma_+ t}\cos^2(\lambda_s t); \tag{eq-IV.37}$$

$$W_{ends}(t) = \eta A_{cav} \left(\frac{\gamma_c}{\lambda_s}\right)^2 \cdot \left(\frac{P_0}{2\mu}\right)^2 \hbar\omega \cdot \mathrm{e}^{-2\gamma_+ t}\sin^2(\lambda_s t). \tag{eq-IV.38}$$

IV.2.3 *Spettro in frequenza dell'output*

Quello che interessa è la trasformata di Fourier complessa coniugata rispettivamente di ${\mathbf{E_c}}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}$ e $\mathrm{p}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}$. Infatti se Λ è il rate di flusso degli atomi (atomi/sec) si ha una potenza totale per $\mathbf{F} \equiv \mathbf{Re}\,(F) = \mathbf{E_c}, \mathbf{p}$ data da

$$W \propto \Lambda \int \left\langle \mathbf{F}(t)^2 \right\rangle_{med} \mathrm{d}t, \tag{eq-IV.39}$$

ma per il teorema di Parseval $\langle \mathbf{F}(t)^2 \rangle_{med} = \frac{1}{2} |\mathcal{F}(F(\Omega))|^2$ si ottiene

$$W \propto \Lambda \int |\mathcal{F}(F(\Omega))|^2 \, \mathrm{d}\Omega. \qquad \text{(eq-IV.40)}$$

Quindi lo spettro di potenza è dato da:

$$\mathcal{W} \propto \Lambda |\mathcal{F}(F(\Omega))|^2 . \qquad \text{(eq-IV.41)}$$

Quello che si deve fare è perciò la trasformata di Fourier delle eq-IV.34

$$\mathcal{F}(F(\Omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{Re}\,(F(t))\, \mathrm{e}^{-i\Omega t} \, \mathrm{d}t. \qquad \text{(eq-IV.42)}$$

Trascurando i termini antirisonanti per il caso $\mathcal{E} = \mathrm{p}$ si trovano rispettivamente

$$\mathcal{F}(\mathrm{p}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(\Omega)) = \frac{\mathrm{P}_0}{2\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\mathcal{L}_c(\Omega)}{\mathcal{L}_+(\Omega)\mathcal{L}_-(\Omega)} \right), \qquad \text{(eq-IV.43)}$$

$$\mathcal{F}(\mathbf{E_c}^{\mathcal{E}=\mathrm{p}}(\Omega)) = \frac{2\pi i \omega \mathrm{P}_0}{2\sqrt{2\pi} V} \left(\frac{1}{\mathcal{L}_+(\Omega)\mathcal{L}_-(\Omega)} \right). \qquad \text{(eq-IV.44)}$$

Quindi concludendo

$$\mathcal{W}_{side}(\Omega) = \Lambda \frac{\mathrm{P}_0^2 \omega^4}{24\pi c^3} \left| \frac{\mathcal{L}_c(\Omega)}{\mathcal{L}_+(\Omega)\mathcal{L}_-(\Omega)} \right|^2 (1-f), \qquad \text{(eq-IV.45)}$$

$$\mathcal{W}_{ends}(\Omega) = \Lambda \eta \left(\frac{\mathrm{P}_0}{2\mu} \right)^2 \hbar\omega \frac{\lambda^2 \gamma_c}{4\pi} \left| \frac{1}{\mathcal{L}_+(\Omega)\mathcal{L}_-(\Omega)} \right|^2 . \qquad \text{(eq-IV.46)}$$

IV.3 Spettro di emissione del S.A.L.: risultati sperimentali

Tre regimi possono essere distinti dal parametro $\xi = \frac{4\lambda_{\omega_p}^2}{(\gamma_c+\gamma_p)^2}$ dove $\lambda_{\omega_p} = \sqrt{\frac{\mu^2 \omega_p}{2\varepsilon_0 \hbar V_{modo}}}$:

(i) accoppiamento forte ($\xi \gg 1$);
(ii) accoppiamento intermedio ($\xi \approx 1$);
(iii) accoppiamento debole ($\xi \ll 1$).

I risultati teorici sono presentati in figura IV.2.1. Si intende studiare ora cosa succede sperimentalmente, in particolare nel caso $\left\langle \overline{N} \right\rangle \approx 1$. I risultati sono esposti in figura IV.3.1. Brevemente N è il numero totale di atomi in cavità, $\overline{N}$ quello effettivo, cioé il numero di atomi effettivamente interagenti con il modo della cavità ciascuno pesato con la forza del suo accoppiamento.

IV.3.1 *Il contributo delle fluttuazioni*

I calcoli effettivamente svolti per la teoria sono in funzione di $\mathcal{N} \equiv \overline{N}$, ma nella situazione sperimentale non si ha controllo su $\overline{N}$, ma su $\left\langle \overline{N} \right\rangle$ e questo complicherà la situazione.

Notiamo subito dalla figura IV.3.1 che a $\xi = 0.3$ si ha un fenomeno "drammatico". Come dalla teoria, non ci si dovrebbero attendere due picchi non avendo tra l'altro una corrispondente figura a due picchi per la potenza ai lati. L'interpretazione va affidata al fatto che alla risonanza la luce viene scatterata e risulta una modifica nella forma della riga di trasmissione dagli specchi della cavità.

A $\xi = 10$ tutto torna normale per i picchi laterali, ma compare un interessante picco centrale. La forma delle righe dipende da λ_s e quindi da $\overline{N}$; tuttavia sono presenti fluttuazioni del numero di atomi in cavità definito dalla relazione

$$\overline{N} = \sum_{j=1}^{N} \psi^2(\mathrm{r}_j, \mathrm{z}_j). \qquad \text{(eq-IV.47)}$$

Durante la misura fluttuano sia il numero di atomi che la posizione e in generale lo fanno secondo una distribuzione poissoniana.

Quindi, poiché a $\xi = 10$ $\lambda_s = \sqrt{\overline{N}\lambda^2}$, allora si ha che, fissata $\left\langle \overline{N} \right\rangle$, ci sono vari pesi per diversi $\overline{N}$. Le righe che si hanno per i vari $\overline{N}$, come si nota dal trend di figura IV.3.2, hanno diverse forme e ampiezze. In particolare quelle a $\overline{N}$ piccole, sebbene abbiano probabilità molto piccole, sono sufficientemente ampie da dare il loro contributo alla riga che comprende tutti gli $\overline{N}$; ecco il perché si trova lo stretto picco centrale in figura IV.3.1.

Questo fenomeno non si presenta sui lati perché sono assenti segnali per cavità "quasi vuote" in quanto un atomo non accoppiato alla cavità non sarà eccitato. Questo è un'inoppugnabile verifica dell'efficacia delle fluttuazioni del numero di atomo in cavità.

IV.3.2 *Regime di singolo atomo*

Il numero totale di atomi in un volume caratteristico è

$$N = \int_0^l \int_0^r \rho_0 \, \mathrm{d}V = \pi r^2 l \rho_0; \qquad \text{(eq-IV.48)}$$

ρ_0 sia costante e l si estenda lungo diverse lunghezze d'onda del modo dell'onda. Il numero di atomi in cavità in questo volume ad ogni istante è dato da

$$\overline{N} = \iint \rho_0 \psi^2(\mathrm{r}, \mathrm{z}) \, \mathrm{d}V. \qquad \text{(eq-IV.49)}$$

Si trova quindi il rapporto

$$\frac{\overline{N}}{N} \approx \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-2u^2}\right)}{2u^2} \qquad \text{(eq-IV.50)}$$

dove $u = r/\omega_0$. Scegliendo $u = 1$ $N = 4.6$ atomi sono in cavità per avere $\overline{N} = 1$.

Per un vero regime a singolo atomo nel quale si abbia $N = 1$, cioé un solo atomo percorre tutta la cavità, si richiede $\left\langle \overline{N} \right\rangle = 0.2$.

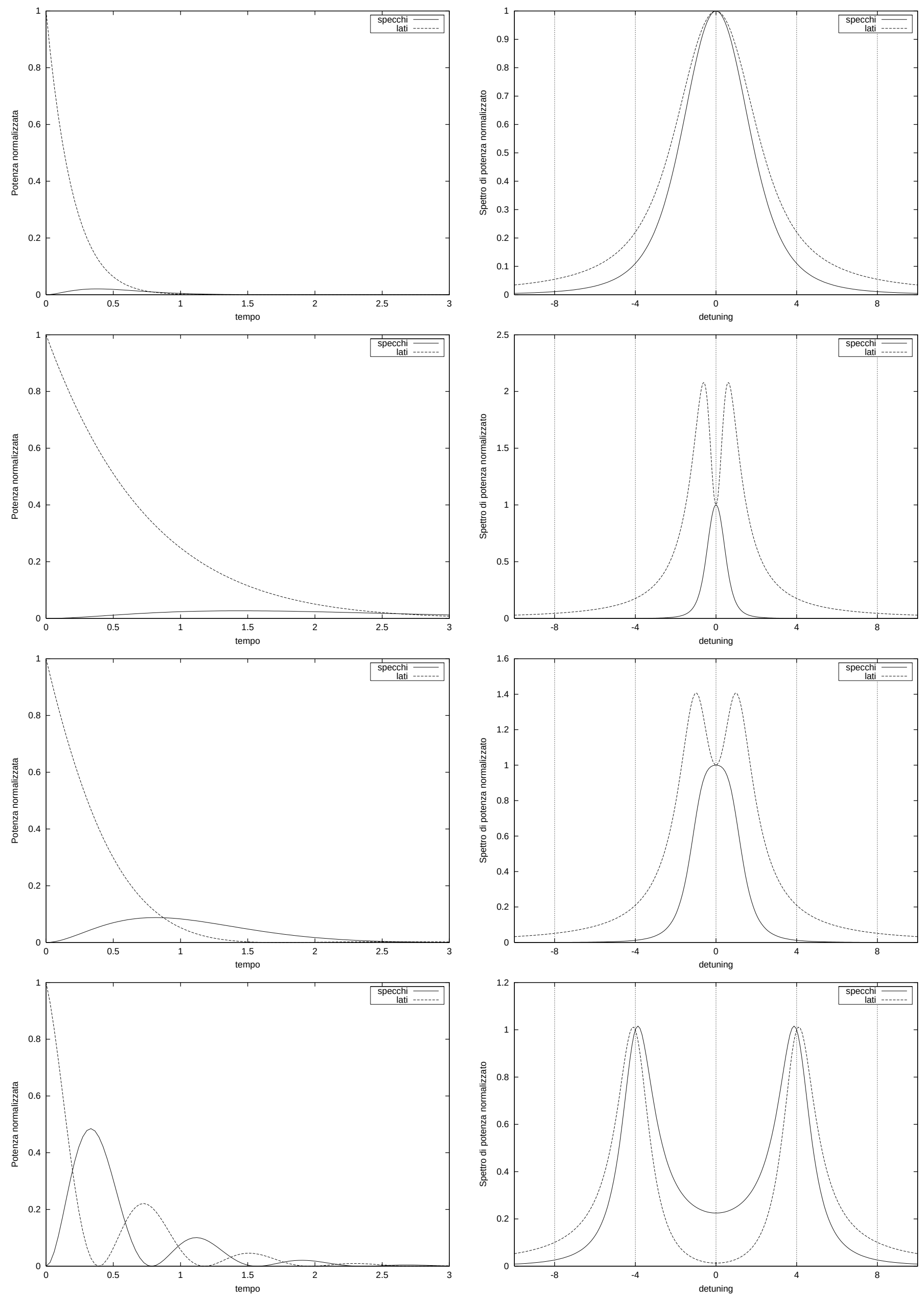


Fig. IV.2.1 Risultati ottenuti per $W(\gamma_p t)$ e $\mathcal{W}\left(\frac{\Omega-\omega_p}{\gamma_p}\right)$.

Nella prima riga si ha accoppiamento debole: $\frac{\gamma_c}{\gamma_p} = 4$ e $\frac{\lambda}{\gamma_p} = 1$. La seconda riga rappresenta il caso di accoppiamento intermedio per cui $\frac{\gamma_c}{\gamma_p} = 0.3$ e $\frac{\lambda}{\gamma_p} = 0.3$; la terza riguarda ancora accoppiamento intermedio per il quale $\frac{\gamma_c}{\gamma_p} = 1$ e $\frac{\lambda}{\gamma_p} = 0.9$; la quarta riga riguarda accoppiamento forte per cui $\frac{\gamma_c}{\gamma_p} = 1$ e $\frac{\lambda}{\gamma_p} = 4$.

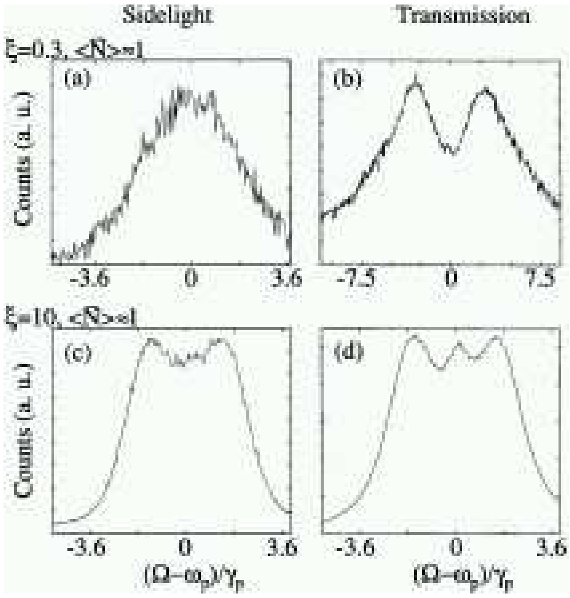
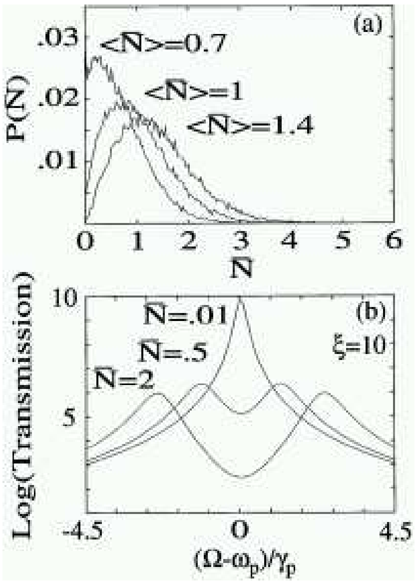


Fig. IV.3.1 Output laterale e frontale a $\langle \overline{N} \rangle$ [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`].



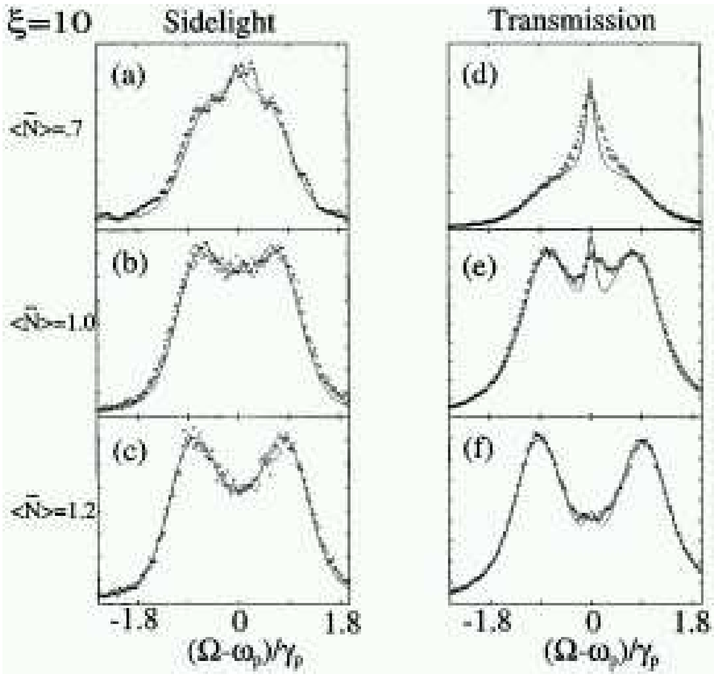


Fig. IV.3.2 Distribuzione di probabilità per $\overline{N}$ [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`].

Fig. IV.3.3 Spettri previsti in trasmissione [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`].

Fig. IV.3.4 Output nel caso $\xi = 10$ a vari $\langle \overline{N} \rangle$ [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`].

Bibliografia

[1] E.T. Jaynes and F.W. Cummings; *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).

QED delle cavità

[2] F.W. Cummings: "Stimulated emission of radiation"; *Phys. Rev.* **140**, A1051 (1965).
[3] W. Vogel; **"Lectures on quantum optics"**, Springer (1993).
[4] E. Pike and S. Sarkar; **"Frontiers in quantum optics"**, (1990).
[5] AA.VV.; **"Cavity Quantum Electrodynamics"**, Academic Press (1994).

Microlaser

[6] Kyungwon An and M.S. Feld: "SAL: Single Atom Laser"; *Scientific American* **July 1995**, 56 (1995).
[7] Kyungwon An, J.J. Childs, R.R. Dasari, M.S. Feld: "Microlaser: a laser with one atom in an optical resonator"; *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3375 (1994).
[8] Kyungwon An, M.S. Feld: "Role of standing wave mode structure in microlaser emission"; *Phys. Rev. A* **52**, 1691 (1995).
[9] Kyungwon An, C. Yang, R.R. Dasari, M.S. Feld: "Cavity ring-down technique and its application to the measurement of ultraslow velocities"; *Opt. Lett.* **20**, 1068 (1995).
[10] Kyungwon An, R.R. Dasari, M.S. Feld: "One step absolute frequency stabilization of a Ti:Sapphire laser using f.m. Lamb-dip spectroscopy"; *Appl. Phys. Lett.* **66**, 2162 (1995).
[11] J.J. Childs, R.R. Dasari, M.S. Feld, M.S. Otteson: "Normal mode line shapes for atoms in standing wave optical resonators"; *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2901 (1996).
[12] R.R. Dasari, M.S. Feld: "Travelling wave atom-cavity interaction in the single-atom microlaser"; *Opt. Lett.* **22**, 1500 (1997).
[13] Kyungwon An, C. Yang: "Quantum trajectory analisis of a thresholdlike transition in the microlaser"; *Phys. Rev. A* **55**, 4492 (1997).
[14] Kyungwon An, M.S. Feld: "Semiclassical four-level single-atom laser"; *Phys. Rev. A* **56**, 1662 (1997).
[15] Kyungwon An, A. Sones, C. Fang-Yen, R.R. Dasari, M.S. Feld: "Optical bistability induced by mirror absorption: meas. of abs. coefficients at the sub-ppm level"; *Opt. Lett.* **22**, 1433 (1997).

Micromaser

[16] D. Meschede, H. Walther and G. Muller; *Phys. Rev. Lett.* **54**, 551 (1985).
[17] M.O. Scully and H. Walther; *Phys. Rev. A* **48**, 813 (1993).
[18] J. Krause, M.O. Scully and H. Walther; *Phys. Rev. A* **36**, 4547 (1987).
[19] P. Meystre and M.S. Zubairy; *Phys. Rev. Lett.* **89A**, 390 (1982).
[20] P. Fillipowicz, J. Javanainen and P. Meystre; *Journ. Opt. Soc. Am. B* **3**, 906 (1986).
[21] G. Rempe, H. Walther and N. Klein; *Phys. Rev. Lett.* **58**, 353 (1987).

Indice delle immagini

Tabelle

II.2.1 Alcuni dispositivi laser a confronto. 5

Figure

I.1.1 Vista schematica 3D del SAL [`sorak.kaist.ac.kr/~kwan`]. 2

II.2.1 Fotografia della cella utilizzata [`web.mit.edu/minwah/www/sal.html`]. 4
II.3.1 Fotografia del montaggio del dispositivo [`sorak.kaist.ac.kr/~kwan`]. 7
II.3.2 Vista camera a vuoto che alloggia il SAL [`sorak.kaist.ac.kr/~kwan`]. 7
II.5.1 Potenza emessa dal laser a singolo atomo. 7

III.2.1 Grafico della funzione $\mathrm{P}_{2\to1}$ al variare del parametro $\mathrm{d} = \delta/\Omega_n$. 16
III.3.1 Grafico della funzione $\mathrm{P}^{\mathrm{ris}}_{2\to1} = \sin^2(0.51\sqrt{n+1})$ a vari n. 16

IV.1.1 Misura di $\langle n\rangle$ rispetto a $\langle N\rangle$ [`Phys.Rev.A, vol.52, pag.1695`]. 21
IV.1.2 Dati raccolti di $\langle n\rangle$ rispetto a $\langle N\rangle$ [`web.mit.edu/minwah/www/sal.html`]. . . . 21
IV.1.3 Output del SAL a “travelling-waves” [`Opt.Lett., vol.22, pag.1501`]. 22
IV.2.1 Risultati ottenuti per $W(\gamma_p t)$ e $\mathcal{W}\left(\frac{\Omega-\omega_p}{\gamma_p}\right)$. 27
IV.3.1 Output laterale e frontale a $\left\langle\overline{N}\right\rangle$ [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`]. . . . 28
IV.3.2 Distribuzione di probabilità per $\overline{N}$ [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`]. . . 28
IV.3.3 Spettri previsti in trasmissione [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`]. 28
IV.3.4 Output nel caso $\xi = 10$ a vari $\left\langle\overline{N}\right\rangle$ [`Phys.Rev.Lett., vol.77, pag.2901`]. . . 28

Indice analitico

An, 2
autostati sistema atomo-cavità, 14
autovalori sistema atomo-cavità, 13

Bario, 5
  metallico, 5
  velocità rms, 5

campo in cavità
  elettrico, 10
  magnetico, 10
  operatori, 11
cavità
  decadimento del modo, 4
  fattore di merito, 4
  misura del Q, 4
Childs, 2
coefficiente di accoppiamento λ, 12, 25
completezza, equazione di, 14
Coulomb, gauge di, 9
Cummings, 1, 4, 9, 11

densità atomi in cavità, 20
Doppler effect, 22
dressed states, 14
  ev. temporale, 15

fattore di merito, 4
Feld, 2
fluttuazioni, 26
fm locking, 4, 6
fotodiodo, 6
frange di Ramsey, 2

hamiltoniana
  interazione atomo-cavità, 12
  quantistica campo e.m., 10
  totale atomo-cavità, 13

Jaynes, 1, 4, 9, 11

Lamb-dip, 6

Maxwell-Scrödinger
  equazioni di, 22
  soluzioni delle eq. di, 24
Meschede, 1
micromaser, 1

numero medio di fotoni, 20

operatore
  campi e.m., 11
  densità, 15
  di discesa, 10
  di salita, 10
  ev. temporale, 14
oscillazioni di Rabi, 3, 16
  soluzione semiclassica, 11

potenza SAL, 24
  nel tempo, 24
  spettro in frequenza, 25
potenziale vettore, 9
probabilità di transizione, 15

Rabi
  oscillazioni di, 3, 11, 16
  soluzione di, 11, 16
Ramsey, 2
ring-down, 4

standing-wave, 22
supercavità, 4

tempo
  t_{free}, 17
  di vita in cavità t_{cav}, 17
  di volo t_{int}, 17
travelling-waves, 22