

# **Lezioni di Fisica Teorica**

Enore Guadagnini

## 1 Fisica quantistica

I dati sperimentali mostrano che il comportamento della Natura, quale esso ci appare nello studio dei cosiddetti sistemi classici o macroscopici, cambia drasticamente quando si considerano fenomeni che coinvolgono, per esempio, uno o pochi atomi. La meccanica quantistica fornisce una descrizione di tale comportamento della Natura, e le previsioni di questa teoria sono in ottimo accordo coi risultati degli esperimenti. In realtà, una attenta analisi dei dati sperimentali mostra che *tutti* i fenomeni osservati —anche quelli che macroscopicamente appaiono classici— sono sempre riconducibili a processi quantistici. Nei pochi casi in cui manca una diretta evidenza sperimentale della natura quantistica dei processi, l'interpretazione quantistica e le previsioni basate sulla meccanica quantistica risultano in accordo con gli esperimenti.

L'insieme dei dati sperimentali attuali può essere coerentemente descritto nello schema fornito dalla meccanica quantistica e, più precisamente, nello schema generale che è stato elaborato a partire dalla meccanica quantistica e che prende il nome di teoria quantistica dei campi. Le prime referenze da [1] a [24] illustrano le applicazioni della teoria quantistica di campo nella descrizione dei processi appartenenti alla fisica delle particelle.

### 1.1 Particelle

Tutti i fenomeni in cui si osservano effetti quantistici sono descrivibili in termini di *particelle*, che corrispondono a opportuni sistemi fisici che si manifestano sempre in multipli interi di opportune quantità unitarie “fondamentali” non frazionabili: le singole particelle. Una valida spiegazione di questo comportamento della Natura non è nota. Tuttavia, sono stati sviluppati metodi piuttosto elaborati per la descrizione dei fenomeni che coinvolgono le particelle; l'insieme di questi metodi fa parte della cosiddetta teoria quantistica dei campi.

Il confronto dei dati sperimentali con le previsioni basate sulle teorie quantistiche dei campi mostrano che il contenuto di tutta la materia esistente in Natura è totalmente descrivibile in termini di particelle e, piuttosto sorprendentemente, anche l'origine stessa delle interazioni tra particelle è formulabile —a sua volta— unicamente in termini di particelle. In relazione alle diverse condizioni fisiche in cui avvengono i vari processi, certe particelle possono essere considerate *elementari* oppure *composte*. Ad energie sufficientemente basse, ovvero quando i valori dell'energia o dell'impulso scambiati tra le particelle sono sufficientemente bassi, l'eventuale struttura interna di una particella si può generalmente trascurare; in questo caso, la particella si comporta approssimativamente come una particella elementare. Sperimentalmente risulta che,

per una dato tipo di particella, l'attributo di *particella elementare* oppure di *particella composta* è piuttosto convenzionale e dipende anche dall'intervallo di variabilità di energia/impulso considerato. Consistentemente, nel formalismo della teoria quantistica dei campi non vi è una distinzione di principio tra particelle “composte” o “elementari”.

### 1.2 Costituenti della materia a piccole distanze

Rispetto alle energie attualmente raggiunte negli esperimenti, i leptoni non mostrano una struttura interna e si comportano come particelle “elementari”, mentre gli adroni risultano essere particelle composte e i loro “costituenti elementari” sono stati chiamati quark e gluoni. Sperimentalmente risulta che, a differenza dei leptoni, quark e gluoni non si presentano mai come particelle libere —o debolmente interagenti— ma si manifestano unicamente in maniera indiretta come gradi di libertà relativi ai costituenti degli stati composti adronici. I vari tipi di “particelle elementari”, che sono stati osservati direttamente od indirettamente in natura, ammontano a poche decine: sei leptoni (con spin  $1/2$ ), sei quark (con spin  $1/2$ ) ciascuno dei quali possiede tre possibili stati di colore, il fotone (con spin unitario e due soli stati di elicità), tre bosoni vettoriali massicci (con spin unitario), una particella di spin nullo (particella di Higgs), otto bosoni di spin unitario (gluoni) e il gravitone (con spin 2 e due stati di elicità).

Le interazioni tra elettroni e fotoni sono descritte dalla cosiddetta elettrodinamica quantistica, che nel limite classico riproduce le leggi dell'elettromagnetismo. L'insieme delle equazioni dell'elettrodinamica classica sono state studiate e verificate dal confronto con gli esperimenti per quasi due secoli. I concetti e gli aspetti teorici propriamente quantistici dell'elettrodinamica sono stati elaborati negli ultimi settant'anni e sono in ottimo accordo con gli esperimenti. L'interazione elettromagnetica e le interazioni deboli ammettono un descrizione unificata, denotata col nome di teoria elettrodebole. L'esistenza della particella di Higgs, che era stata ipotizzata su basi teoriche, sembra essere confermata dagli attuali dati sperimentali.

Le cosiddetta interazione forte tra le particelle coinvolge solamente gli adroni. La presenza in Natura dei gluoni, quali responsabili delle interazioni forti, è basata su argomenti teorici. In questo caso la corrispondente teoria delle interazioni forti esclude la possibilità di una diretta osservazione sperimentale dei gluoni e propone verifiche indirette della loro esistenza; i dati sperimentali al riguardo sono in buon accordo con le previsioni teoriche. Infine, la particella che costituisce le onde gravitazionali —la cui esistenza dovrebbe essere collegata con il manifestarsi delle interazioni

gravitazionali— è stata denominata gravitone. Recentemente, le onde gravitazionali sono state rilevate sperimentalmente in maniera diretta.

### 1.3 Particelle identiche

L'aspetto fondamentale connesso con l'esistenza delle particelle riguarda la loro indistinguibilità. Per ogni assegnato tipo di particella, caratterizzato da un opportuno insieme di numeri quantici (come per esempio il valore della massa, dello spin e della carica elettrica), risulta sempre possibile produrre sperimentalmente un numero arbitrario di tali particelle; inoltre, tutte le particelle dello stesso tipo sono *identiche*, ovvero sono tra loro indistinguibili. Per definizione, due particelle sono identiche se non esiste alcun esperimento capace di distinguere una particella dall'altra.

In un sistema composto da due particelle identiche, l'affermazione che la prima particella si trova nello stato  $|A\rangle$  e la seconda particella si trova nello stato  $|B\rangle$  è una affermazione priva di significato. Infatti, per stabilire quale delle due particelle si trova per esempio nello stato  $|A\rangle$ , occorrerebbe distinguere in qualche modo le due particelle; ma questo, per definizione, non è possibile poiché le due particelle sono identiche. Similmente, per un sistema di due particelle identiche, la dicitura “*la particella nello stato  $|A\rangle$* ” è priva di significato poiché —indipendentemente dagli stati in cui si trovano— particelle identiche restano comunque tra loro indistinguibili.

Storicamente, il concetto di particelle identiche è stato sviluppato nel contesto della meccanica quantistica. Si è poi scoperto che, in realtà, tale concetto è del tutto indipendente dalla struttura della dinamica e non è connesso col principio di indeterminazione o con la meccanica quantistica. L'assenza di entropia di mescolamento per due gas costituiti dallo stesso tipo di molecole, per esempio, è una delle numerose conseguenze dell'esistenza di particelle identiche.

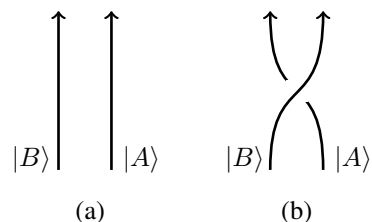


Figure 1.1. (a) trasformazione identica; (b) processo di scambio.

Il modo migliore di illustrare il concetto di particelle identiche consiste nel considerare il processo di scambio tra gli stati di due particelle identiche e confrontarlo con l'operazione identità, come schematizzato in Figura 1.1. In un sistema composto da due particelle identiche, si immagini di effettuare —nello spazio tridimensionale o nello spazio degli stati del sistema— l'operazione di scambio indicata in Figura 1.1(b). In Natura si osserva che lo stato del sistema ottenuto dopo tale operazione coincide con lo stato iniziale, ovvero coincide con lo stato del sistema in cui non si è effettuato alcuna trasformazione, come mostrato in Figura 1.1(a). In altri termini, contrariamente a quanto è naturale aspettarsi osservando la figura 1.1(b), l'operazione di scambio di due particelle identiche è rappresentata da un cammino *chiuso* nello spazio degli stati quantistici del sistema.

### 1.4 Località

La località delle interazioni tra particelle è un fatto sperimentale. Quando si studiano i processi di collisione tra particelle, per esempio, si osserva che i centri di diffusione degli urti che si verificano tra le particelle coincidono coi punti di intersezione dei fasci di particelle. Similmente, analizzando le tracce nei rivelatori e i dati relativi alla cinematica delle particelle prodotte in un decadimento, si può verificare la località dell'evento di decadimento. I limiti sperimentali sulla località delle interazioni sono determinati essenzialmente dalla struttura dei rivelatori. Il modo in cui la località delle interazioni tra le particelle si manifesta in Natura presenta un aspetto universale molto importante: sperimentalmente risulta che tutte le particelle direttamente osservabili, qualora siano sufficientemente distanti tra loro, si comportano come particelle libere.

### 1.5 Spazio degli stati

Nei processi di interazione tra le particelle, il numero di particelle —od il numero di particelle di un certo tipo— possono cambiare. Conseguentemente è necessario introdurre uno spazio degli stati che permetta di descrivere gli stati relativi a tutte le possibili combinazioni dei vari numeri di particelle. Per illustrare la costruzione di questo spazio degli stati, risulta conveniente considerare inizialmente un solo tipo di particelle, successivamente verranno introdotti tutti gli altri tipi.

### 1.5.1 Stati di singola particella

Sia  $\mathcal{H}_{(1)}$  lo spazio degli stati di una singola particella di tipo fissato. Nello spazio lineare  $\mathcal{H}_{(1)}$ , che ha generalmente dimensione infinita, è sempre possibile introdurre una base ortonormale di vettori  $\{|\alpha\rangle\}$  in cui l'indice  $\alpha$  assume valori, per esempio, nei numeri naturali  $\alpha = 1, 2, 3, \dots$ .

### 1.5.2 Stati di molte particelle

Lo spazio degli stati di due particelle  $\mathcal{H}_{(2)}$  è contenuto nel prodotto tensoriale  $\mathcal{H}_{(1)} \otimes \mathcal{H}_{(1)}$ . Siccome le particelle sono identiche, è necessario tener conto della statistica.

I dati sperimentali sono in completo accordo con l'ipotesi che le funzioni d'onda di un qualunque sistema contenente particelle identiche di spin  $1/2$  debbano essere completamente antisimmetriche per lo scambio delle variabili di due particelle identiche. Questo implica che, in generale, dato un generico sistema contenente particelle identiche di spin  $s$ , per scambio delle variabili di due particelle identiche la funzione d'onda debba essere necessariamente simmetrica se  $s$  assume un valore intero o nullo ( $s = 0, 1, 2, \dots$ ), oppure la funzione d'onda debba essere necessariamente antisimmetrica se  $s$  assume un valore semintero ( $s = 1/2, 3/2, \dots$ ). Questa proprietà si esprime affermando che particelle con spin semintero seguono la statistica di Fermi-Dirac, mentre particelle con spin intero o nullo seguono la statistica di Bose-Einstein.

Nel caso della statistica di Bose-Einstein,  $\mathcal{H}_{(2)}$  coincide con lo spazio dei vettori di  $\mathcal{H}_{(1)} \otimes \mathcal{H}_{(1)}$  che sono simmetrici per scambio delle variabili relative alle due particelle. Mentre nel caso della statistica di Fermi-Dirac,  $\mathcal{H}_{(2)}$  coincide con lo spazio dei vettori di  $\mathcal{H}_{(1)} \otimes \mathcal{H}_{(1)}$  che sono antisimmetrici per scambio delle variabili delle due particelle.

In maniera analoga, si può procedere a costruire lo spazio  $\mathcal{H}_{(n)}$  relativo agli stati di  $n$  particelle identiche. Le particelle che hanno spin nullo o spin intero seguono la statistica di Bose-Einstein; conseguentemente i corrispondenti vettori di stato devono essere completamente simmetrici per scambio delle variabili relative a due particelle qualunque. Le particelle che hanno spin semintero seguono invece la statistica di Fermi-Dirac ed i corrispondenti vettori di stato devono essere completamente antisimmetrici per scambio delle variabili di due particelle qualsiasi.

$$\begin{aligned} \text{Bose-Einstein :} \quad \mathcal{H}_{(n)} &= \overbrace{\mathcal{H}_{(1)} \otimes \mathcal{H}_{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{(1)}}^n \Big|_{\text{simm.}} \\ \text{Fermi-Dirac :} \quad \mathcal{H}_{(n)} &= \overbrace{\mathcal{H}_{(1)} \otimes \mathcal{H}_{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{(1)}}^n \Big|_{\text{antisimm.}} \end{aligned}$$

Infine, la somma diretta degli spazi  $\mathcal{H}_{(n)}$  al variare di  $n$  rappresenta lo spazio degli stati in cui il numero  $n$  di particelle può variare come  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

**Nota 1.** Questa rappresentazione dello spazio degli stati risulta essere poco conveniente. In questo formalismo l'operazione di simmetrizzazione o di antisimmetrizzazione dei vettori di stato nelle variabili corrispondenti alle singole particelle non appare in maniera naturale o automatica, ma deve essere imposta dall'esterno. Questa mancanza di naturalezza appare anche nel procedimento logico che generalmente si utilizza per individuare e rappresentare gli stati di particelle identiche. Infatti, inizialmente si assume di poter distinguere le particelle tra loro, e gli stati a molti particelle vengono quindi descritti per mezzo dei vettori appartenenti al prodotto tensoriale degli spazi di singola particella. Successivamente, si introducono gli effetti della indistinguibilità delle particelle mediante la simmetrizzazione o antisimmetrizzazione dei vettori.

## 1.6 Spazio di Fock

Per mettere in evidenza gli aspetti fondamentali connessi con l'esistenza di particelle identiche, è conveniente utilizzare il formalismo dello spazio di Fock, in cui si quantizza il numero di particelle e si introducono opportuni operatori di creazione e di annichilazione per le particelle. La nuova descrizione degli stati delle particelle è basata sulla seguente

**Osservazione 1.** Per un sistema composto da particelle identiche, è possibile scegliere una base completa nello spazio degli stati in cui ciascun vettore di base è univocamente caratterizzato specificando, per ogni valore dell'indice  $\alpha$  che labella gli stati di singola particella, il numero  $n_\alpha$  di particelle che si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$ .

Viene ora descritta la costruzione dello spazio di Fock nei due casi in cui si abbia statistica di Bose-Einstein o statistica di Fermi-Dirac.

### 1.6.1 Statistica di Bose-Einstein

Sia  $\{|\alpha\rangle\}$  una base ortonormale di vettori nello spazio degli stati di singola particella. Quando le particelle identiche obbediscono alla statistica di Bose-Einstein, il numero  $n_\alpha$  di particelle che si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$  può assumere valori interi positivi arbitrari od il valore nullo,  $n_\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Questi possibili valori di  $n_\alpha$  si possono interpretare come gli autovalori di un operatore  $N_\alpha$  che agisce in un opportuno spazio vettoriale  $V_\alpha$ . Il modo più semplice di rappresentare  $N_\alpha$  consiste nell'utilizzare l'analogia esistente tra gli autovalori di  $N_\alpha$  ed i livelli di un oscillatore armonico

unidimensionale. Si introducono quindi due operatori  $a_\alpha$  ed  $a_\alpha^\dagger$  —rispettivamente di annichilazione e di creazione— definiti in  $V_\alpha$  che soddisfano le seguenti regole di commutazione

$$[a_\alpha, a_\alpha^\dagger] = a_\alpha a_\alpha^\dagger - a_\alpha^\dagger a_\alpha = 1 . \quad (1.1)$$

Si assume inoltre che esista un vettore  $|0\rangle_\alpha \in V_\alpha$  di norma unitaria, che sarà chiamato il vettore corrispondente allo stato fondamentale, con la seguente proprietà

$$a_\alpha |0\rangle_\alpha = 0 . \quad (1.2)$$

Allora, posto

$$|n_\alpha\rangle_\alpha = \frac{1}{\sqrt{n_\alpha!}} (a_\alpha^\dagger)^{n_\alpha} |0\rangle_\alpha , \quad (1.3)$$

e

$$N_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha , \quad (1.4)$$

si ha

$$N_\alpha |n_\alpha\rangle_\alpha = n_\alpha |n_\alpha\rangle_\alpha . \quad (1.5)$$

Lo stato descritto dal vettore  $|n_\alpha\rangle_\alpha$  può essere interpretato come lo stato in cui  $n_\alpha$  particelle si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$ . Gli operatori  $a_\alpha$  ed  $a_\alpha^\dagger$  rappresentano rispettivamente l'operatore di annichilazione e di creazione di una particella nello stato  $|\alpha\rangle$ .

Il procedimento appena descritto può essere ripetuto per ogni possibile valore dell'indice  $\alpha$ . Conseguentemente, per ogni stato  $|\alpha\rangle$  di singola particella, si introduce uno spazio vettoriale  $V_\alpha$  in cui sono definiti gli operatori di annichilazione e di creazione  $a_\alpha$  ed  $a_\alpha^\dagger$  che soddisfano le regole di commutazione (1.1). Si consideri ora lo spazio  $\mathcal{H}_F$  che si ottiene prendendo il prodotto tensoriale degli spazi  $V_\alpha$  per tutti i possibili valori di  $\alpha$

$$\mathcal{H}_F = V_{\alpha=1} \otimes V_{\alpha=2} \otimes V_{\alpha=3} \otimes \dots \quad (1.6)$$

Gli operatori  $\{a_\alpha\}$  ed  $\{a_\alpha^\dagger\}$ , che sono definiti in  $\mathcal{H}_F$ , verificano le relazioni

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0 = [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] . \quad (1.7)$$

Il vettore  $|0\rangle$  corrispondente allo stato fondamentale in  $\mathcal{H}_F$ ,

$$|0\rangle = |0\rangle_{\alpha=1} \otimes |0\rangle_{\alpha=2} \otimes |0\rangle_{\alpha=3} \otimes \dots \quad (1.8)$$

è anche chiamato il vettore di vuoto perché descrive lo stato in cui non ci sono particelle. Uno stato che contiene, per esempio,  $n_\alpha$  particelle nello stato  $|\alpha\rangle$ ,  $n_\beta$  particelle nello stato  $|\beta\rangle$  ed  $n_\gamma$  particelle nello stato  $|\gamma\rangle$  è rappresentato da

$$|n_\alpha, n_\beta, n_\gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_\alpha! n_\beta! n_\gamma!}} (a_\alpha^\dagger)^{n_\alpha} (a_\beta^\dagger)^{n_\beta} (a_\gamma^\dagger)^{n_\gamma} |0\rangle . \quad (1.9)$$

Il vettore (1.9) è completamente simmetrico per scambio di due qualunque operatori di creazione poiché gli operatori di creazione commutano tra loro,  $[a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0$ . Questa proprietà di commutazione si traduce nella proprietà di simmetria dei vettori di stato per scambio delle variabili corrispondenti a due particelle qualunque. L'operatore  $N$  corrispondente al numero totale di particelle è dato da

$$N = \sum_\alpha N_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha . \quad (1.10)$$

Infine, lo spazio  $\mathcal{H}$  dei vettori di stato del sistema —corrispondente ad un tipo fissato di particelle identiche— si ottiene considerando il completamento (o chiusura) in  $\mathcal{H}_F$  delle combinazioni lineari finite di vettori di  $\mathcal{H}_F$  con un numero finito di particelle.

### 1.6.2 Statistica di Fermi-Dirac

Sia  $\{|\alpha\rangle\}$  una base ortonormale di vettori nello spazio degli stati di singola particella. Quando le particelle identiche obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac, il numero  $n_\alpha$  di particelle che si trovano nello stato  $|\alpha\rangle$  può assumere solamente i valori  $n_\alpha = 0$  oppure  $n_\alpha = 1$ . In questo caso, per ogni valore di  $\alpha$  si introducono uno spazio vettoriale bidimensionale  $V_\alpha$  ed una base ortonormale  $\{|0\rangle_\alpha, |1\rangle_\alpha\}$  in  $V_\alpha$ , dove  $|0\rangle_\alpha$  corrisponde allo stato in cui nessuna particella si trova nello stato  $|\alpha\rangle$ , mentre  $|1\rangle_\alpha$  corrisponde allo stato in cui una particella si trova nello stato  $|\alpha\rangle$ . Questi vettori si possono rappresentare, per esempio, nel modo seguente

$$|0\rangle_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\alpha \quad , \quad |1\rangle_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\alpha . \quad (1.11)$$

Gli operatori  $a_\alpha$  e  $a_\alpha^\dagger$  corrispondenti alle seguenti matrici

$$a_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_\alpha \quad , \quad a_\alpha^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_\alpha , \quad (1.12)$$

verificano le relazioni

$$\{a_\alpha, a_\alpha^\dagger\} = a_\alpha a_\alpha^\dagger + a_\alpha^\dagger a_\alpha = 1 , \quad (1.13)$$

$$\{a_\alpha, a_\alpha\} = 0 = \{a_\alpha^\dagger, a_\alpha^\dagger\}. \quad (1.14)$$

L'operatore numero di particelle nello stato  $|\alpha\rangle$  vale

$$N_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha. \quad (1.15)$$

Si consideri ora lo spazio  $\mathcal{H}_F$  che si ottiene prendendo il prodotto tensoriale degli spazi  $V_\alpha$  per tutti i possibili valori di  $\alpha$

$$\mathcal{H}_F = V_{\alpha=1} \otimes V_{\alpha=2} \otimes V_{\alpha=3} \otimes \cdots \quad (1.16)$$

il vettore di vuoto  $|0\rangle \in \mathcal{H}$  è dato da

$$|0\rangle = |0\rangle_{\alpha=1} \otimes |0\rangle_{\alpha=2} \otimes |0\rangle_{\alpha=3} \otimes \cdots \quad (1.17)$$

Differentemente dal caso della statistica di Bose-Einstein, i vettori che si ottengono applicando i vari prodotti degli operatori  $\{a_\alpha^\dagger\}$  al vettore di vuoto non possiedono le giuste proprietà di simmetria. Infatti, nel caso della statistica di Fermi-Dirac, i vettori di stato devono essere completamente antisimmetrici per scambio delle variabili relative a due particelle qualunque. D'altra parte, il vettore  $a_\alpha^\dagger a_\beta^\dagger |0\rangle$  con  $\alpha \neq \beta$ , per esempio, è simmetrico per lo scambio  $\alpha \leftrightarrow \beta$  perché gli operatori  $a_\alpha^\dagger$  e  $a_\beta^\dagger$  commutano tra loro,  $[a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0$ . Per ovviare a questo inconveniente è sufficiente modificare gli operatori  $\{a_\alpha\}$  e  $\{a_\alpha^\dagger\}$  in modo opportuno [12]. Gli operatori di annichilazione e di creazione per le particelle che obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac saranno indicati con  $\{b_\alpha\}$  e  $\{b_\alpha^\dagger\}$  e sono definiti da

$$b_\alpha = \eta_\alpha a_\alpha = a_\alpha \eta_\alpha, \quad b_\alpha^\dagger = \eta_\alpha a_\alpha^\dagger = a_\alpha^\dagger \eta_\alpha, \quad (1.18)$$

dove

$$\eta_\alpha = \eta_\alpha^\dagger = \prod_{\beta=1}^{\alpha-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\beta. \quad (1.19)$$

È facile verificare che gli operatori  $\{b_\alpha\}$  e  $\{b_\alpha^\dagger\}$  soddisfano le seguenti relazioni

$$\{b_\alpha, b_\beta^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad \{b_\alpha, b_\beta\} = 0 = \{b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger\}. \quad (1.20)$$

Gli stati a molte particelle si ottengono applicando prodotti degli operatori di creazione  $\{b_\alpha^\dagger\}$  allo stato di vuoto. Per esempio, lo stato che contiene una particella nello

stato  $|\alpha\rangle$ , una particella nello stato  $|\beta\rangle$  ed una particella nello stato  $|\gamma\rangle$  è rappresentato dal vettore

$$|\alpha, \beta, \gamma\rangle = b_\alpha^\dagger b_\beta^\dagger b_\gamma^\dagger |0\rangle. \quad (1.21)$$

Il vettore (1.21) è antisimmetrico per lo scambio  $\alpha \leftrightarrow \beta$ , come pure per lo scambio  $\alpha \leftrightarrow \gamma$  oppure  $\beta \leftrightarrow \gamma$ , perché gli operatori di creazione anticommutano tra loro,  $\{b_\alpha^\dagger, b_\beta^\dagger\} = 0$ . L'operatore  $N$  corrispondente al numero totale di particelle è

$$N = \sum_\alpha N_\alpha = \sum_\alpha a_\alpha^\dagger a_\alpha = \sum_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha. \quad (1.22)$$

Anche in questo caso, lo spazio  $\mathcal{H}$  dei vettori di stato del sistema —corrispondente ad un tipo fissato di particelle identiche— si ottiene considerando il completamento in  $\mathcal{H}_F$  delle combinazioni lineari finite di vettori di  $\mathcal{H}_F$  con un numero finito di particelle.

## 1.7 Statistica e regole di commutazione

Per ogni fissato tipo di particella, gli stati con un numero non nullo di particelle sono rappresentati dai vettori che si ottengono applicando gli operatori di creazione ad un vettore di vuoto, che descrive la situazione fisica in cui non vi sono particelle. Il tipo di statistica associato alle particelle è univocamente determinato dalle relazioni di commutazione o di anticommuteazione dei corrispondenti operatori di annichilazione e di creazione. La statistica di Bose-Einstein richiede le regole di commutazione (1.7), mentre la statistica di Fermi-Dirac richiede le regole di anticommuteazione (1.20).

Si consideri ora il caso realistico in cui vari tipi di particelle devono essere descritti simultaneamente. Anche in questa situazione, gli stati delle particelle si possono descrivere mediante l'applicazione di opportuni operatori di creazione al vettore di vuoto. Per ogni tipo di particelle, si introducono i corrispondenti operatori di annichilazione e di creazione le cui regole di commutazione tra loro sono univocamente fissate dalla statistica. Invece, le regole di commutazione tra gli operatori di annichilazione e di distruzione relativi a diversi tipi di particelle non sono a priori fissate.

**Osservazione 2.** *Tutti i diversi tipi di particelle che seguono la stessa statistica (di Bose-Einstein oppure di Fermi-Dirac) si possono sempre interpretare, mediante l'introduzione di opportuni numeri quantici, come stati distinti di un solo e unico tipo di particelle.*

Conseguentemente, la struttura delle regole di commutazione e di anticommutazione si può estendere —e in effetti risulta valida— anche per gli operatori di annichilazione e di creazione relativi a diversi tipi di particelle. Ovvero, consideriamo tutti gli stati di singola particella per i due tipi di statistica; sia  $\{|\alpha\rangle\}$  una base ortonormale per tutti gli stati con statistica di Bose-Einstein, e sia  $\{|i\rangle\}$  una base ortonormale per tutti gli stati con statistica di Fermi-Dirac. I corrispondenti operatori di annichilazione e di creazione soddisfano le relazioni

$$\begin{aligned} [a_\alpha, a_\beta^\dagger] &= \delta_{\alpha\beta} & , & & [a_\alpha, a_\beta] &= 0 = [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] \\ \{b_i, b_j^\dagger\} &= \delta_{ij} & , & & \{b_i, b_j\} &= 0 = \{b_i^\dagger, b_j^\dagger\} \\ [a_\alpha, b_i] &= 0 = [a_\alpha, b_i^\dagger] & , & & [a_\alpha^\dagger, b_i] &= 0 = [a_\alpha^\dagger, b_i^\dagger] . \end{aligned} \quad (1.23)$$

Lo spazio  $\mathcal{H}$  dei vettori di stato contiene il vettore di vuoto  $|0\rangle$  che verifica  $a_\alpha |0\rangle = 0 = b_i |0\rangle$ . Tutti gli stati che contengono un numero non nullo di particelle si ottengono applicando ripetutamente gli operatori di creazione  $a_\alpha^\dagger$  e  $b_i^\dagger$  al vettore  $|0\rangle$ ;  $\mathcal{H}$  coincide con il completamento delle combinazioni lineari finite di vettori che descrivono un numero arbitrario ma finito di particelle.

L'interpretazione fisica del formalismo è basata sulla corrispondenza tra i vettori di stato di singola particella e i vettori ottenuti applicando un operatore di creazione al vuoto; l'isomorfismo tra questi due spazi lineari è dato da

$$|\alpha\rangle \iff a_\alpha^\dagger |0\rangle \quad , \quad |i\rangle \iff b_i^\dagger |0\rangle . \quad (1.24)$$

La corrispondenza (1.24) è in accordo con le regole di commutazione. Infatti, siccome i vettori  $\{|\alpha\rangle\}$  formano una base ortonormale, si ha  $\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ . D'altra parte, in base alle relazioni (1.24) e alle equazioni (1.24), si riottiene precisamente  $\langle\alpha|\beta\rangle = \langle 0|a_\alpha a_\beta^\dagger|0\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ .

Le relazioni (1.24) determinano anche le proprietà di trasformazione degli operatori di annichilazione e di creazione in corrispondenza con le trasformazioni che agiscono nello spazio dei vettori di stato di singola particella. Per esempio, alla trasformazione

$$|\alpha\rangle \rightarrow |\gamma\rangle = \sum_{\beta} U_{\gamma\beta} |\beta\rangle , \quad (1.25)$$

ottenuta mediante l'operatore unitario  $U$ , corrisponde l'introduzione di corrispondenti operatori di creazione e annichilazione

$$a_\alpha^\dagger \rightarrow a_\gamma'^\dagger = \sum_{\beta} U_{\gamma\beta} a_\beta^\dagger \quad , \quad a_\alpha \rightarrow a_\gamma' = \sum_{\beta} a_\beta U_{\beta\gamma}^{-1} . \quad (1.26)$$

Analoghe leggi di trasformazione valgono anche per gli operatori di annichilazione e di creazione delle particelle che seguono la statistica di Fermi-Dirac.

La particolare scelta della base  $\{|\alpha\rangle\}$  oppure  $\{|i\rangle\}$  per i vettori di stato di singola particella è totalmente arbitraria. Infatti, se si effettua un cambiamento di base mediante una matrice unitaria —equazione (1.25)—, gli operatori di creazione e di annichilazione nella nuova base —mostrati in equazione (1.26)— soddisfano ancora le regole di commutazione (1.24). La struttura delle regole di commutazione (1.24) e il vettore di vuoto sono invarianti per un cambio di base nello spazio degli stati di singola particella.

**Nota 2.** I numeri quantici che labellano gli stati  $\{|\alpha\rangle\}$  di singola particella corrispondono agli autovalori di osservabili quali, per esempio, la posizione, l'impulso, l'energia, il momento angolare, la massa, lo spin, la carica elettrica, l'iperparica, ecc. Questi numeri quantici descrivono le particolari proprietà delle particelle osservate in Natura. Invece, i numeri quantici che labellano i vettori di  $\mathcal{H}$ , ovvero dei vettori dello spazio di Fock  $\mathcal{H}_F$  —equazione (1.6) oppure (1.16)— sono i numeri interi che corrispondono ai numeri di occupazione degli stati di singola particella; essendo numeri naturali, questi numeri quantici hanno un significato e una struttura universali. Quindi tutta l'informazione sulle particolari caratteristiche delle particelle è contenuta unicamente nell'indice degli operatori di annichilazione e di creazione.

## 2 Variabili di campo

Il concetto di campo, che è stato sviluppato a partire dallo studio della fluidodinamica e dell'elettromagnetismo, si è rivelato molto utile nella descrizione della Natura. Un campo rappresenta un insieme di variabili localizzate nei vari punti dello spazio e del tempo. Le variabili di campo hanno un ruolo importante nella descrizione dei fenomeni naturali perché codificano, nel formalismo che si utilizza, la proprietà di *località* che si osserva nei processi fisici. Il comportamento di un sistema in una limitata zona dello spazio —per esempio, nell'intorno di un punto— è influenzato dai particolari valori dei campi in quel punto. A loro volta, i valori dei campi sono determinati dalle distribuzioni spaziali di opportune sorgenti, che “originano” o influenzano i campi stessi. Questa concatenazione di relazioni tra “sorgenti” e “campi”

sorgenti  $\rightarrow$  valori dei campi  $\rightarrow$  azione locale dei campi sulle sorgenti

è alla base della descrizione di tutti i processi naturali. Un modello tipico che illustra queste relazioni è la teoria dell'elettromagnetismo, in cui i campi elettrici e magnetici influenzano il moto delle cariche elettriche e, contemporaneamente, i valori dei campi sono determinati dalle distribuzioni spaziali delle cariche e delle correnti elettriche.

### 2.1 Campi e particelle

Oltre a implementare la località, le variabili di campo sono anche strettamente connesse con la natura particellare della materia. Questo legame tra i campi e le particelle, che viene brevemente introdotto in questa sezione, verrà successivamente approfondito nei prossimi capitoli. L'argomento che si vuol discutere ora riguarda le equazioni soddisfatte dai campi.

In accordo con l'invarianza per traslazioni spazio-temporali, la località si realizza anche tramite il fatto che l'evoluzione temporale dei campi è descritta da equazioni differenziali alle derivate parziali, non superiori al secondo ordine nelle derivate temporali nel caso di un sistema canonico lagrangiano. Inoltre, per piccole fluttuazioni dei campi —per esempio, attorno ad un determinato valore di contorno o di background— le equazioni si possono linearizzare. Sia allora  $\phi(t, \mathbf{x})$  il campo in questione, tenendo conto della invarianza per trasformazioni di Lorentz, la tipica equazione del moto linearizzata che soddisfa il campo  $\phi(t, \mathbf{x})$  assume per esempio la forma

$$-\frac{\partial^2 \phi(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} + c^2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi(t, \mathbf{x})}{\partial x^j \partial x^j} - \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \phi(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.1)$$

dove  $m$  rappresenta una costante con le dimensioni di una massa e  $c$  denota la velocità della luce. Esprimendo il campo reale  $\phi(t, \mathbf{x})$  in termini delle sue componenti di Fourier,

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar} \tilde{\phi}(t, \mathbf{p}), \quad (2.2)$$

l'equazione (2.1) si può riscrivere come

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}(t, \mathbf{p})}{\partial t^2} = -\frac{c^2}{\hbar^2} (|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2) \tilde{\phi}(t, \mathbf{p}). \quad (2.3)$$

Per ogni valore fissato di  $\mathbf{p}$ , la variabile  $\tilde{\phi}(t, \mathbf{p})$  è complessa, ovvero corrisponde a due componenti reali. Ma siccome  $\tilde{\phi}(t, \mathbf{p})$  soddisfa la relazione  $\tilde{\phi}^*(t, \mathbf{p}) = \tilde{\phi}(t, -\mathbf{p})$ , il conteggio dei gradi di libertà fornisce come risultato una variabile reale per ogni  $\mathbf{p}$ .

Si ricordi che nel caso di un sistema fisico costituito da un insieme di oscillatori armonici disaccoppiati, le cui ampiezze reali sono denotate con  $Q_a(t)$  con  $a = 1, 2, \dots, N$ , le equazioni del moto sono

$$\frac{d^2 Q_a(t)}{dt^2} = -\omega_a^2 Q_a(t), \quad (2.4)$$

dove  $\omega_a$  denota la frequenza angolare dell'oscillatore  $Q_a(t)$ .

Confrontando le equazioni (2.3) e (2.4) si deduce che un campo, che soddisfa l'equazione (2.1), descrive un insieme di un numero infinito di oscillatori armonici disaccoppiati; ad ogni valore di  $\mathbf{p}$  corrisponde un oscillatore armonico. Per ogni valore dell'impulso  $\mathbf{p}$  il corrispondente oscillatore armonico possiede una frequenza angolare  $\omega(\mathbf{p}) = (c/\hbar)(|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2)^{1/2}$ . Si noti che  $\hbar\omega(\mathbf{p}) = c(|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2)^{1/2}$  coincide con l'energia di una particella di massa  $m$  e impulso  $\mathbf{p}$ . La teoria quantistica del campo  $\phi(t, \mathbf{x})$  coincide con la teoria in cui tutti questi oscillatori armonici sono oscillatori quantistici. Per ogni  $\mathbf{p}$  fissato, il corrispondente oscillatore possiede frequenza angolare  $\omega(\mathbf{p}) = (c/\hbar)(|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2)^{1/2}$  e i suoi livelli di energia sono dati da  $E_n(\mathbf{p}) = \hbar\omega(\mathbf{p})(n(\mathbf{p}) + 1/2)$ . Lo spazio degli stati di tutto il sistema coincide con il prodotto tensore degli spazi degli stati dei singoli oscillatori, ed ha precisamente la struttura di uno spazio di Fock.

Riassumendo, l'utilizzo di variabili di campo è utile per descrivere in modo consistente la località dei processi naturali e, abbinato con la struttura quantistica di tutti i fenomeni, implica il manifestarsi delle particelle.



## 2.2 Seconda quantizzazione

Si consideri ora l'insieme delle particelle identiche di un tipo fissato e sia  $\{|\alpha\rangle\}$  una base ortonormale nello spazio dei vettori di stato di singola particella

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad , \quad \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 . \quad (2.5)$$

È possibile labellare gli stati di singola particella per mezzo degli autovalori dell'operatore posizione —per esempio— e di una opportuna componente dello spin, che saranno convenzionalmente indicati con  $\xi$ . Eventualmente, si potrebbe convenire di includere nell'indice  $\xi$  anche ulteriori numeri quantici, senza modificare la struttura delle formule che seguono. I corrispondenti vettori  $\{|\xi\rangle\}$  soddisfano

$$\langle\xi|\xi'\rangle = \delta(\xi - \xi') \quad , \quad \int d\xi |\xi\rangle\langle\xi| = 1 , \quad (2.6)$$

dove il simbolo di integrale in  $\xi$  denota l'integrale spaziale e comprende anche la somma sui valori di una componente dello spin; similmente, il simbolo  $\delta(\xi - \xi')$  denota l'opportuno prodotto di funzioni delta.

La decomposizione del vettore  $|\alpha\rangle$  nella base  $\{|\xi\rangle\}$ ,  $|\alpha\rangle = \int d\xi |\xi\rangle\langle\xi|\alpha\rangle$ , definisce le cosiddette funzioni d'onda  $\psi_{\alpha}(\xi) = \langle\xi|\alpha\rangle$ , che formano una base ortonormale per lo spazio delle funzioni a quadrato sommabile. La funzione d'onda  $\psi(\xi)$ , corrispondente ad un generico vettore, si può scrivere come

$$\psi(\xi) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi) \quad , \quad [\text{similmente, } \psi^*(\xi) = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^* \psi_{\alpha}^*(\xi)] , \quad (2.7)$$

dove i coefficienti  $c_{\alpha}$  sono numeri complessi. La decomposizione del vettore  $|\xi\rangle$  nella base  $\{|\alpha\rangle\}$  assume la forma

$$|\xi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle\langle\alpha|\xi\rangle = \sum_{\alpha} |\alpha\rangle \psi_{\alpha}^*(\xi) . \quad (2.8)$$

L'equazione (2.8) e l'isomorfismo (1.24) permettono di determinare univocamente l'operatore di creazione  $a_{\xi}^{\dagger}$  —e conseguentemente anche l'operatore di annichilazione  $a_{\xi}'$ — per una particella nello stato  $|\xi\rangle$ . L'operatore di annichilazione  $a_{\xi}'$  viene generalmente denotato con  $\widehat{\psi}(\xi)$  mentre l'operatore  $a_{\xi}^{\dagger}$  viene denotato con  $\widehat{\psi}^{\dagger}(\xi)$ ,

$$\widehat{\psi}(\xi) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \psi_{\alpha}(\xi) \quad , \quad \widehat{\psi}^{\dagger}(\xi) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} \psi_{\alpha}^*(\xi) . \quad (2.9)$$

Il confronto delle equazioni (2.9) e (2.7) mostra l'analogia formale esistente tra una generica funzione d'onda  $\psi(\xi)$  e l'operatore  $\widehat{\psi}(\xi)$ . Entrambi  $\psi(\xi)$  e  $\widehat{\psi}(\xi)$  ammettono uno sviluppo in termini delle funzioni d'onda  $\psi_{\alpha}(\xi)$ ; ma mentre nel caso di  $\psi(\xi)$  i coefficienti di tale sviluppo sono numeri, nel caso di  $\widehat{\psi}(\xi)$  i coefficienti dello sviluppo sono operatori. Per questo motivo, l'introduzione degli operatori  $\widehat{\psi}(\xi)$  e  $\widehat{\psi}^{\dagger}(\xi)$  viene anche denotata col nome di seconda quantizzazione. L'utilizzo degli operatori (2.9) in meccanica quantistica è stato discusso per esempio da Landau in referenza [5].

### 2.2.1 Funzioni d'onda orbitali di singola particella

Tra i numeri quantici che labellano gli stati di singola particella il vettore posizione gioca un ruolo fondamentale. Trascurando tutti gli altri numeri quantici —di cui si può facilmente tener conto in seguito— gli autovettori  $|\mathbf{x}\rangle$  dell'operatore posizione soddisfano

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad , \quad \int d^3x |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}| = 1 . \quad (2.10)$$

Sia  $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$  la funzione d'onda dello stato di singola particella che è autofunzione dell'impulso corrispondente all'autovalore  $\mathbf{p}$ . Volendo utilizzare funzioni d'onda normalizzabili, risulta conveniente vincolare la particella —nel sistema di riferimento fissato— entro una regione spaziale cubica di lato  $L$  (e volume  $V = L^3$ ) e successivamente considerare il limite di volume infinito. Allora, la funzione d'onda normalizzata che descrive una particella con impulso  $\mathbf{p}$  assume la forma

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp\left\{i \frac{\mathbf{p}\mathbf{x}}{\hbar}\right\} \quad , \quad (2.11)$$

dove  $\mathbf{p}\mathbf{x} = p^1x^1 + p^2x^2 + p^3x^3$ . L'equazione (2.11) implica, per gli autostati dell'impulso  $|\mathbf{p}\rangle$  e  $|\mathbf{k}\rangle$ , le relazioni

$$\langle\mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle = \hbar^3 \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \quad , \quad \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int d^3p |\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}| = 1 . \quad (2.12)$$

Conseguentemente, in accordo con la corrispondenza (1.24), gli operatori di annichilazione e di creazione di una particella con impulso  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{k}$  devono soddisfare, nel caso di statistica di Bose-Einstein,

$$[a(\mathbf{p}), a^{\dagger}(\mathbf{k})] = \hbar^3 \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) , \quad (2.13)$$

mentre nel caso di statistica di Fermi-Dirac, si ha

$$\{b(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{k})\} = \hbar^3 \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) . \quad (2.14)$$

Dalle relazioni (2.13) e (2.14) segue che gli operatori di annichilazione e di distruzione sono adimensionali.

## 2.3 Covarianza relativistica e operatori di campo

Per mezzo degli operatori di annichilazione e di creazione, si possono definire gli operatori di campo associati ai vari tipi di particelle. Al fine di esprimere la dinamica delle particelle in maniera relativisticamente covariante, risulta conveniente utilizzare operatori di campo con definite proprietà di trasformazione rispetto al gruppo di Poincaré. In particolare, conviene definire operatori di campo che siano locali e che trasformino come tensori irriducibili rispetto al gruppo di Lorentz. In questa sezione, verrà illustrata la costruzione di un operatore di campo locale  $\varphi(x)$  corrispondente ad un tipo fissato di particelle di massa  $m$  e con spin nullo.

### 2.3.1 Notazioni relativistiche

Il simbolo  $x$  denoterà l'insieme delle componenti  $x^\mu$  delle coordinate dei punti dello spazio-tempo (spazio di Minkowski) e  $p$  denoterà l'insieme delle componenti  $p^\mu$  del quadrivettore impulso; inoltre, si useranno le seguenti notazioni [4]

$$x^\mu = (ct, \mathbf{x}) \quad , \quad p^\mu = (E/c, \mathbf{p}) \quad , \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad , \quad (2.15)$$

dove la metrica di Minkowski  $\eta_{\mu\nu}$  è data da

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu} . \quad (2.16)$$

Per una singola particella libera di massa  $m$ , l'energia  $E$  è funzione solamente della componente spaziale  $\mathbf{p}$  dell'impulso della particella ed assume la forma

$$E = E(\mathbf{p}) = c \sqrt{m^2 c^2 + (\mathbf{p})^2} . \quad (2.17)$$

### 2.3.2 Dipendenza dal tempo

La località del campo implica che l'operatore  $\varphi(x)$  debba dipendere esplicitamente dal tempo. Prima di considerare l'evoluzione temporale degli operatori di annichilazione e di distruzione, può essere utile ricordare la dipendenza dalla coordinata temporale delle funzioni d'onda degli stati di singola particella libera. Nel caso in cui ci si limitasse a considerare l'evoluzione temporale —in rappresentazione di Schroedinger— degli stati in  $\mathcal{H}_{(1)}$ , la relazione (2.17) implicherebbe

$$\psi_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp \left\{ i \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{\hbar} - i \frac{E(\mathbf{p}) t}{\hbar} \right\} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i p x / \hbar} , \quad (2.18)$$

dove si è posto

$$p x = p^\mu x_\mu = E(\mathbf{p}) t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} . \quad (2.19)$$

In realtà, nel formalismo della teoria quantistica dei campi, la dipendenza dell'operatore campo  $\varphi(x)$  dal tempo è in accordo con l'utilizzo della rappresentazione di Heisenberg per particelle libere, in cui l'evoluzione temporale riguarda esclusivamente gli operatori della teoria mentre gli stati del sistema non hanno evoluzione temporale.

Sia  $H_0$  l'operatore hamiltoniano che agisce nello spazio degli stati  $\mathcal{H}$  delle particelle del tipo considerato (che hanno spin nullo e massa  $m$ ). Nello spazio degli stati di singola particella, si scelga una base  $\{|\alpha\rangle\}$  in cui ciascun vettore  $|\alpha\rangle$  descrive uno stato con energia definita. Allora, l'hamiltoniana  $H_0$  per particelle libere si ottiene moltiplicando l'operatore numero di occupazione dello stato  $|\alpha\rangle$  per l'energia di una particella nello stato  $|\alpha\rangle$  e sommando su tutti i valori di  $\alpha$ . Ovvero, l'hamiltoniana vale

$$H_0 = \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int d^3 p E(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) . \quad (2.20)$$

Utilizzando l'operatore (2.20), in rappresentazione di Heisenberg la dipendenza dal tempo degli operatori di annichilazione e di distruzione risulta essere

$$\begin{aligned} a(t; \mathbf{p}) &= e^{itH_0/\hbar} a(\mathbf{p}) e^{-itH_0/\hbar} = e^{-iE(\mathbf{p})t/\hbar} a(\mathbf{p}) , \\ a^\dagger(t; \mathbf{p}) &= e^{itH_0/\hbar} a^\dagger(\mathbf{p}) e^{-itH_0/\hbar} = e^{iE(\mathbf{p})t/\hbar} a^\dagger(\mathbf{p}) . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned} a(t; \mathbf{p}) \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= a(\mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i p x / \hbar} = a(\mathbf{p}) \psi_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) , \\ a^\dagger(t; \mathbf{p}) \psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{x}) &= a^\dagger(\mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i p x / \hbar} = a^\dagger(\mathbf{p}) \psi_{\mathbf{p}}^*(t, \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Gli operatori di annichilazione  $\widehat{\psi}(x)$  e di creazione  $\widehat{\psi}^\dagger(x)$  di una particella “situata nel punto  $x$  all’istante  $t$ ”,

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}(x) &= \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int d^3p a(\mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-ipx/\hbar}, \\ \widehat{\psi}^\dagger(x) &= \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int d^3p a^\dagger(\mathbf{p}) \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ipx/\hbar},\end{aligned}\quad (2.23)$$

non trasformano in maniera covariante per trasformazioni di Lorentz.

### 2.3.3 Modalità di trasformazione

Sia  $w$  un quadrivettore di Lorentz di componenti  $w^\mu = (w^0, \mathbf{w})$ . Sotto l’azione del gruppo di Lorentz,  $\delta(w^2) = \delta(w^\mu w_\mu)$ ,  $\delta^4(w)$  e  $d^4w$  sono invarianti, mentre  $\delta(w)$  trasforma come  $1/w^0$  e corrispondentemente  $d^3w$  trasforma come  $w^0$ . In particolare quindi,  $\delta(\mathbf{p})$  trasforma come  $1/E(\mathbf{p})$  e  $d^3p$  trasforma invece come  $E(\mathbf{p})$ . A seguito di una trasformazione di Lorentz, gli operatori  $a(\mathbf{p})$  e  $a^\dagger(\mathbf{p})$  vengono mandati negli operatori corrispondenti alle variabili trasformate; inoltre, dalle regole di commutazione (2.13) segue che la norma degli operatori  $a(\mathbf{p})$  e  $a^\dagger(\mathbf{p})$  trasforma come

$$a(\mathbf{p}) \sim \frac{1}{\sqrt{V E(\mathbf{p})}}, \quad a^\dagger(\mathbf{p}) \sim \frac{1}{\sqrt{V E(\mathbf{p})}}. \quad (2.24)$$

Si consideri ora il comportamento di  $\widehat{\psi}(x)$  per una trasformazione di Lorentz  $x \rightarrow \Lambda x$ . Il fattore di fase  $e^{-ipx/\hbar}$  resta invariato purché si trasformi anche il vettore impulso  $p \rightarrow \Lambda p$ . A seguito delle trasformazioni di Lorentz però, il prodotto  $V d^3p a(\mathbf{p}) (1/\sqrt{V})$  sotto il segno di integrale non risulta invariante, ma trasforma come  $\sqrt{E(\mathbf{p})}$ . Conseguentemente,  $\widehat{\psi}(x)$  non trasforma come uno scalare (e nemmeno come un tensore irriducibile non banale). Per avere covarianza relativistica occorrerebbe, per esempio, introdurre un fattore correttivo  $1/\sqrt{E(\mathbf{p})}$  negli integrali che compaiono nelle espressioni (2.23).

### 2.3.4 Operatore di campo scalare reale

Per un tipo fissato di particelle libere, di massa  $m$  e spin nullo, il corrispondente operatore di campo locale  $\varphi(x)$  è definito dalla seguente relazione

$$\varphi(x) = \frac{V}{\hbar^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\hbar}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ a(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx/\hbar}}{\sqrt{V}} + a^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{V}} \right\}. \quad (2.25)$$

Per trasformazioni di Lorentz, l’operatore  $\varphi(x)$  trasforma come uno scalare; inoltre, si ha  $\varphi(x) = \varphi^\dagger(x)$  e per questo motivo  $\varphi(x)$  è anche denotato col nome di campo scalare reale. Per determinare le dimensioni  $[\varphi(x)]$  dell’operatore campo, è utile notare che il fattore  $V d^3p / \hbar^3$  è adimensionale. Ricordando che anche gli operatori di creazione e di annichilazione sono adimensionali, si ottiene  $[\varphi(x)] = (M^{1/2}L)/(L^{3/2}) = M^{1/2}/L^{1/2}$ . Con questa normalizzazione, l’integrale  $\int d^3x (\partial\varphi(x)/\partial t)^2$  ha le dimensioni di un’energia.

La struttura dell’operatore di campo mostrata in equazione (2.25) è generale e si mantiene sostanzialmente inalterata anche per campi spinoriali e vettoriali, che sono associati a particelle rispettivamente con spin 1/2 e con spin 1. In genere, per ciascun tipo di particella si introduce il corrispondente operatore di campo.

## 2.4 Evoluzione temporale e dinamica

L’operatore di campo  $\varphi(x)$  mostrato in equazione (2.25) si riferisce a particelle libere ed è definito in rappresentazione di Heisenberg poiché soddisfa

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{itH_0/\hbar} \varphi(0, \mathbf{x}) e^{-itH_0/\hbar} \quad (\text{rappres. di Heisenberg}), \quad (2.26)$$

dove  $H_0$  rappresenta l’operatore hamiltoniano (2.20). In questo schema, gli stati del sistema non subiscono evoluzione temporale.

**Nota 3.** Due sistemi fisici interagiscono tra loro quando, variando lo stato del primo sistema, si può modificare l’evoluzione del secondo sistema e/o viceversa; ovvero, uno dei sistemi influenza l’evoluzione dell’altro. In Natura si osserva che, aumentando la distanza relativa tra due sistemi localizzati in regioni spaziali finite, gli effetti osservabili delle mutue interazioni possono essere resi piccoli a piacere e, nel limite in cui questi effetti siano trascurabili, i due sistemi sono detti liberi. Similmente, si utilizza il concetto di particelle libere per designare il comportamento delle particelle realmente osservate in Natura —che sono quindi necessariamente particelle interagenti— nella situazione ideale in cui gli effetti delle interazioni siano trascurabili.

Quando si tiene conto dell’interazione tra le particelle, l’hamiltoniana  $H$  del sistema ha una struttura generalmente molto più complicata di quella dell’hamiltoniana libera  $H_0$ . In presenza di interazioni tra le particelle, risolvere esplicitamente l’equazione (2.26) —ovvero determinare la soluzione delle equazioni del moto per gli operatori di campo— rappresenta un problema estremamente complicato di cui, in generale, non si conosce soluzione. Risulta allora conveniente abbandonare la rappresentazione di Heisenberg e utilizzare la cosiddetta rappresentazione di interazione,

nella quale gli operatori di campo presentano sempre la struttura (2.25) di campi liberi. Il formalismo della rappresentazione di interazione descrive in maniera naturale i processi elementari tra le particelle.

L'hamiltoniana totale  $H$  del sistema è generalmente decomposta nella somma di due termini,

$$H = H_0 + \tilde{H}, \quad (2.27)$$

in cui  $H_0$  rappresenta l'hamiltoniana per particelle libere, cioè l'hamiltoniana in assenza di interazioni, e  $\tilde{H}$  descrive le interazioni tra le particelle. Nella rappresentazione di interazione, l'evoluzione temporale è distribuita in maniera opportuna tra operatori e vettori di stato e riguarda sia gli operatori che gli stati del sistema.

### 2.4.1 Rappresentazione d'interazione

La connessione tra la rappresentazione di Heisenberg e la rappresentazione di interazione si può illustrare considerando l'elemento di matrice di un generico operatore  $\mathcal{O}$  all'istante  $t$  tra gli stati  $|A\rangle$  e  $|B\rangle$ . Si denoti con  $\mathcal{O}_H(t)$  l'operatore in rappresentazione di Heisenberg e con  $\mathcal{O}_I(t)$  l'operatore in rappresentazione di interazione; allora si ha

$$\begin{aligned} \langle B | \mathcal{O}_H(t) | A \rangle &= \langle B | e^{itH/\hbar} \mathcal{O} e^{-itH/\hbar} | A \rangle \\ &= \langle B | e^{itH/\hbar} e^{-itH_0/\hbar} \left( e^{itH_0/\hbar} \mathcal{O} e^{-itH_0/\hbar} \right) e^{itH_0/\hbar} e^{-itH/\hbar} | A \rangle \\ &= \langle B(t) | \mathcal{O}_I(t) | A(t) \rangle, \end{aligned} \quad (2.28)$$

dove si è posto

$$\mathcal{O}_I(t) = e^{itH_0/\hbar} \mathcal{O} e^{-itH_0/\hbar}, \quad (2.29)$$

$$|A(t)\rangle = e^{itH_0/\hbar} e^{-itH/\hbar} |A\rangle = U(t, 0) |A\rangle. \quad (2.30)$$

Come mostrato nelle equazioni (2.29) e (2.30), nella rappresentazione di interazione sia gli operatori che i vettori di stato dipendono dal tempo. Per quanto riguarda gli operatori, la loro dipendenza dal tempo coincide con la dipendenza dal tempo nella rappresentazione di Heisenberg nel caso in cui l'hamiltoniana sia quella libera. Questo significa che, in rappresentazione di interazione, gli operatori campo assumono la forma (2.25) degli operatori campo relativi a particelle libere.

### 2.4.2 Ordinamento cronologico

Si consideri ora l'operatore  $U(t, 0)$ ,

$$U(t, 0) = e^{itH_0/\hbar} e^{-itH/\hbar}, \quad (2.31)$$

che appare in equazione (2.30) e che determina l'evoluzione temporale dei vettori di stato. Derivando  $U(t, 0)$  rispetto al parametro  $t$ , si ottiene

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dU(t, 0)}{dt} &= e^{itH_0/\hbar} (H - H_0) e^{-itH/\hbar} = e^{itH_0/\hbar} \tilde{H} e^{-itH/\hbar} \\ &= \left( e^{itH_0/\hbar} \tilde{H} e^{-itH_0/\hbar} \right) e^{itH_0/\hbar} e^{-itH/\hbar} \\ &= \tilde{H}_I(t) U(t, 0). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Si ha inoltre

$$U(0, 0) = 1. \quad (2.33)$$

Le equazioni (2.32) e (2.33) determinano univocamente  $U(t, 0)$ , che si può anche ottenere integrando direttamente l'equazione (2.32) tenendo conto della condizione iniziale (2.33). Il risultato è

$$U(t_2, t_1) = T_D \exp \left[ - (i/\hbar) \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{H}_I(t) \right], \quad (2.34)$$

dove il simbolo  $T_D$  denota l'ordinamento cronologico (detto di Dyson), ovvero l'ordinamento —nel parametro temporale— degli operatori che compaiono nell'espressione (2.34). Nell'ordinamento cronologico, all'aumentare del parametro temporale gli operatori vanno posti a sinistra, in accordo con l'equazione (2.32); per esempio, si ha

$$T_D \left[ \tilde{H}_I(t) \tilde{H}_I(t') \right] = \theta(t - t') \tilde{H}_I(t) \tilde{H}_I(t') + \theta(t' - t) \tilde{H}_I(t') \tilde{H}_I(t). \quad (2.35)$$

L'espressione (2.34) ammette uno sviluppo in potenze di  $\tilde{H}_I(t)$  che si ottiene considerando lo sviluppo di Taylor dell'esponenziale e facendo agire —su ciascun termine così ottenuto— l'ordinamento cronologico.

### 2.4.3 Ampiezze di transizione

Come mostrato in equazione (2.30), l'evoluzione temporale degli stati del sistema è implementata dall'operatore (2.34). Le quantità che vengono effettivamente misurate negli esperimenti sono le probabilità di transizione tra gli stati iniziali e quelli finali. A causa della località delle interazioni, i processi di misura degli apparati sperimentali generalmente coinvolgono intervalli temporali molto maggiori dei tempi di interazione tra le particelle. Per questo motivo, gli stati iniziali possono venir identificati con gli stati asintotici del sistema al tempo  $t = -\infty$  mentre gli stati finali si possono

rappresentare per mezzo degli stati asintotici del sistema a tempo  $t = +\infty$ . Quindi, le ampiezze di transizione che occorre calcolare —per poter effettuare un confronto significativo coi dati sperimentali— sono

$$U_{BA} = \langle B | U(+\infty, -\infty) | A \rangle, \quad (2.36)$$

in cui

$$U(+\infty, -\infty) = T_D \exp \left[ -(i/\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \tilde{H}_I(t) \right]. \quad (2.37)$$

Per descrivere la dinamica delle particelle elementari occorre perciò specificare (o determinare) l'hamiltoniana d'interazione  $\tilde{H}_I(t)$ . L'operatore  $\tilde{H}_I(t)$ , che deve essere espresso in rappresentazione di interazione, è in generale una funzione o, più propriamente, un funzionale degli operatori di campo (in rappresentazione di interazione) associati ai vari tipi di particelle.

### Esercizio 1. Decadimento particella scalare

È utile presentare un esempio, di natura puramente illustrativa, sull'utilizzo degli operatori di campo per descrivere le interazioni tra le particelle. Si assuma che esistano tre diversi tipi di particelle con spin nullo —particelle di tipo  $a$ ,  $b$  e  $c$ — dotate di masse  $m_a$ ,  $m_b$  e  $m_c$ . Si assuma inoltre che in Natura si osservi il decadimento

$$a \rightarrow b + c \quad (2.38)$$

Per ogni tipo di particella si introduce un operatore di campo scalare,  $\varphi_a(x)$ ,  $\varphi_b(x)$  e  $\varphi_c(x)$ , ciascuno dei quali ha la struttura mostrata in equazione (2.25). A questo punto occorre determinare la forma dell'hamiltoniana di interazione che risulta rilevante per descrivere il decadimento (2.38). In generale, la soluzione di questo problema non è nota a priori. Si possono allora formulare ipotesi —più o meno plausibili— e proporre una possibile forma per l'hamiltoniana di interazione con la quale calcolare l'ampiezza di transizione e fare il confronto coi dati sperimentali. Si assuma, per esempio, che  $\tilde{H}_I(t)$  sia

$$\tilde{H}_I(t) = (gc/\hbar) \int d^3x \varphi_a(x) \varphi_b(x) \varphi_c(x), \quad (2.39)$$

dove il parametro reale  $g$  ha dimensione  $[g] = M^{1/2} L^{3/2} / T^2$ . In generale, il parametro che moltiplica l'hamiltoniana di interazione viene denotato col nome di costante di accoppiamento poiché determina in qualche modo l'intensità dell'interazione tra le particelle. Facendo uno sviluppo di Taylor in potenze di  $g$  dell'operatore (2.37) e limitandoci al primo ordine nella

costante di accoppiamento, si ottiene

$$\begin{aligned} U(+\infty, -\infty) &= T_D \exp \left[ -(i/\hbar) \int_{-\infty}^{+\infty} dt \tilde{H}_I(t) \right] = \\ &= 1 - \frac{ig}{\hbar^2} \int d^4x T^* [\varphi_a(x) \varphi_b(x) \varphi_c(x)] + \dots \\ &= 1 - \frac{ig}{\hbar^2} \int d^4x \varphi_a(x) \varphi_b(x) \varphi_c(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.40)$$

Si noti che l'ordinamento cronologico agisce in maniera banale sugli operatori del termine lagrangiano  $\varphi_a(x) \varphi_b(x) \varphi_c(x)$  poiché questi operatori sono definiti a tempi uguali e quindi commutano tra loro.

Si denoti con  $k_a$  il quadrimpulso della particella di tipo  $a$  che decade e con  $k_b$  e  $k_c$  i quadrimpulsi delle particelle di tipo  $b$  e di tipo  $c$  prodotte. I vettori normalizzati corrispondenti agli stati iniziale e finale sono

$$|\text{in}\rangle = |k_a\rangle = a_a^\dagger(k_a) |0\rangle, \quad \langle \text{out}| = \langle k_b, k_c| = \langle 0| a_b(k_b) a_c(k_c). \quad (2.41)$$

Pertanto l'ampiezza di decadimento  $A(k_b, k_c; k_a)$ , al primo ordine nella costante di accoppiamento, risulta determinata da

$$\begin{aligned} A(k_b, k_c; k_a) &= \langle k_b, k_c| U(+\infty, -\infty) |k_a\rangle = \\ &= -\frac{ig}{\hbar^2} \int d^4x \langle 0| a_b(k_b) a_c(k_c) \varphi_a(x) \varphi_b(x) \varphi_c(x) a_a^\dagger(k_a) |0\rangle. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Utilizzando la forma esplicita (2.25) dell'operatore di campo scalare e le regole di commutazione degli operatori di annichilazione e di creazione, si ottiene

$$A(k_b, k_c; k_a) = -i \frac{g \hbar^5 (2\pi)^4 \delta^4(k_a - k_b - k_c)}{V^{3/2} \sqrt{2E_a} \sqrt{2E_b} \sqrt{2E_c}}. \quad (2.43)$$

La probabilità di transizione è data dal modulo quadro dell'ampiezza. In questo contesto, si utilizza la relazione

$$[(2\pi)^4 \delta^4(k_a - k_b - k_c)]^2 = (2\pi)^4 \delta^4(k_a - k_b - k_c) (VT/\hbar^4), \quad (2.44)$$

dove  $VT$  denota il quadrivolume (volume spaziale per intervallo temporale). La somma sugli stati finali del modulo quadro dell'ampiezza va effettuata rispetto alla densità di stati che, per singola particella, vale

$$\text{densità di stati} = \frac{V}{(2\pi)^3 \hbar^3} \int d^3p, \quad (2.45)$$

in accordo con l'equazione (2.12); si veda anche l'equazione (5.8).

La probabilità di decadimento  $d\Gamma$  per unità di tempo, nel sistema di riposo della particella che decade, assume la forma

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{T} |A(k_b, k_c; k_a)|^2 \frac{V^2}{(2\pi)^6 \hbar^6} d^3k_b d^3k_c = \\ &= \delta(m_a c^2 - E_b - E_c) \delta(\mathbf{k}_b + \mathbf{k}_c) \frac{g^2}{32\pi^2 m_a} \frac{d^3k_b}{E_b} \frac{d^3k_c}{E_c}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'espressione (2.46), che corrisponde ad una distribuzione isotropa per i prodotti di decadimento, deve essere confrontata coi dati sperimentali. Se le previsioni teoriche non sono in accordo con gli esperimenti, occorre modificare l'espressione della hamiltoniana di interazione. In caso di accordo con gli esperimenti, si può determinare sperimentalmente il valore, per esempio, della costante di accoppiamento. Si assuma che il processo (2.38) risulti ben descritto dall'hamiltoniana (2.39).

Integrando l'espressione (2.46) si ricava la cosiddetta larghezza di decadimento

$$\Gamma = \int d\Gamma = \frac{g^2}{32\pi^2 m_a} \int \frac{d^3k_b}{E_b E_c} \delta(m_a c^2 - E_b - E_c). \quad (2.47)$$

Sia  $\mathbf{k}$  il valore dell'impulso della particella di tipo  $b$  prodotta nel decadimento. Naturalmente, la conservazione dell'impulso implica che  $-\mathbf{k}$  è il valore dell'impulso della particella di tipo  $c$  prodotta nel decadimento. La funzione delta di conservazione dell'energia si può esprimere come

$$\delta(m_a c^2 - E_b - E_c) = \frac{E_b E_c}{m_a c^4 |\mathbf{k}|} \delta(|\mathbf{k}_b| - |\mathbf{k}|), \quad (2.48)$$

per cui l'espressione (2.47) conduce al risultato finale [10]

$$\Gamma = \frac{g^2 |\mathbf{k}|}{8\pi (m_a c^2)^2}, \quad (2.49)$$

dove  $|\mathbf{k}|$  è il modulo dell'impulso di uno dei prodotti di decadimento

$$|\mathbf{k}| = \frac{c}{2m_a} (m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 - 2m_a^2 m_b^2 - 2m_a^2 m_c^2 - 2m_b^2 m_c^2)^{1/2}. \quad (2.50)$$

$\Gamma$  ha le dimensioni dell'inverso di un tempo; nel caso in cui il processo (2.38) rappresenti l'unico canale di decadimento della particella di tipo  $a$ , l'inverso di  $\Gamma$  corrisponde alla vita media della particella  $a$ .

Allora, per semplificare le notazioni, nelle espressioni delle grandezze fisiche si può omettere di indicare esplicitamente la dipendenza da  $\hbar$  e da  $c$ . In questo modo, la dimensione  $[A]$  di ogni quantità fisica  $A$  risulta apparentemente modificata e assume convenzionalmente la forma di una potenza di una energia (oppure di una massa),  $[A] = (\text{energia})^n$ . Alcuni esempi di "dimensioni" —in questa convenzione delle cosiddette unità naturali— sono riportati nella seguente tabella.

$A$	$[A] = (\text{energia})^n$	$n$
massa		1
energia		1
impulso		1
velocità		0
azione		0
lunghezza		-1
tempo		-1

In relazione con la tipica scala di energia che appare nella fisica delle particelle elementari, sovente l'energia si esprime in MeV. Per riottenere i valori delle varie quantità fisiche nelle usuali unità di misura, occorre introdurre un fattore moltiplicativo contenente le opportune potenze di  $\hbar$  e di  $c$ . I valori numerici di alcuni fattori di conversione sono qui riportati.

velocità della luce	$c$	$2.997 \times 10^{10}$ cm / sec
costante di Planck ridotta	$\hbar$	$6.582 \times 10^{-22}$ MeV sec
costante di conversione	$\hbar c$	$197.327 \times 10^{-12}$ MeV cm

## 2.5 Unità di misura naturali

Risulta conveniente utilizzare un sistema di unità di misura nel quale la costante di Planck ridotta  $\hbar$  e la velocità della luce  $c$  assumono il valore unitario

$$\hbar = 1, \quad c = 1.$$

### 3 Principio d'azione

In questo capitolo si introducono le basi della teoria dei campi e viene discusso il teorema di Noether. Il formalismo lagrangiano basato sul principio di minima azione è particolarmente utile per descrivere la corrispondenza tra le proprietà di simmetria di un sistema fisico e le corrispondenti leggi di conservazione; in effetti, esso rappresenta anche il punto di partenza della cosiddetta quantizzazione canonica. Inoltre il funzionale d'azione ha un ruolo fondamentale in meccanica quantistica poiché permette di collegare in maniera diretta il comportamento quantistico dei sistemi fisici col principio di sovrapposizione.

#### 3.1 Teorie di campo

Ciascuna teoria di campo è un modello matematico per mezzo del quale si descrive la dinamica di un opportuno sistema fisico —che possiede infiniti gradi di libertà— le cui variabili possono essere codificate per mezzo di un campo o di un insieme di campi che saranno denotati semplicemente con  $\Phi(x)$ . Nelle applicazioni delle teorie di campo alla fisica delle particelle elementari, generalmente si assume —per essere in accordo coi dati sperimentali— che la dinamica sia locale e relativisticamente covariante.

##### 3.1.1 Covarianza relativistica dei campi

Ogni campo  $\Phi(x)$  è caratterizzato dalla legge di trasformazione che specifica come esso viene modificato per effetto di un cambiamento del sistema di coordinate. Per trasformazioni del gruppo di Poincaré, le coordinate trasformano come

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (3.1)$$

dove  $\{a^\mu\}$  sono i parametri di traslazione e  $\Lambda^\mu{}_\nu$  è la matrice che rappresenta una trasformazione di Lorentz. Un campo  $\Phi(x)$  ha in genere varie componenti che saranno indicate con  $\{\Phi_\alpha(x)\}$ . Per effetto della trasformazione (3.1), il campo viene modificato nel modo seguente

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x'), \quad (3.2)$$

dove

$$\Phi'_\alpha(x') = R(\Lambda)_\alpha{}^\beta \Phi_\beta(x(x')) \quad , \quad x^\mu(x') = [\Lambda^{-1}]^\mu{}_\nu (x' - a)^\nu, \quad (3.3)$$

e la matrice  $R(\Lambda)_\alpha{}^\beta$  corrisponde ad una rappresentazione lineare —generalmente di dimensione finita— del gruppo di Lorentz. Le componenti irriducibili di questa rappresentazione descrivono le componenti irriducibili dei campi. Per esempio, un campo scalare  $\varphi(x)$  trasforma come

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x') = \varphi(x(x')), \quad (3.4)$$

mentre per un campo vettoriale  $B_\mu(x)$  si ha

$$B_\mu(x) \rightarrow B'_\mu(x') = \Lambda_\mu{}^\nu B_\nu(x(x')). \quad (3.5)$$

##### 3.1.2 Azione

In un modello lagrangiano, la dinamica è descritta dalla azione  $S$  che è una funzione dei campi,  $S = S[\Phi]$ . Il principio di azione stazionaria determina le equazioni del moto

$$\frac{\delta S[\Phi]}{\delta \Phi(x)} = 0 \quad , \quad (\text{equazioni del moto}). \quad (3.6)$$

La località della dinamica significa che le equazioni del moto (3.6) sono locali, cioè coinvolgono i campi  $\Phi(x)$  definiti in un solo punto e le loro derivate di ordine finito. Ad eccezione di alcuni casi piuttosto particolari, la località implica che l'azione assuma la forma

$$S[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x) = \int d^4x \mathcal{L}(\Phi(x)) \quad , \quad (3.7)$$

in cui la densità lagrangiana  $\mathcal{L}(\Phi(x))$  è una funzione locale dei campi e delle loro derivate di ordine finito. In molte situazioni,  $\mathcal{L}(\Phi(x))$  è un polinomio dei campi e delle loro derivate prime. La covarianza relativistica —che verrà sempre assunta nel seguito— significa che le equazioni del moto (3.6) sono covarianti per trasformazioni del gruppo di Poincaré. Questo implica che la densità lagrangiana  $\mathcal{L}(\Phi(x))$  debba essere uno scalare per trasformazioni di Lorentz.

Quando il campo  $\Phi(x)$  rappresenta variabili indipendenti in ogni punto dello spazio-tempo e non necessariamente soddisfa le equazioni del moto, il campo  $\Phi(x)$  è detto *off-shell*. Quando invece si assume che i valori del campo  $\Phi(x)$  siano limitati alle soluzioni —o a particolari soluzioni— delle equazioni del moto, il campo  $\Phi(x)$  è detto *on-shell*. Come in tutti i principi variazionali, l'azione  $S[\Phi]$  è una funzione del campo off-shell  $\Phi(x)$ . Nel derivare le equazioni del moto (3.7), i campi sono considerati off-shell e generalmente si assume che i campi tendano a zero all'infinito

in maniera sufficientemente rapida in modo tale che, nell'integrale (3.7), qualunque derivata parziale nelle variabili  $x$  si possa integrare per parti.

Nelle teorie classiche dei campi, i campi corrispondono a variabili classiche e lo studio della dinamica del sistema consiste nella ricerca di soluzioni delle equazioni del moto (3.7) e nello studio delle loro proprietà.

### 3.1.3 Teorie quantistiche dei campi

Nelle teorie quantistiche dei campi si distinguono solitamente due aspetti; quello classico e quello quantistico. Inizialmente si può immaginare che l'azione sia definita per campi classici  $\Phi(x)$ . Successivamente, in accordo con la procedura standard della cosiddetta quantizzazione canonica, vengono introdotti gli operatori di campo —che sono generalmente indicati con lo stesso simbolo  $\Phi(x)$ — e si studiano le proprietà della corrispondente teoria quantistica. Questo modo di procedere non ha un significato intrinseco assoluto ma può risultare conveniente per definire la teoria. Non tutte le teorie classiche di campo ammettono una versione quantistica consistente; questo punto verrà discusso in seguito.

### 3.1.4 Lagrangiana di interazione

Per determinare le ampiezze di transizione tra stati asintotici del sistema fisico, nelle teorie quantistiche dei campi sovente si utilizzano gli operatori di campo in rappresentazione di interazione e, similmente, le osservabili vengono calcolate per mezzo della teoria delle perturbazioni. In questi casi, risulta conveniente scomporre l'azione nella somma di due parti

$$S = S_0 + S_I = \int d^4x \mathcal{L}_0(\Phi(x)) + \int d^4x \mathcal{L}_I(\Phi(x)) . \quad (3.8)$$

La cosiddetta lagrangiana libera  $\mathcal{L}_0(\Phi(x))$  è una funzione quadratica dei campi (e delle loro derivate); nel caso in cui  $S_I = 0$  e quindi  $S = S_0$ , il modello descrive particelle libere ovvero particelle non interagenti. La parte rimanente della lagrangiana  $\mathcal{L}_I(\Phi(x))$  è chiamata la lagrangiana di interazione. Generalmente,  $\mathcal{L}_I(\Phi(x))$  è un polinomio contenente termini cubici e/o quartici nei campi e descrive i processi di interazione tra le particelle.

È importante notare che la decomposizione (3.8) della lagrangiana totale  $\mathcal{L}$  in parte libera e parte interagente,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$ , può non essere univoca. Infatti, la somma di un campo scalare  $\varphi(x)$  con una costante non nulla  $v$  rappresenta un altro campo scalare,  $\varphi(x) + v = \varphi'(x)$ . Quindi l'affermazione che  $\mathcal{L}_0$  corrisponde alla parte di

$\mathcal{L}$  che è quadratica nei campi è ben definita qualora si specificino univocamente le eventuali costanti additive per i campi scalari.

Nella definizione e nello studio di ogni teoria quantistica di campo, i ruoli di  $S_0$  e di  $S_I$  sono:

1. L'azione libera  $S_0$  specifica quali tipi di particelle sono descritti dal modello e fissa i valori delle masse e dello spin di queste particelle. Infatti, le soluzioni classiche delle equazioni del moto —che derivano da  $S_0$ — rappresentano le funzioni d'onda per gli stati di singola particella. Insieme con gli operatori di creazione e di distruzione delle particelle, queste funzioni d'onda determinano la forma degli operatori di campo in rappresentazione di interazione.
2. La lagrangiana di interazione  $\mathcal{L}_I(\Phi(x))$ , nella quale i campi classici sono stati rimpiazzati dagli operatori di campo in rappresentazione di interazione —che sono stati definiti nel punto precedente—, si utilizza per calcolare le ampiezze di transizione nei vari processi tra le particelle.

### 3.1.5 T-prodotto

Nel precedente capitolo, l'operatore di evoluzione temporale (2.37) tra gli stati asintotici è stato definito mediante l'hamiltoniana di interazione e l'ordinamento cronologico di Dyson  $T_D$ , la cui azione sugli operatori è descritta in equazione (2.35). Benché l'espressione (2.37) non sia manifestamente covariante, i risultati che si ottengono per mezzo dell'equazione (2.36) sono relativisticamente covarianti. Per mantenere manifesta la covarianza relativistica, risulta allora conveniente utilizzare, insieme con un nuovo ordinamento cronologico, la lagrangiana di interazione al posto della hamiltoniana di interazione.

Il nuovo ordinamento cronologico degli operatori di campo, che verrà utilizzato da ora in poi, sarà denotato col nome di T-prodotto, o prodotto T-ordinato. Il T-prodotto di due operatori di campo  $\Phi$  vale

$$T[\Phi_\alpha(x) \Phi_\beta(y)] \equiv \theta(x^0 - y^0) \Phi_\alpha(x) \Phi_\beta(y) + (-1)^\eta \theta(y^0 - x^0) \Phi_\beta(y) \Phi_\alpha(x) , \quad (3.9)$$

in cui  $\eta = 0$  tranne quando entrambi i campi assumono valori che sono descritti da variabili anticommutanti, nel qual caso  $\eta = 1$ . Mentre il T-prodotto delle derivate degli operatori di campo è definito essere

$$T \left[ \frac{\partial \Phi_\alpha(x)}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi_\beta(y)}{\partial y^\nu} \right] \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu} T[\Phi_\alpha(x) \Phi_\beta(y)] . \quad (3.10)$$



Si noti la differenza tra le equazioni (3.10) e (2.35) nel caso in cui almeno una delle derivate riguardi la variabile temporale. In generale, tutte le derivate spaziotemporali che agiscono sugli operatori di campo  $\Phi$  —che appartengono ad un prodotto T-ordinato— sono interpretate, per definizione, come derivate che agiscono sul T-prodotto degli stessi operatori non derivati. A volte, il T-prodotto viene chiamato ordinamento cronologico di Wick e viene indicato tramite  $T_W$ .

### 3.1.6 Evoluzione temporale

Utilizzando il prodotto T-ordinato degli operatori di campo, l'operatore di evoluzione temporale tra stati asintotici assume la forma

$$U(+\infty, -\infty) = T \exp \left( +i \int d^4x \mathcal{L}_I(\Phi(x)) \right). \quad (3.11)$$

Siccome i valori medi sul vuoto del T-prodotto dei campi sono relativisticamente covarianti e siccome  $\mathcal{L}_I(\Phi(x))$  trasforma come uno scalare, l'espressione (3.11) risulta essere invariante per trasformazioni di Lorentz [1, 9]. Conseguentemente, in ogni processo in cui il sistema effettua una transizione quantistica tra uno stato iniziale ed uno stato finale, tutti i numeri quantici relativi alla simmetria di Lorentz sono conservati, in completo accordo coi dati sperimentali.

Quando la lagrangiana di interazione è un polinomio dei campi e non contiene derivate rispetto al tempo dei campi, le espressioni (3.11) e (2.37) sono manifestamente equivalenti; mentre nel caso in cui  $\mathcal{L}_I(\Phi(x))$  contenga derivate rispetto al tempo dei campi, la dimostrazione dell'equivalenza delle espressioni (2.37) e (3.11) è non banale; questo argomento è stato discusso per esempio da Itzykson e Zuber [14].

## 3.2 Teorema di Noether

In teoria dei campi le variabili dinamiche sono rappresentate dai campi  $\Phi(x)$ . Conseguentemente tutte le trasformazioni di simmetria si possono esprimere esclusivamente in termini di modificazioni dei campi. Si consideri per esempio una trasformazione infinitesima

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \theta \Delta\Phi(x), \quad (3.12)$$

in cui  $\Delta\Phi(x)$  è una funzione locale dei campi e delle loro derivate di ordine finito e la variabile reale  $\theta$  rappresenta il parametro infinitesimo della trasformazione. Se il parametro  $\theta$  non dipende dalle coordinate  $x^\mu$  dei punti dello spazio-tempo, il parametro  $\theta$  è detto essere una variabile globale.

**Teorema 1 (Teorema di Noether).** *Se l'azione  $S[\Phi]$  è invariante per trasformazioni infinitesime (3.12) solo nel caso in cui  $\theta$  sia una variabile globale, allora tra le variabili del sistema esiste una corrente conservata  $J^\mu(x)$ ,*

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (3.13)$$

*La corrente  $J^\mu(x)$  è un campo locale che è funzione degli operatori di campo  $\Phi(x)$  e delle loro derivate; inoltre,  $J^\mu(x)$  è un campo vettoriale rispetto all'indice di Lorentz  $\mu$ .*

Dimostrazione. L'affermazione che il funzionale d'azione è invariante per le trasformazioni (3.12) significa che, senza far uso delle equazioni del moto —ovvero per campi classici off-shell— lo sviluppo di  $S[\Phi + \theta \Delta\Phi]$  in potenze di  $\theta$  non contiene il termine lineare in  $\theta$

$$S[\Phi + \theta \Delta\Phi] = S[\Phi] + O(\theta^2). \quad (3.14)$$

Come al solito, nella derivazione della relazione (3.14) si assume che i campi tendano a zero all'infinito in maniera sufficientemente rapida in modo tale che qualunque derivata parziale si possa integrare per parti. Si consideri ora una nuova trasformazione dei campi che si ottiene dalla relazione (3.12) sostituendo il parametro globale  $\theta$  con una funzione arbitraria  $\theta(x)$  delle coordinate dello spazio-tempo

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \theta(x) \Delta\Phi(x). \quad (3.15)$$

Al primo ordine in  $\theta(x)$ , la variazione dell'azione vale

$$\Delta S = \int d^4x \theta(x) \Delta\Phi(x) \frac{\delta S}{\delta\Phi(x)}, \quad (3.16)$$

e si ha  $\Delta S \neq 0$  per ipotesi. Si consideri il calcolo esplicito di  $\Delta S$ ; se si trascurassero tutte le derivate che agiscono sulla funzione  $\theta(x)$  allora, in accordo con l'equazione (3.14), si otterrebbe il risultato nullo  $\Delta S = 0$ . Questo significa che  $\Delta S$  deve dipendere dalle derivate della funzione  $\theta(x)$ . In effetti, almeno una derivata deve agire sulla funzione  $\theta(x)$ ; pertanto,  $\Delta S$  assume necessariamente la forma seguente

$$\Delta S = - \int d^4x \partial_\mu \theta(x) J^\mu(x) = \int d^4x \theta(x) \partial_\mu J^\mu(x), \quad (3.17)$$

dove  $J^\mu(x)$  è una funzione locale dei campi  $\Phi(x)$  e delle loro derivate. Per covarianza relativistica,  $J^\mu(x)$  deve trasformare come un campo vettoriale rispetto all'indice  $\mu$ .

Le variabili del sistema quantistico sono definite tramite gli operatori di campo  $\Phi(x)$  che soddisfano le equazioni del moto. Quando valgono le equazioni del moto (3.6), l'equazione (3.16) mostra che la quantità  $\Delta S$  deve annullarsi per qualunque scelta della funzione  $\theta(x)$ . D'altra parte,  $\Delta S$  è data dall'espressione (3.17); pertanto, quando valgono le equazioni del moto —ovvero per gli operatori di campo on-shell—, la corrente  $J^\mu(x)$  è conservata. Questo conclude la dimostrazione. ■

### 3.2.1 Carica conservata

La carica globale  $Q$  —che è associata alla corrente definita dal teorema di Noether— si ottiene integrando nello spazio la componente temporale della corrente

$$Q = \int d^3x J^0(x), \quad (3.18)$$

e rappresenta una quantità conservata,  $dQ/dt = 0$ . L'operatore carica (3.18) è ben definito quando la simmetria (3.12) a cui si riferisce non subisce rottura spontanea. Normalmente, lo stato fondamentale del sistema è invariante per trasformazioni di simmetria che lasciano invariata l'azione. Tuttavia, in certi modelli di teoria di campo, può succedere che lo stato fondamentale non sia invariante per trasformazioni di simmetria che lasciano invariata l'azione; in questo caso si verifica una rottura spontanea di simmetria, e la corrispondente espressione (3.18) è affetta da divergenze infrarosse. Questo argomento verrà discusso nei capitoli seguenti.

Il segno della corrente che appare in equazione (3.17) è stato scelto in modo tale che, utilizzando le convenzioni standard in meccanica quantistica per quanto riguarda il commutatore tra una variabile  $q$  ed il suo momento coniugato  $p$ , ( $[q, p] = i$ ), l'operatore  $Q$  sia il generatore delle trasformazioni infinitesime (3.12) sugli operatori di campo,

$$-i [Q, \Phi(x)] = \Delta\Phi(x). \quad (3.19)$$

Le equazioni (3.17) e (3.19) possono anche essere interpretate come le relazioni definiti della procedura di quantizzazione. In effetti, nelle teorie quantistiche di campo (ed in meccanica quantistica) il passaggio dalle variabili classiche  $\Phi(x)$  agli operatori quantistici di campo deve essere tale da verificare le equazioni (3.17) e (3.19). Una discussione su questo argomento si può trovare, per esempio, nel libro [9], insieme con una dimostrazione dettagliata del Teorema di Noether.

È importante notare che la normalizzazione della corrente di Noether  $J^\mu$ , e quindi la normalizzazione della corrispondente carica conservata  $Q$ , è unicamente fissata dalle equazioni (3.17) e (3.19). Come verrà discusso nei capitoli successivi, questo

fatto ha un ruolo importante —per esempio— nello studio delle simmetrie dinamiche delle interazioni forti e sul loro legame con la normalizzazione delle correnti deboli.

### 3.2.2 Quantizzazione canonica

Sia  $S[\Phi]$  l'azione per il campo classico  $\Phi(x)$ ; la variabile  $\Pi(x)$  canonicamente coniugata a  $\Phi(x)$  è definita da

$$\Pi(x) = \frac{\delta S[\Phi]}{\delta \dot{\Phi}(x)}, \quad (3.20)$$

dove  $\dot{\Phi}(x) = \partial\Phi(x)/\partial x^0$ . La quantizzazione canonica consiste nel sostituire la variabile classica  $\Phi(x)$  con un operatore campo  $\Phi_{op}(x)$  tale che, insieme con l'operatore  $\Pi_{op}(x)$  corrispondente all'espressione classica (3.20), soddisfi la seguente regola di commutazione canonica a tempi uguali

$$[\Phi_{op}(t, \mathbf{x}), \Pi_{op}(t, \mathbf{y})] = i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.21)$$

Utilizzando la quantizzazione canonica, le relazioni (3.17) e (3.19) per gli operatori di campo sono soddisfatte.

**Esempio 1.** L'azione per un campo libero scalare reale  $\varphi(x)$ , di massa  $m$ , assume la forma

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} [\partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)]. \quad (3.22)$$

Il momento coniugato  $\pi(x)$  al campo  $\varphi(x)$  è dato da  $\pi(x) = \dot{\varphi}(x)$ . Quindi, gli operatori campo devono soddisfare  $[\dot{\varphi}(t, \mathbf{x}), \varphi(t, \mathbf{y})] = -i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Nel caso in cui  $m = 0$ , l'azione (3.22) è invariante per le seguenti trasformazioni globali (traslazioni del campo)

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) - \theta, \quad (3.23)$$

dove  $\theta$  è il parametro della trasformazione. La corrispondente corrente di Noether assume la forma

$$J^\mu(x) = \partial^\mu \varphi(x). \quad (3.24)$$

La componente temporale della corrente (3.24) coincide proprio con il momento coniugato  $\pi(x)$ . In questo caso, la corrispondente carica conservata  $Q$ , che formalmente vale

$$Q = \int d^3x \dot{\varphi}(x) = -iV^{1/2} \lim_{\mathbf{p} \rightarrow 0} |\mathbf{p}|^{1/2} (a(\mathbf{p}) - a^\dagger(\mathbf{p})), \quad (3.25)$$

risulta essere mal definita. In effetti, come verrà discusso nei capitoli seguenti, la simmetria (3.23) non può essere implementata da un operatore unitario nello spazio degli stati, e viene detta simmetria rotta spontaneamente. Tuttavia l'equazione (3.19), che si può scrivere nella forma

$$-i \left[ \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{x}| \leq R} d^3x \dot{\varphi}(x^0, \mathbf{x}) \right), \varphi(y) \right] = \Delta\varphi(y) = -1, \quad (3.26)$$

continua a valere.

**Nota 4.** Nella procedura della cosiddetta quantizzazione canonica, il punto di partenza è rappresentato dall'azione. Utilizzando  $S[\Phi]$  si definiscono e successivamente si introducono gli operatori di campo e, insieme con essi, si introduce lo spazio degli stati delle particelle libere. In questo modo di procedere, la forma delle interazioni tra le particelle ovvero la dinamica —specificata da  $S[\Phi]$ — sembra avere un ruolo fondamentale. In realtà, tutta la struttura collegata con l'esistenza dello spazio degli stati delle particelle libere è del tutto indipendente dalla dinamica relativa alle interazioni tra le particelle. Infatti, come mostrato nel Capitolo 1, la definizione dello spazio di Fock e l'introduzione degli operatori di annichilazione e di creazione per le particelle non dipendono dalla forma della hamiltoniana di interazione o della lagrangiana di interazione.

### 3.3 Simmetrie e correnti

Verranno ora presentati alcuni esempi di simmetrie e delle relative correnti.

**Esempio 2.** L'azione libera (3.22), per un campo scalare reale  $\varphi(x)$  di massa  $m$ , è invariante per la seguente variazione infinitesima del campo

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) - \epsilon^\nu \partial_\nu \varphi(x), \quad (3.27)$$

che corrisponde ad una traslazione infinitesima nello spazio-tempo,  $x^\nu \rightarrow x^\nu + \epsilon^\nu$ . In questo caso, le componenti di  $\epsilon^\nu$  rappresentano i quattro parametri reali della trasformazione. Le corrispondenti quattro correnti conservate costituiscono le componenti del tensore energia-momento

$$T^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu \varphi(x) \partial^\nu \varphi(x) - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\sigma \varphi(x) \partial^\sigma \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)). \quad (3.28)$$

Gli operatori  $P_\nu$  che generano le trasformazioni (3.27) sono

$$P_0 = \int d^3x \frac{1}{2} [(\dot{\varphi})^2 + (\nabla\varphi)^2 + m^2 \varphi^2], \quad (3.29)$$

$$P_j = \int d^3x \dot{\varphi} \partial_j \varphi, \quad \text{per } j = 1, 2, 3. \quad (3.30)$$

**Esempio 3.** L'azione libera per un campo scalare complesso  $\phi(x)$  di massa  $m$  vale

$$S_0 = \int d^4x (\partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x)). \quad (3.31)$$

L'azione (3.31) è invariante per le usuali trasformazioni del gruppo di Poincaré, ed è anche invariante per le seguenti trasformazioni infinitesime

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + i\theta \phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi^*(x) - i\theta \phi^*(x), \quad (3.32)$$

dove  $\theta$  rappresenta un parametro reale. Le trasformazioni (3.32) sono associate ad una simmetria interna, ovvero una simmetria commutante con le simmetrie del gruppo di Poincaré. La corrispondente corrente di Noether è data da

$$J^\mu(x) = i (\phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - \partial^\mu \phi^*(x) \phi(x)), \quad (3.33)$$

e la carica conservata  $Q$  vale

$$Q = i \int d^3x [\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi}^* \phi]. \quad (3.34)$$

**Esempio 4.** Si consideri un modello di teoria di campo definito in termini di  $N$  campi scalari reali  $\{\varphi_i(x)\}$  in cui  $i = 1, 2, 3, \dots, N$ . Si assuma che l'azione abbia la forma seguente

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi_i(x) \partial_\mu \varphi_i(x) - W(\varphi_i(x) \varphi_i(x)) \right\}, \quad (3.35)$$

in cui la somma sugli indici ripetuti è sottintesa e  $W$  è una funzione arbitraria nell'argomento  $\varphi_i \varphi_i = \sum_i \varphi_i \varphi_i$ . Il funzionale (3.35) è invariante per trasformazioni

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi'_i(x) = O_{ij} \varphi_j(x), \quad (3.36)$$

dove  $O_{ij}$  è una matrice ortogonale  $N \times N$ . Le trasformazioni di questo tipo che sono connesse all'identità formano il gruppo  $SO(N)$  delle matrici ortogonali a determinante unitario. Se  $\{T^a\}$  —in cui l'indice  $a$  assume i valori  $a = 1, 2, 3, \dots, N(N-1)/2$ — indicano i generatori del gruppo  $SO(N)$ , le trasformazioni infinitesime dei campi sono

$$\varphi_j(x) \rightarrow \varphi_j(x) + i\theta_a [T^a]_{jk} \varphi_k(x), \quad (3.37)$$

dove  $\{\theta_a\}$  denotano i parametri del gruppo e  $[T^a]_{jk}$  rappresentano gli elementi di matrice dei generatori  $T^a$ . Le corrispondenti correnti conservate risultano essere

$$J_\mu^a(x) = -i\partial_\mu\varphi_j(x) [T^a]_{jk} \varphi_k(x) . \quad (3.38)$$

Gli operatori di carica  $Q^a$  sono dati da

$$Q^a = -i \int d^3x \dot{\varphi}_j(x) [T^a]_{jk} \varphi_k(x) . \quad (3.39)$$

**Esempio 5.** L'azione del modello che descrive  $N$  tipi di particelle libere di massa  $m$  e di spin  $1/2$  è data da

$$S_0 = \int d^4x \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_j(x) , \quad (3.40)$$

in cui i campi  $\psi_j(x)$  corrispondono a spinori di Dirac. Come verrà discusso in seguito,  $\gamma^\mu$  denotano le quattro matrici gamma di Dirac, e gli indici spinoriali sono sottintesi. L'integrale (3.40) è invariante per le seguenti trasformazioni dei campi

$$\psi_j(x) \rightarrow U_{jk} \psi_k(x) \quad , \quad \bar{\psi}_j(x) \rightarrow \bar{\psi}_k(x) U_{kj}^\dagger , \quad (3.41)$$

dove  $U_{jk}$  denota una matrice unitaria  $N \times N$ , ovvero  $U \in U(N)$ . Le corrispondenti trasformazioni infinitesime assumono la forma

$$\begin{aligned} \psi_j(x) &\rightarrow \psi_j(x) + i\theta_a [T^a]_{jk} \psi_k(x) , \\ \bar{\psi}_j(x) &\rightarrow \bar{\psi}_j(x) - i\bar{\psi}_k(x) \theta_a [T^a]_{kj} , \end{aligned} \quad (3.42)$$

in cui  $\theta^a$  rappresentano parametri reali e  $\{T^a\}$  denotano i generatori hermitiani di  $U(N)$ , con  $a = 1, 2, \dots, N^2$ . Le correnti di Noether risultano essere

$$J_\mu^a(x) = \bar{\psi}_j(x) \gamma_\mu [T^a]_{jk} \psi_k(x) , \quad (3.43)$$

e le cariche conservate  $Q^a$  valgono

$$Q^a = \int d^3x \bar{\psi}_j(x) \gamma_0 [T^a]_{jk} \psi_k(x) . \quad (3.44)$$

### 3.4 Rottura esplicita di simmetria

Risulta utile considerare anche la situazione nella quale l'azione  $S[\Phi]$  —di un determinato modello di teoria di campo— non sia invariante per certe trasformazioni di simmetria. Un caso particolarmente interessante è quello in cui:

- (a) l'azione si può scrivere come somma di due termini  $S[\Phi] = S_1[\Phi] + S_2[\Phi]$ ;
- (b)  $S_1[\Phi]$  è invariante per trasformazioni globali  $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \theta\Delta\Phi(x)$ ;
- (c) il funzionale  $S_2[\Phi] = \int d^4x \mathcal{L}_2(\Phi(x))$  non è invariante per le trasformazioni definite in (b);
- (d) il termine lagrangiano  $\mathcal{L}_2(\Phi(x))$  dipende dai campi  $\Phi(x)$  ma non dipende dalle derivate dei campi  $\Phi(x)$ .

In questo caso, per trasformazioni  $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \theta(x)\Delta\Phi(x)$ , la variazione dell'azione risulta essere

$$\Delta S = \int d^4x \theta(x) \left\{ \partial_\mu J^\mu(x) + \Delta\Phi(x) \frac{\delta S_2[\Phi]}{\delta\Phi(x)} \right\} , \quad (3.45)$$

dove  $J^\mu$  denota la corrispondente corrente di Noether che si otterrebbe dalla azione  $S_1[\Phi]$ . Quando valgono le equazioni del moto, deve essere  $\Delta S = 0$  per qualunque valore del parametro  $\theta(x)$ ; pertanto, dall'equazione (3.45) si ricava

$$\partial_\mu J^\mu(x) = -\Delta\Phi(x) \frac{\delta S_2[\Phi]}{\delta\Phi(x)} . \quad (3.46)$$

A causa della rottura esplicita della simmetria —dovuta alla presenza del termine  $S_2$  nell'azione—, la corrente  $J^\mu(x)$  non è conservata. L'operatore di carica  $Q(t)$  associato alla corrente  $J^\mu$ , ovvero  $Q(t) = \int d^3x J^0(t, \mathbf{x})$ , non è una costante del moto ma, siccome  $S_2$  non dipende dalle derivate del campo,  $Q(t)$  continua ad essere il generatore della trasformazione sui campi

$$-i [Q(t), \Phi(t, \mathbf{x})] = \Delta\Phi(t, \mathbf{x}) . \quad (3.47)$$

## 4 Operatori campo

Nel presente capitolo si introducono le lagrangiane che descrivono sistemi di particelle libere, dotate di spin 0, 1/2 e 1, si ricavano le funzioni d'onda relativistiche per gli stati di singola particella e vengono presentati i corrispondenti operatori di campo.

### 4.1 Campo scalare reale

L'azione libera per un campo scalare reale  $\varphi(x)$  di massa  $m$  è data dalla seguente espressione

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)) , \quad (4.1)$$

e la corrispondente equazione del moto è

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \varphi(x) = 0 . \quad (4.2)$$

Il campo  $\varphi(x)$  viene utilizzato per descrivere particelle di spin 0. Un set completo di funzioni d'onda —a tempo fissato— è rappresentato per esempio dalle onde piane  $\{e^{i\mathbf{p}x}\}$ ; per ognuna di queste funzioni, l'equazione (4.2) determina la possibile dipendenza dalla variabile temporale. Le soluzioni classiche dell'equazione del moto forniscono pertanto l'insieme completo di funzioni d'onda covarianti relativistiche  $\{e^{-i\mathbf{p}x}\}$  —insieme con le funzioni d'onda complesse coniugate  $\{[e^{-i\mathbf{p}x}]^* = e^{i\mathbf{p}x}\}$ —, in cui vale  $p^\mu p_\mu = m^2$  poiché la componente temporale dell'impulso è data da  $p^0 = E(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ .

**Nota 5.** Quando il campo  $\varphi(x)$  è considerato una variabile generica che non è soggetta a nessun vincolo, la sua trasformata di Fourier  $\tilde{\varphi}(p) = \int d^4x e^{i\mathbf{p}x} \varphi(x)$  può avere supporto in tutto  $\mathbb{R}^4$  relativamente alla variabile  $p^\mu$ . Invece, quando  $\varphi(x)$  soddisfa l'equazione del moto, la sua trasformata  $\tilde{\varphi}(p)$  ha supporto solamente sull'iperboloide —ovvero sul guscio o *shell*— definito da  $p^2 = m^2$ . Per questo motivo, i campi che soddisfano le equazioni del moto sono genericamente detti on-shell, in contrasto coi campi non vincolati detti off-shell.

Utilizzando funzioni d'onda normalizzate, l'operatore di campo  $\varphi(x)$  assume la forma

$$\varphi(x) = \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ a(\mathbf{p}) \frac{e^{-i\mathbf{p}x}}{\sqrt{V}} + a^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e^{i\mathbf{p}x}}{\sqrt{V}} \right\} , \quad (4.3)$$

in cui gli operatori di annichilazione e di creazione per le particelle soddisfano:

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{k})] = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) . \quad (4.4)$$

L'espressione (4.3) è in accordo con le regole della quantizzazione canonica. I generatori  $P^\mu$  delle traslazioni spazio-temporali si ottengono integrando le componenti temporali del tensore energia-momento (3.28),

$$P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}(x) . \quad (4.5)$$

Utilizzando la forma esplicita (4.3) dell'operatore di campo, si ottiene

$$P^\mu = \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu \frac{1}{2} \{ a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{p}) + a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) \} , \quad (4.6)$$

in cui  $p^0 = E(\mathbf{p})$ . Per mezzo delle regole di commutazione (4.4), l'espressione (4.6) si può scrivere nella forma

$$P^\mu = \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} p^\mu a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p}) + \text{costante} , \quad (4.7)$$

in cui appare l'operatore numero di particelle con impulso fissato  $a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{p})$ . Nel caso dell'operatore  $P^0$ , il valore della costante additiva che appare in equazione (4.7) è divergente poiché corrisponde alla somma di tutte le energie degli stati fondamentali degli oscillatori armonici associati ai vari modi del campo. La presenza di questa divergenza nell'espressione (4.7) non ha conseguenze fisiche osservabili, e si può quindi trascurare.

**Nota 6.** A differenza dei modelli ordinari di meccanica quantistica nonrelativistica —in cui ad ogni operatore hermitiano corrisponde, almeno di principio, un'osservabile— nelle teorie quantistiche di campo ad un generico operatore hermitiano non necessariamente corrisponde un'osservabile. Infatti quasi mai, in teorie di campo, ad un generico operatore hermitiano corrisponde una osservabile, ovvero una quantità effettivamente misurabile in laboratorio. Si consideri per esempio l'operatore  $P^0$  definito in equazione (4.5); siccome ogni quantità misurata in laboratorio si riferisce sempre ad una regione limitata dello spazio-tempo, la somma su tutto lo spazio della densità di energia ad un istante fissato non è certamente osservabile. Ciò non toglie che il concetto di operatore  $P^0$ , come definito in equazione (4.5), sia utile. Nei fenomeni naturali che coinvolgono le particelle elementari, tutte le quantità realmente osservabili sono quelle che possono essere misurate o definite unicamente in termini di processi di interazione tra particelle (scattering, decadimenti,...). Si consideri ora l'effetto della costante additiva nella espressione (4.7). L'introduzione di una qualsivoglia costante additiva nell'espressione della hamiltoniana libera  $H_0 = P^0$

non altera i commutatori di  $H_0$  con gli operatori di creazione e di annichilazione associati agli stati di singola particella. Quindi l'introduzione di una costante additiva in  $H_0$  non modifica la dipendenza dal tempo delle funzioni d'onda associate agli stati di singola particella (ovvero non modifica l'energia di singola particella), e quindi non modifica le ampiezze di transizione corrispondenti ai processi di interazione tra le particelle e, pertanto, non produce alcun effetto fisico osservabile.

#### 4.1.1 Ordinamento normale

La presenza di costanti numeriche additive divergenti nelle espressioni delle varie cariche conservate è un fenomeno piuttosto frequente in teorie di campo. Siccome queste divergenze non corrispondono a quantità osservabili, la loro presenza non altera la validità delle teorie quantistiche di campo e la loro interpretazione fisica. In alcuni casi, si conviene di normalizzare le varie quantità in modo tale da rendere nulli i loro valori medi sul vuoto. Questa convenzione equivale ad introdurre, nelle varie espressioni degli operatori, l'ordinamento normale (per esempio:  $\varphi(x)\varphi(x)$ ) secondo il quale gli operatori di creazione delle particelle devono apparire a sinistra degli operatori di annichilazione. Per esempio, si può porre

$$P^0 = \frac{1}{2} \int d^3x : [\dot{\varphi}(x)\dot{\varphi}(x) + \nabla\varphi(x)\nabla\varphi(x) + m^2\varphi^2(x)] : . \quad (4.8)$$

#### 4.1.2 Dimensione canonica del campo scalare

Utilizzando le unità di misura naturali in cui  $\hbar = 1 = c$ , l'azione deve essere adimensionale. Per compensare il volume di integrazione, la densità lagrangiana deve avere le dimensioni di una massa (o di una energia) alla quarta potenza. La densità lagrangiana nell'espressione (4.1) è quadratica nei campi ed ogni termine lagrangiano contiene esplicitamente un fattore con le dimensioni di una massa al quadrato: il termine  $m^2$  oppure le due derivate che agiscono sui campi. Quindi, il campo scalare  $\varphi(x)$  deve avere dimensione di una massa. L'espressione (4.3) è in accordo con questa conclusione.

## 4.2 Campo scalare complesso

L'azione libera per un campo scalare complesso  $\phi(x)$  di massa  $m$  è data dalla seguente espressione

$$S_0 = \int d^4x (\partial_\mu\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^*(x)\phi(x)) , \quad (4.9)$$

e le corrispondenti equazioni del moto sono

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 = (\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi^*(x) . \quad (4.10)$$

Il campo  $\phi(x)$  viene utilizzato per descrivere due tipi di particelle con spin 0 e con la stessa massa (per esempio, la coppia particella antiparticella) e può essere interpretato come combinazione lineare di due campi scalari reali

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) \quad , \quad \phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)) . \quad (4.11)$$

La forma operatoriale del campo scalare complesso vale

$$\phi(x) = \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ a_{(+)}(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} + a_{(-)}^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \right\} , \quad (4.12)$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} + a_{(-)}(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\} . \quad (4.13)$$

Gli operatori di annichilazione e di creazione sono definiti da

$$a_{(+)}(\mathbf{p}) = \frac{a_1(\mathbf{p}) + ia_2(\mathbf{p})}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p}) = \frac{a_1^\dagger(\mathbf{p}) - ia_2^\dagger(\mathbf{p})}{\sqrt{2}} , \quad (4.14)$$

$$a_{(-)}(\mathbf{p}) = \frac{a_1(\mathbf{p}) - ia_2(\mathbf{p})}{\sqrt{2}} \quad , \quad a_{(-)}^\dagger(\mathbf{p}) = \frac{a_1^\dagger(\mathbf{p}) + ia_2^\dagger(\mathbf{p})}{\sqrt{2}} , \quad (4.15)$$

e verificano le regole di commutazione

$$[a_{(+)}(\mathbf{p}), a_{(+)}^\dagger(\mathbf{k})] = [a_{(-)}(\mathbf{p}), a_{(-)}^\dagger(\mathbf{k})] = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) , \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} [a_{(+)}(\mathbf{p}), a_{(-)}(\mathbf{k})] &= 0 = [a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p}), a_{(-)}^\dagger(\mathbf{k})] , \\ [a_{(+)}(\mathbf{p}), a_{(-)}^\dagger(\mathbf{k})] &= 0 = [a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p}), a_{(-)}(\mathbf{k})] . \end{aligned} \quad (4.17)$$

### 4.2.1 Simmetria interna

L'azione (4.9) è invariante per le seguenti trasformazioni dei campi

$$\phi(x) \rightarrow \phi^\theta(x) = e^{i\theta} \phi(x) \quad , \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi^{*\theta}(x) = e^{-i\theta} \phi^*(x) \quad (4.18)$$

in cui  $\theta$  è un parametro reale che assume i valori  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Le trasformazioni (4.18) formano un gruppo abeliano che è isomorfo ad  $U(1) \simeq SO(2)$ . Integrando la componente temporale della corrispondente corrente conservata, la cui espressione vale  $J^\mu(x) = i(\phi^*(x)\partial^\mu\phi(x) - \partial^\mu\phi^*(x)\phi(x))$ , si ottiene l'operatore di carica

$$Q = \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p}) a_{(+)}(\mathbf{p}) - a_{(-)}(\mathbf{p}) a_{(-)}^\dagger(\mathbf{p}) \right\} , \quad (4.19)$$

che è il generatore delle trasformazioni  $U(1)$  definite in equazione (4.18), ovvero

$$\begin{aligned} \delta\phi(x) &= i\theta\phi(x) = -i\theta [Q, \phi(x)] , \\ \delta\phi^*(x) &= -i\theta\phi^*(x) = -i\theta [Q, \phi^*(x)] . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Siccome valgono le relazioni

$$\begin{aligned} [Q, a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p})] &= a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p}) \quad , \quad [Q, a_{(+)}(\mathbf{p})] = -a_{(+)}(\mathbf{p}) , \\ [Q, a_{(-)}^\dagger(\mathbf{p})] &= -a_{(-)}^\dagger(\mathbf{p}) \quad , \quad [Q, a_{(-)}(\mathbf{p})] = a_{(-)}(\mathbf{p}) , \end{aligned} \quad (4.21)$$

$a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p})$  e  $a_{(+)}(\mathbf{p})$  sono gli operatori di creazione e di annichilazione di una particella di carica +1, mentre  $a_{(-)}^\dagger(\mathbf{p})$  e  $a_{(-)}(\mathbf{p})$  sono gli operatori di creazione e di annichilazione di una particella di carica -1.

### 4.3 Campo vettoriale massiccio

L'azione libera per un campo vettoriale reale  $B_\mu(x)$  di massa  $m \neq 0$  è

$$S_0 = \int d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} B_\mu B^\mu \right) , \quad (4.22)$$

dove

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) . \quad (4.23)$$

Il campo  $B_\mu(x)$  viene utilizzato per descrivere particelle con spin 1 e dotate di massa  $m$ . Dall'equazione del moto,

$$\partial^2 B_\mu - \partial_\mu \partial^\nu B_\nu + m^2 B_\mu = 0 , \quad (4.24)$$

segue —prendendo la divergenza di ambo i membri— che

$$\partial^\mu B_\mu = 0 . \quad (4.25)$$

Tenendo conto del vincolo (4.25), l'equazione del moto si può riscrivere come

$$(\partial^\nu \partial_\nu + m^2) B_\mu(x) = 0 . \quad (4.26)$$

Un possibile insieme completo —a tempo fissato— di funzioni d'onda che soddisfano l'equazione del moto (4.26) è rappresentato da

$$\left\{ \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, b) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\} , \quad (4.27)$$

in cui  $\mathbf{p} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^3$ ,  $p^0 = E(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . Gli stati di polarizzazione rettilinea  $\varepsilon_\mu(\mathbf{p}, b)$ , con  $b = 1, 2, 3$ , hanno componenti controvarianti

$$\varepsilon^0(\mathbf{p}, b) = \frac{p^b}{m} \quad , \quad \varepsilon^j(\mathbf{p}, b) = \delta^{jb} + \frac{p^j p^b}{m(m + E(\mathbf{p}))} , \quad (4.28)$$

e verificano le relazioni

$$\begin{aligned} p^\mu \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, b) &= 0 \quad , \quad \varepsilon^\mu(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, c) = -\delta_{bc} , \\ \sum_{b=1}^3 \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\nu(\mathbf{p}, b) &= \left( \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} - \eta_{\mu\nu} \right) . \end{aligned} \quad (4.29)$$

L'operatore di campo  $B_\mu(x)$ , che ha dimensioni di una massa, assume la forma

$$\begin{aligned} B_\mu(x) &= \sum_{b=1}^3 \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ a(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, b) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} + \right. \\ &\quad \left. + a^\dagger(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, b) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \right\} , \end{aligned} \quad (4.30)$$

in cui gli operatori di annichilazione e di creazione delle particelle soddisfano

$$[a(\mathbf{p}, b), a^\dagger(\mathbf{k}, c)] = \delta_{bc} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) . \quad (4.31)$$

### 4.3.1 Campo vettoriale massiccio complesso

Le componenti  $U_\mu(x)$  e  $U_\mu^*(x)$  di un campo vettoriale complesso massiccio si possono interpretare come combinazioni lineari di due campi vettoriali reali

$$U_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( B_\mu^{(1)} + iB_\mu^{(2)} \right) , \quad U_\mu^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( B_\mu^{(1)} - iB_\mu^{(2)} \right) . \quad (4.32)$$

In questo caso gli operatori di campo sono

$$U_\mu(x) = \sum_{b=1}^3 \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ a_{(+)}(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, b) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} + a_{(-)}^\dagger(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, b) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \right\} , \quad (4.33)$$

$$U_\mu^*(x) = \sum_{b=1}^3 \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ a_{(+)}^\dagger(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, b) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} + a_{(-)}(\mathbf{p}, b) \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, b) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\} , \quad (4.34)$$

in cui gli operatori di annichilazione e di creazione per le particelle verificano regole di commutazione analoghe alle relazioni (4.16) e (4.17); in particolare, gli unici commutatori non nulli sono descritti da

$$[a_{(+)}(\mathbf{p}, b), a_{(+)}^\dagger(\mathbf{k}, c)] = [a_{(-)}(\mathbf{p}, b), a_{(-)}^\dagger(\mathbf{k}, c)] = \delta_{bc} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) . \quad (4.35)$$

## 4.4 Campo vettoriale reale di massa nulla

L'azione libera per un campo vettoriale reale  $A_\mu(x)$  di massa nulla è data dalla seguente espressione

$$S_0 = -\frac{1}{4} \int d^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \int d^4 x (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) , \quad (4.36)$$

e la corrispondente equazione del moto assume la forma

$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu(x) = 0 . \quad (4.37)$$

Un campo vettoriale reale di massa nulla può essere usato per descrivere i campi elettrici e magnetici; per questo motivo, il campo  $A_\mu(x)$  può essere identificato con il quadrivettore potenziale dell'elettromagnetismo.

### 4.4.1 Invarianza di gauge

L'azione (4.36) è invariante per trasformazioni di gauge

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x) , \quad (4.38)$$

dove  $\Lambda(x)$  è una funzione scalare arbitraria. Nell'interpretazione fisica del modello definito dall'azione (4.36), l'invarianza di gauge è strettamente connessa col fatto che il campo  $A_\mu(x)$  non rappresenta un'osservabile; le osservabili devono essere quantità invarianti di gauge. Le componenti del campo classico  $A_\mu(x)$  off-shell rappresentano quattro funzioni reali arbitrarie; ma l'azione (4.36) —essendo invariante di gauge— in realtà dipende (in maniera non banale) solamente da tre funzioni reali. Questo significa che l'equazione del moto (4.37) determina l'evoluzione temporale di queste tre componenti solamente; ovvero, l'evoluzione temporale di una opportuna combinazione delle componenti  $A_\mu(x)$  non è fissata dall'equazione del moto (4.37). Conseguentemente, non esiste un insieme completo di funzioni d'onda —a quattro componenti— con dipendenza temporale univocamente determinata dall'equazione del moto (4.37). Per superare questo problema, generalmente si utilizza una procedura di gauge-fixing, per mezzo della quale si modifica la lagrangiana in modo tale da non alterare la dinamica delle osservabili. Questo argomento verrà discusso dettagliatamente in seguito.

I valori delle osservabili sono univocamente determinati, ma la procedura di gauge-fixing non è univoca; una possibilità consiste nell'utilizzare —al posto dell'equazione del moto (4.37)— la seguente equazione

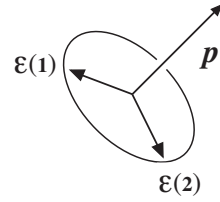
$$\partial_\nu \partial^\nu A_\mu(x) = 0 . \quad (4.39)$$

Un insieme completo di funzioni d'onda che soddisfano l'equazione (4.39) è rappresentato da

$$\left\{ \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\} , \quad (4.40)$$

in cui  $\mathbf{p} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^3$ ,  $p^0 = |\mathbf{p}|$  e gli stati di polarizzazione sono descritti da  $\varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$ , con  $\lambda = 0, 1, 2, 3$ . Si può utilizzare una base di polarizzazioni rettilinee nella quale  $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 1)$  e  $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 2)$  corrispondono alle due polarizzazioni fisiche del fotone. Le componenti temporali dei vettori  $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 1)$  e  $\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 2)$  sono nulle, mentre le loro componenti spaziali sono ortogonali al vettore impulso  $\mathbf{p}$ , come indicato in Figura 4.1.





**Figura 4.1** Polarizzazioni fisiche o trasverse  $\varepsilon(\mathbf{p}, 1)$  e  $\varepsilon(\mathbf{p}, 2)$ .

Le funzioni di polarizzazione  $\varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda)$  si possono scegliere reali, inoltre

- per  $\lambda = 0$  si può porre

$$\varepsilon^\mu(\mathbf{p}, 0) = (1, 0, 0, 0), \quad (4.41)$$

- mentre per  $\lambda = j, k = 1, 2, 3$  si ha

$$\varepsilon^0(\mathbf{p}, j) = 0, \quad \varepsilon^i(\mathbf{p}, 3) = \frac{p^i}{|\mathbf{p}|}, \quad (4.42)$$

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon^i(\mathbf{p}, j) \varepsilon^i(\mathbf{p}, k) = \delta^{jk}, \quad \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \varepsilon^i(\mathbf{p}, a) \varepsilon^j(\mathbf{p}, b) = \epsilon_{abc} \varepsilon^k(\mathbf{p}, c). \quad (4.43)$$

L'operatore di campo  $A_\mu(x)$  assume la forma

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}} \left\{ a(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} + a^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) \varepsilon_\mu^*(\mathbf{p}, \lambda) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \right\}, \quad (4.44)$$

dove gli operatori di annichilazione e di creazione soddisfano le regole di commutazione

$$[a(\mathbf{p}, \lambda), a^\dagger(\mathbf{k}, \sigma)] = -\eta_{\lambda\sigma} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (4.45)$$

## 4.5 Campo spinoriale massiccio

L'azione libera per un campo spinoriale di Dirac massiccio  $\psi_\alpha(x)$ , in cui l'indice spinoriale  $\alpha$  assume i valori  $\alpha = 1, 2, 3, 4$ , è data da

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4 x \bar{\psi}_\alpha(x) \left( i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu - m \delta_{\alpha\beta} \right) \psi_\beta(x) \\ &= \int d^4 x \bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x), \end{aligned} \quad (4.46)$$

dove si è posto

$$\bar{\psi}_\alpha(x) = \psi_\beta^\dagger(x) \gamma_{\beta\alpha}^0. \quad (4.47)$$

Il campo spinoriale  $\psi(x)$  viene utilizzato per descrivere particelle —e le corrispondenti antiparticelle— di spin  $1/2$  e di massa  $m$ . Le quattro matrici di Dirac  $\{\gamma^\mu\}$ , ciascuna delle quali è una matrice  $4 \times 4$ , soddisfano

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.48)$$

La cosiddetta rappresentazione standard delle matrici  $\gamma^\mu$  è data da

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

dove  $j = 1, 2, 3$  e gli elementi che appaiono entro le parentesi quadre sono —a loro volta— matrici  $2 \times 2$ . Le matrici di Pauli  $\{\sigma^j\}$  sono

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

L'equazione del moto che segue dall'azione (4.46) è l'equazione di Dirac per uno spinore libero

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (4.51)$$

### 4.5.1 Covarianza relativistica

Si consideri una trasformazione di Lorentz definita da  $x \rightarrow x' = \Lambda x$  in cui la matrice  $\Lambda$  è data da  $\Lambda(\omega) = \exp(\frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu})$ . Il campo spinoriale trasforma come

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = R(\omega) \psi(\Lambda^{-1} x'), \quad (4.52)$$

dove

$$R(\omega) = \exp\left(\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}\right) \quad , \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] . \quad (4.53)$$

La covarianza relativistica dell'equazione di Dirac (4.51) è garantita dalla relazione

$$R^{-1}(\omega) \gamma^\mu R(\omega) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu . \quad (4.54)$$

Le matrici  $\{R(\omega)\}$  forniscono una rappresentazione di dimensione quattro del gruppo di Lorentz e verificano

$$R^{-1}(\omega) = \gamma^0 R^\dagger(\omega) \gamma^0 . \quad (4.55)$$

#### 4.5.2 Funzioni d'onda

Risulta conveniente utilizzare il seguente insieme completo di funzioni d'onda

$$\left\{ u(\mathbf{p}, r) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} , \bar{v}(\mathbf{p}, r) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\} , \quad (4.56)$$

in cui  $r = 1, 2$ , inoltre  $\mathbf{p} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^3$ ,  $p^0 = E(\mathbf{p}) = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ . Gli spinori a quattro componenti  $u(\mathbf{p}, r)$  e  $v(\mathbf{p}, r)$ , che soddisfano le relazioni

$$(\hat{p} - m) u(\mathbf{p}, r) = 0 \quad , \quad (\hat{p} + m) v(\mathbf{p}, r) = 0 , \quad (4.57)$$

con  $\hat{p} = \gamma_\mu p^\mu$ , assumono la forma

$$u(\mathbf{p}, r) = \frac{\hat{p} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{bmatrix} \varphi^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{E + m} \varphi^{(r)} \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{E + m}} \varphi^{(r)} \end{bmatrix} , \quad (4.58)$$

$$v(\mathbf{p}, r) = \frac{-\hat{p} + m}{\sqrt{E + m}} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{E + m}} \xi^{(r)} \\ \sqrt{E + m} \xi^{(r)} \end{bmatrix} . \quad (4.59)$$

Gli spinori bidimensionali  $\varphi^{(r)}$  e  $\xi^{(r)}$ , di norma unitaria, descrivono gli stati di polarizzazione delle particelle e delle antiparticelle. Le relazioni di ortogonalità assumono la forma

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, s) &= 2m \delta_{rs} = -\bar{v}(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, s) , \\ u^\dagger(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, s) &= 2E(\mathbf{p}) \delta_{rs} = v^\dagger(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, s) , \\ \bar{v}(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, s) &= \bar{u}(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, s) = 0 , \\ v^\dagger(\mathbf{p}, r) u(-\mathbf{p}, s) &= u^\dagger(\mathbf{p}, s) v(-\mathbf{p}, r) = 0 , \end{aligned} \quad (4.60)$$

e le relazioni di completezza sono

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^2 [u_\alpha(\mathbf{p}, r) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, r) - v_\alpha(\mathbf{p}, r) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, r)] &= 2m \delta_{\alpha\beta} , \\ \sum_{r=1}^2 u_\alpha(\mathbf{p}, r) \bar{u}_\beta(\mathbf{p}, r) &= (\hat{p} + m)_{\alpha\beta} = (p_\mu \gamma^\mu + m)_{\alpha\beta} , \\ \sum_{r=1}^2 v_\alpha(\mathbf{p}, r) \bar{v}_\beta(\mathbf{p}, r) &= (\hat{p} - m)_{\alpha\beta} = (p_\mu \gamma^\mu - m)_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (4.61)$$

#### 4.5.3 Stati di elicità definita

Nel caso in cui le componenti spaziali dell'impulso non siano tutte nulle, ovvero  $\mathbf{p} \neq 0$ , è possibile introdurre una opportuna base per  $\varphi^{(r)}$  e  $\xi^{(r)}$  corrispondente a stati con elicità definita [12, 14]. Posto

$$\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} \varphi^{(1)} = \varphi^{(1)} \quad , \quad \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} \varphi^{(2)} = -\varphi^{(2)} , \quad (4.62)$$

allora gli spinori  $u(\mathbf{p}, 1)$  e  $u(\mathbf{p}, 2)$  corrispondono a stati di una particella con elicità  $+1/2$  e  $-1/2$  rispettivamente. Mentre, introducendo

$$\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} \xi^{(1)} = \xi^{(1)} \quad , \quad \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|} \xi^{(2)} = -\xi^{(2)} , \quad (4.63)$$

gli spinori  $\bar{v}(\mathbf{p}, 1)$  e  $\bar{v}(\mathbf{p}, 2)$  descrivono stati di una antiparticella con elicità  $-1/2$  e  $+1/2$  rispettivamente.

#### 4.5.4 Algebra delle matrici di Dirac

Nella rappresentazione standard (4.49) delle matrici gamma, valgono le relazioni

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 \quad , \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad , \quad \gamma^0 (\gamma^i)^\dagger \gamma^0 = \gamma^i . \quad (4.64)$$

Definendo

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 , \quad (4.65)$$

si ottiene

$$\gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (\gamma_5)^\dagger , \quad (4.66)$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad , \quad [\gamma^5, \Sigma_{\mu\nu}] = 0 \quad , \quad \text{Tr}(\gamma^5) = 0 . \quad (4.67)$$

Utilizzando le notazioni  $\hat{p} = \gamma_\mu p^\mu$ ,  $p \cdot q = p^\mu q_\mu$ , valgono le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \hat{p}\hat{q} &= p \cdot q - i \Sigma_{\mu\nu} p^\mu q^\nu & , & & \gamma_\mu \hat{p} \gamma^\mu &= -2\hat{p} , \\ \gamma_\mu \hat{p} \hat{q} \hat{k} \gamma^\mu &= -2\hat{k} \hat{q} \hat{p} & , & & \gamma_\mu \hat{p} \hat{q} \gamma^\mu &= 4p \cdot q . \end{aligned} \quad (4.68)$$

La traccia di un numero dispari di matrici gamma si annulla; inoltre

$$\text{Tr}(\gamma^5 \hat{p} \hat{q}) = 0 \quad , \quad \text{Tr}(\hat{p} \hat{q}) = 4p \cdot q , \text{nonumber} \quad (4.69)$$

$$\text{Tr}(\gamma^5 \hat{p} \hat{q} \hat{k} \hat{\ell}) = 4i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\mu q^\nu k^\rho \ell^\sigma ,$$

$$\text{Tr}(\hat{p} \hat{q} \hat{k} \hat{\ell}) = 4(p \cdot q k \cdot \ell - p \cdot k q \cdot \ell + p \cdot \ell q \cdot k) . \quad (4.70)$$

#### 4.5.5 Bilineari covarianti

Ogni base nello spazio lineare delle matrici  $4 \times 4$  deve contenere 16 elementi; una base particolare è la seguente

$$\{1, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, \Sigma_{\mu\nu}\} . \quad (4.71)$$

I bilineari covarianti sono i campi composti che si ottengono utilizzando i campi  $\bar{\psi}(x)$  e  $\psi(x)$ ; questi campi composti e le loro proprietà di trasformazione sono

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)\psi(x) &\sim \text{scalare} & , & & \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) &\sim \text{pseudo-scalare} \\ \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x) &\sim \text{vettore} & , & & \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) &\sim \text{vettore assiale} \\ \bar{\psi}(x)\Sigma_{\mu\nu}\psi(x) &\sim \text{tensore} & & & & \end{aligned} \quad (4.72)$$

#### 4.5.6 Operatori campo

Gli operatori di campo  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$ , che hanno dimensione di una massa alla potenza (3/2), sono dati da

$$\psi(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ b(\mathbf{p}, r) u(\mathbf{p}, r) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} + d^\dagger(\mathbf{p}, r) v(\mathbf{p}, r) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \right\} \quad (4.73)$$

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}} \left\{ b^\dagger(\mathbf{p}, r) \bar{u}(\mathbf{p}, r) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} + d(\mathbf{p}, r) \bar{v}(\mathbf{p}, r) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\} \quad (4.74)$$

in cui  $b(\mathbf{p}, r)$  e  $b^\dagger(\mathbf{p}, r)$  denotano gli operatori di annichilazione e di creazione per una particella, mentre  $d(\mathbf{p}, r)$  e  $d^\dagger(\mathbf{p}, r)$  rappresentano i corrispondenti operatori per una antiparticella.

Nella base degli stati di elicità (4.62) e (4.63), l'operatore  $b^\dagger(\mathbf{p}, 1)$  crea una particella con elicità  $+1/2$  mentre  $b^\dagger(\mathbf{p}, 2)$  crea una particella con elicità  $-1/2$ ; l'operatore  $d^\dagger(\mathbf{p}, 1)$  crea una antiparticella con elicità  $-1/2$  mentre  $b^\dagger(\mathbf{p}, 2)$  crea una antiparticella con elicità  $+1/2$ .

Gli anticommutatori non nulli sono

$$\{b(\mathbf{p}, r), b^\dagger(\mathbf{k}, s)\} = \{d(\mathbf{p}, r), d^\dagger(\mathbf{k}, s)\} = \delta_{rs} \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) . \quad (4.75)$$

Utilizzando come tensore energia-momento  $\theta^{\mu\nu}$  la seguente espressione

$$\theta^{\mu\nu}(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial^\nu \psi(x) , \quad (4.76)$$

le componenti dell'operatore impulso  $P^\mu$  —che implementa le traslazioni— sono date da

$$P^\mu = \int d^3 x \theta^{0\mu}(x) = \int d^3 x \psi^\dagger(x) (i\partial^\mu) \psi(x) . \quad (4.77)$$

Tenendo conto della forma esplicita dell'operatore di campo e delle relazioni di ortogonalità (4.60) per gli spinori, si ottiene

$$P^\mu = \sum_{r=1}^2 \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} p^\mu \{b^\dagger(\mathbf{p}, r) b(\mathbf{p}, r) - d(\mathbf{p}, r) d^\dagger(\mathbf{p}, r)\} . \quad (4.78)$$

Anche in questo caso, l'espressione (4.78) differisce dalla sua espressione in cui si utilizza l'ordinamento normale per una costante additiva, che è formalmente divergente ma non è osservabile. Si noti che sia le particelle che le loro antiparticelle possiedono energia positiva. Il tensore del momento angolare totale

$$\mathcal{M}^{\mu\nu\lambda}(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \left( x^\nu \partial^\lambda - x^\lambda \partial^\nu + \frac{1}{4} [\gamma^\nu, \gamma^\lambda] \right) \psi(x) , \quad (4.79)$$

è la somma di due contributi; la parte orbitale e la parte dovuta allo spin intrinseco del campo. I generatori delle rotazioni spaziali nello spazio degli stati, per esempio, assumono la forma

$$\begin{aligned} M_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \int d^3 x \mathcal{M}^{0jk}(x) \\ &= \int d^3 x \psi^\dagger(x) \left( i \epsilon_{ijk} x^j \partial^k + \frac{1}{2} \sigma^i \right) \psi(x) = L_i + S_i . \end{aligned} \quad (4.80)$$

#### 4.5.7 Simmetria interna

L'azione (4.46) è invariante per trasformazioni del gruppo  $U(1)$  definite da

$$\psi(x) \rightarrow \psi^\theta(x) = e^{i\theta} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}^\theta(x) = e^{-i\theta} \bar{\psi}(x) \quad , \quad (4.81)$$

dove  $\theta$  è un parametro reale. La corrispondente corrente conservata è

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) \quad , \quad (4.82)$$

e l'operatore di carica  $Q$  risulta essere

$$Q = \int d^3x J^0(x) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{V d^3p}{(2\pi)^3} (b^\dagger(\mathbf{p}, r) b(\mathbf{p}, r) + d(\mathbf{p}, r) d^\dagger(\mathbf{p}, r)) \quad . \quad (4.83)$$

## 5 Spinori chirali

Gli stati di particelle corrispondenti agli spinori con chiralità definita hanno un ruolo fondamentale in Natura; essi intervengono in maniera essenziale nella descrizione della struttura delle interazioni elettrodeboli e nello studio delle simmetrie dinamiche delle interazioni forti. In questo capitolo si introducono gli spinori di Weyl, che corrispondono a spinori con chiralità definita, e si mostra come gli spinori di Dirac si possono decomporre in termini di spinori di Weyl. Si illustrano le proprietà di simmetria della rappresentazione chirale e degli stati con chiralità definita; si considerano i termini di massa di Dirac e di massa di Majorana. Vengono poi presentati gli operatori di campo che corrispondono a particelle di massa nulla con spin 1/2. Infine si ricordano brevemente le simmetrie discrete —che corrispondono alle operazioni di inversione spaziale, di inversione temporale e di coniugazione di carica— nell'ambito delle teorie di campo.

### 5.1 Gruppo di Lorentz

Le trasformazioni del gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$  comprendono le rotazioni spaziali e i boost, che descrivono le trasformazioni delle componenti dei vettori e tensori nel passaggio tra due sistemi di riferimento in moto relativo uniforme. Le matrici di Lorentz si possono parametrizzare nel modo seguente

$$\Lambda = \exp \left[ \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \right], \quad (5.1)$$

dove  $\{\omega_{\mu\nu}\}$  sono variabili reali e le sei matrici  $\{J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}\}$  sono i generatori del gruppo  $SO(3, 1)$

$$\begin{aligned} J^{01} &= \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J^{02} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J^{03} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J^{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & J^{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix} & J^{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Definendo i parametri  $\{\theta_a\}$  ed  $\{\eta_a\}$ , in cui  $a = 1, 2, 3$ , tramite le relazioni

$$\theta_a = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} \omega_{bc}, \quad \eta_a = \omega_{0a}, \quad (5.3)$$

un generico elemento di  $SO(3, 1)$  si può scrivere come

$$\Lambda^\mu{}_\nu = [\Lambda(\theta, \eta)]^\mu{}_\nu = \left[ e^{i(\theta_a J^a + \eta_a K^a)} \right]^\mu{}_\nu, \quad (5.4)$$

dove si è posto

$$J^a = \frac{1}{2} \epsilon^{abc} J^{bc}, \quad K^a = J^{0a}. \quad (5.5)$$

I generatori  $\{J^a, K^a\}$  soddisfano le seguenti relazioni di commutazione, che definiscono le costanti di struttura dell'algebra di  $SO(3, 1)$ ,

$$[J^a, J^b] = i\epsilon_{abc} J^c, \quad [J^a, K^b] = i\epsilon_{abc} K^c, \quad [K^a, K^b] = -i\epsilon_{abc} J^c. \quad (5.6)$$

Utilizzando la forma esplicita (5.2) dei generatori, si ricava anche

$$J^a K^a = 0, \quad J^a J^a - K^a K^a = 3. \quad (5.7)$$

Le rappresentazioni dell'algebra descritta in equazione (5.6) forniscono anche rappresentazioni dell'algebra di  $SL(2, C)$  che è un ricoprimento del gruppo di Lorentz. Introducendo le combinazioni

$$J_R^a = \frac{1}{2} (J^a - iK^a), \quad J_L^a = \frac{1}{2} (J^a + iK^a), \quad (5.8)$$

l'algebra (5.6) assume la forma

$$[J_R^a, J_R^b] = i\epsilon_{abc} J_R^c, \quad [J_L^a, J_L^b] = i\epsilon_{abc} J_L^c, \quad [J_R^a, J_L^b] = 0, \quad (5.9)$$

in cui gli operatori  $\{J_R^a\}$  e  $\{J_L^a\}$  sono hermitiani. Le relazioni (4.9) mostrano che l'algebra di  $SL(2, C)$  è somma diretta di due algebre semplici ciascuna delle quali è isomorfa all'algebra di  $SU(2)$ . Le rappresentazioni unitarie irriducibili di  $SU(2)$  si possono classificare per mezzo del cosiddetto spin  $j$ , che specifica il valore dell'operatore di Casimir  $J^a J^a = j(j+1)$  e determina anche la dimensione  $d$  della rappresentazione tramite la relazione  $d = 2j + 1$ . Le rappresentazioni irriducibili di dimensione finita dell'algebra di  $SL(2, C)$  si possono quindi classificare per mezzo di una coppia ordinata di numeri interi o seminteri  $(j_R, j_L)$ , che rappresentano i valori dello spin per le rappresentazioni di  $\{J_R^a\}$  e di  $\{J_L^a\}$  rispettivamente. Ovvero,  $J_R^a J_R^a = j_R(j_R + 1)$  e similmente  $J_L^a J_L^a = j_L(j_L + 1)$ .

#### 5.1.1 Parità e chiralità

Una trasformazione di parità corrisponde a modificare il verso degli assi cartesiani di tipo spaziale; posto  $x^\mu = (x^0, x^i)$ , per trasformazione di parità si ha

$$x^0 \rightarrow x^0, \quad x^i \rightarrow -x^i. \quad (5.10)$$

In accordo con la relazione (5.10), a seguito di una trasformazione di parità i generatori del gruppo di Lorentz trasformano come

$$J^a \rightarrow J^a \quad , \quad K^a \rightarrow -K^a \quad , \quad (5.11)$$

ovvero, utilizzando le definizioni (5.8), si ottiene

$$J_R^a \rightarrow J_L^a \quad , \quad J_L^a \rightarrow J_R^a \quad . \quad (5.12)$$

Se la rappresentazione  $\rho$  del gruppo  $SL(2, C)$  è invariante per parità —ovvero  $\rho$  è equivalente alla sua trasformata per parità— essa è detta non chirale; in caso contrario,  $\rho$  è una rappresentazione chirale. Per trasformazione di parità, la rappresentazione irriducibile  $(j_R, j_L)$  viene mandata nella rappresentazione  $(j_L, j_R)$ ; la rappresentazione  $(j_R, j_L)$  è chirale se e solo se  $j_R \neq j_L$ . Le rappresentazioni chirali fondamentali sono le rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ .

## 5.2 Rappresentazioni chirali fondamentali

La rappresentazione  $(1/2, 0)$  è

$$J_R^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad , \quad J_L^a = 0 \quad , \quad \text{rappr. } (1/2, 0) \quad (5.13)$$

da cui segue che

$$J^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad , \quad K^a = \frac{i}{2}\sigma^a \quad . \quad \text{rappr. } (1/2, 0) \quad (5.14)$$

Mentre la rappresentazione  $(0, 1/2)$  è data da

$$J_R^a = 0 \quad , \quad J_L^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad , \quad \text{rappr. } (0, 1/2) \quad (5.15)$$

da cui si ottiene

$$J^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad , \quad K^a = -\frac{i}{2}\sigma^a \quad . \quad \text{rappr. } (0, 1/2) \quad (5.16)$$

Le matrici che rappresentano gli elementi del gruppo nelle rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$  sono quindi

$$R_{(1/2,0)} = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_a\sigma^a - \frac{1}{2}\eta_a\sigma^a\right) \quad , \quad R_{(0,1/2)} = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_a\sigma^a + \frac{1}{2}\eta_a\sigma^a\right) \quad . \quad (5.17)$$

I tre parametri reali  $\{\theta_a\}$  si riferiscono al sottogruppo delle rotazioni nello spazio, mentre i tre parametri reali  $\{\eta_a\}$  rappresentano le rapidità associate ai boost.

### 5.2.1 Spinori chirali

I vettori bidimensionali su cui agiscono le due rappresentazioni chirali fondamentali di  $SL(2, C)$  sono chiamati spinori di Weyl. Lo spinore con chiralità positiva  $\xi_R$ , chiamato anche spinore destrorso o spinore right, trasforma come

$$\xi_R \rightarrow \xi'_R = R_{(1/2,0)} \xi_R = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_a\sigma^a - \frac{1}{2}\eta_a\sigma^a\right) \xi_R \quad . \quad (5.18)$$

Mentre lo spinore con chiralità negativa  $\xi_L$ , chiamato anche spinore sinistrorso o spinore left, trasforma come

$$\xi_L \rightarrow \xi'_L = R_{(0,1/2)} \xi_L = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_a\sigma^a + \frac{1}{2}\eta_a\sigma^a\right) \xi_L \quad . \quad (5.19)$$

Se gli spinori  $\xi_R$  e  $\xi_L$  sono dei campi, cioè dipendono dalle coordinate  $x$  dei punti dello spazio-tempo, le leggi di trasformazione coinvolgono le componenti degli spinori —come mostrato in equazioni (5.18) e (5.19)— e contemporaneamente la dipendenza funzionale dalle coordinate. Tutte le rappresentazioni irriducibili dell'algebra di  $SU(2)$  si ottengono decomponendo il prodotto tensore di varie rappresentazioni fondamentali ( $j = 1/2$ ). Similmente, tutte le rappresentazioni finite dimensionali di  $SL(2, C)$  sono contenute [10] nei vari prodotti tensoriali delle rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ .

### 5.2.2 Proprietà di coniugazione

Una trasformazione di parità scambia tra loro le rappresentazioni  $(1/2, 0)$  e  $(0, 1/2)$ , ovvero

$$\xi_R \rightarrow \xi_L \quad , \quad \xi_L \rightarrow \xi_R \quad . \quad (5.20)$$

Le matrici  $R_{(1/2,0)}$  e  $R_{(0,1/2)}$  di equazione (5.17) verificano le relazioni

$$R_{(1/2,0)}^\dagger = R_{(0,1/2)}^{-1} \quad , \quad R_{(0,1/2)}^\dagger = R_{(1/2,0)}^{-1} \quad . \quad (5.21)$$

Pertanto, utilizzando gli spinori  $\xi_R$  e  $\xi_L$ , si possono formare gli scalari di Lorentz

$$\xi_R^\dagger \xi_L \quad , \quad \xi_L^\dagger \xi_R \quad . \quad (5.22)$$

Come verrà mostrato in Sezione XX, il termine lagrangiano di massa di Dirac  $\mathcal{L}_m = m\bar{\psi}\psi$  —per uno spinore di Dirac  $\psi$ — è uno scalare di Lorentz costruito con le componenti right  $\psi_R$  e left di  $\psi_L$  di  $\psi$  e corrisponde alla somma degli scalari (5.22).

Le matrici di Pauli (4.51) godono delle seguenti proprietà

$$(\sigma^1)^* = \sigma^1 \quad , \quad (\sigma^2)^* = -\sigma^2 \quad , \quad (\sigma^3)^* = \sigma^3 \quad . \quad (5.23)$$

Introducendo la matrice unitaria  $(i\sigma^2)$ ,

$$(i\sigma^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (i\sigma^2)^{-1} = -(i\sigma^2) \quad , \quad (5.24)$$

si ottiene, per  $a = 1, 2, 3$ ,

$$(i\sigma^2) (\sigma^a)^* (i\sigma^2)^{-1} = -\sigma^a = (i\sigma^2)^{-1} (\sigma^a)^* (i\sigma^2) \quad , \quad (5.25)$$

da cui segue che

$$(i\sigma^2) R_{(1/2,0)}^* (i\sigma^2)^{-1} = R_{(0,1/2)} \quad , \quad (-i\sigma^2) R_{(0,1/2)}^* (-i\sigma^2)^{-1} = R_{(1/2,0)} \quad . \quad (5.26)$$

Le proprietà (5.26) implicano che, dato uno spinore right  $\xi_R$ , è possibile costruire uno spinore left  $\tilde{\xi}_L$  —che verà denotato con  $\xi_R^C$ —

$$\tilde{\xi}_L = \xi_R^C = (i\sigma^2)\xi_R^* \quad . \quad (5.27)$$

Similmente, dato uno spinore left  $\xi_L$ , è possibile costruire uno spinore right  $\tilde{\xi}_R = \xi_L^C$ ,

$$\tilde{\xi}_R = \xi_L^C = (-i\sigma^2)\xi_L^* \quad . \quad (5.28)$$

Gli spinori  $\xi_R^C$  e  $\xi_L^C$  sono detti gli spinori  $C$ -coniugati di  $\xi_R$  e di  $\xi_L$ . Siccome le equazioni (5.21) si possono riscrivere nella forma

$$R_{(1/2,0)}^T = \left( R_{(0,1/2)}^* \right)^{-1} \quad , \quad R_{(0,1/2)}^T = \left( R_{(1/2,0)}^* \right)^{-1} \quad , \quad (5.29)$$

è facile dimostrare che per mezzo degli spinori  $\xi_{R1}$  e  $\xi_{R2}$  (oppure  $\xi_{L1}$  e  $\xi_{L2}$ ) si possono formare gli scalari di Lorentz

$$\xi_{R1}^T (i\sigma^2)\xi_{R2} \quad , \quad \xi_{L1}^T (i\sigma^2)\xi_{L2} \quad . \quad (5.30)$$

Come verrà discusso in Sezione XX, il termine lagrangiano di massa per uno spinore di Majorana è uno scalare di Lorentz costruito con un singolo spinore chirale che possiede la struttura mostrata in ciascuna delle espressioni (5.30).

### 5.3 Spinori di Dirac e spinori di Weyl

Uno spinore di Dirac  $\psi$  —che possiede quattro componenti— si può decomporre nella somma di due spinori di Weyl; più precisamente,  $\psi$  è somma di uno spinore right e di uno spinore left. Utilizzando la rappresentazione (4.50) delle matrici gamma, i proiettori  $p_R$  e  $p_L$  assumono la forma

$$p_R \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad p_L \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (5.31)$$

Dalla relazione di completezza  $1 = p_R + p_L$  segue che lo spinore  $\psi$  a quattro componenti si può decomporre nella somma di due spinori, ciascuno dei quali ha due componenti indipendenti,

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad , \quad (5.32)$$

dove si è posto

$$\psi_R = p_R \psi \quad , \quad \psi_L = p_L \psi \quad . \quad (5.33)$$

Utilizzando la forma esplicita dei proiettori, si ricava

$$\psi_R = \begin{bmatrix} \xi_R \\ \xi_R \end{bmatrix} \quad , \quad \psi_L = \begin{bmatrix} \xi_L \\ -\xi_L \end{bmatrix} \quad , \quad (5.34)$$

dove

$$\xi_R = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_3 \\ \psi_2 + \psi_4 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 - \psi_3 \\ \psi_2 - \psi_4 \end{pmatrix} \quad . \quad (5.35)$$

Resta da dimostrare che gli spinori a due componenti  $\xi_R$  e  $\xi_L$ , dati in equazione (5.35), possiedono le giuste proprietà di trasformazione (5.18) e (5.19). L'azione di una trasformazione di Lorentz sulle componenti dello spinore di Dirac è mostrata in equazione (4.53); per trasformazioni infinitesime si ottiene

$$\psi \rightarrow \psi' = \psi + \frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} \psi \quad , \quad (5.36)$$

dove i generatori  $\{\Sigma^{\mu\nu}\}$  sono dati in equazione (4.54). Nella rappresentazione (4.50), si ha

$$\Sigma^{0a} = i \begin{bmatrix} 0 & \sigma^a \\ \sigma^a & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \Sigma^{ab} = \epsilon^{abc} \begin{bmatrix} \sigma^c & 0 \\ 0 & \sigma^c \end{bmatrix} \quad , \quad (5.37)$$

e quindi

$$\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \Sigma^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} i\theta_a \sigma^a / 2 & -\eta_a \sigma^a / 2 \\ -\eta_a \sigma^a / 2 & i\theta_a \sigma^a / 2 \end{bmatrix} \quad . \quad (5.38)$$

Pertanto, il calcolo esplicito della trasformazione (5.36) conduce al risultato

$$\begin{aligned}\xi_R \rightarrow \xi'_R &= \xi_R + \left( \frac{i}{2} \theta_a \sigma^a - \frac{1}{2} \eta_a \sigma^a \right) \xi_R, \\ \xi_L \rightarrow \xi'_L &= \xi_L + \left( \frac{i}{2} \theta_a \sigma^a + \frac{1}{2} \eta_a \sigma^a \right) \xi_L.\end{aligned}\quad (5.39)$$

L'equazione (5.39) è in accordo con le leggi di trasformazione (5.18) e (5.19) e mostra che  $\xi_R$  è uno spinore right mentre  $\xi_L$  è uno spinore left. Usualmente si dice che  $\psi_R$  rappresenta la componente right di  $\psi$  mentre  $\psi_L$  rappresenta la componente left; tali componenti corrispondono a stati fermionici con chiralità definita.

### 5.3.1 Massa di Dirac e chiralità

La lagrangiana libera per uno spinore di Dirac massiccio assume la forma

$$\mathcal{L}_0 = \psi^\dagger (i\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu - m\gamma^0) \psi. \quad (5.40)$$

Utilizzando le componenti right e left dello spinore  $\psi$  e ricordando che la matrice  $\gamma^5$  anticommuta con le matrici gamma, si ottiene

$$\mathcal{L}_0 = \psi_R^\dagger i\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + \psi_L^\dagger i\gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_L^\dagger \gamma^0 \psi_R - m\psi_R^\dagger \gamma^0 \psi_L. \quad (5.41)$$

L'equazione (5.41) mostra che, nella lagrangiana per uno spinore di Dirac libero, il termine cinetico derivativo —che contiene le derivate del campo  $\psi$ — preserva la chiralità, mentre il termine di massa di Dirac non preserva la chiralità, poiché accoppia spinori left con spinori right.

## 5.4 Rappresentazione chirale

Per evidenziare le diverse componenti chirali degli spinori, è conveniente introdurre una rappresentazione delle matrici gamma di Dirac in cui  $\gamma_5$  risulti diagonale. Questa nuova rappresentazione, che sarà chiamata la rappresentazione chirale, è definita da

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

dove  $\{\sigma^i\}$  sono le matrici di Pauli che verificano le relazioni

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}, \quad [\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k. \quad (5.43)$$

Nella rappresentazione (5.42) si ottiene

$$\gamma^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

e, conseguentemente, i proiettori sulle componenti right e left degli spinori di Dirac assumono la forma seguente

$$p_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad p_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.45)$$

Lo spinore di Dirac  $\psi$  si decompone quindi nelle sue due componenti chirali nel modo seguente

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{bmatrix}, \quad \psi^\dagger = \left[ \psi_R^\dagger, \psi_L^\dagger \right]. \quad (5.46)$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni

$$\gamma^0 \gamma^\mu = \begin{bmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

in cui

$$\sigma^\mu = (1, \sigma^i), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i). \quad (5.48)$$

L'azione per uno spinore di Dirac libero  $\psi$  assume la forma

$$S_0 = \int d^4x \left\{ \psi_R^\dagger i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + \psi_L^\dagger i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_L^\dagger \psi_R - m\psi_R^\dagger \psi_L \right\}, \quad (5.49)$$

da cui risulta che termine lagrangiano di massa di Dirac

$$\mathcal{L}_m = -m\bar{\psi}\psi = -m \left( \psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L \right) \quad (5.50)$$

corrisponde alla somma degli scalari di tipo (5.22).

### 5.4.1 Algebra delle matrici sigma

Utilizzando le definizioni (5.48) si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) &= \eta^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \\ \bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}_\mu &= -2\bar{\sigma}^\nu, \quad \sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu \sigma_\mu = -2\sigma^\nu.\end{aligned}\quad (5.51)$$



Definendo

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \quad , \quad \bar{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad , \quad (5.52)$$

si ricava

$$\sigma^{0j} = i\sigma^j \quad , \quad \bar{\sigma}^{0j} = -i\sigma^j \quad , \quad \sigma^{ij} = \epsilon^{ijk} \sigma^k = \bar{\sigma}^{ij} \quad . \quad (5.53)$$

Dalle equazioni (5.53) segue che

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\tau\lambda} \sigma^{\tau\lambda} \quad . \quad (5.54)$$

Le seguenti relazioni risulteranno utili in seguito

$$\text{tr} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu) = 2\eta^{\mu\nu} \quad , \quad (5.55)$$

$$\text{tr} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu \bar{\sigma}^\tau \sigma^\lambda) = 2 (\eta^{\mu\nu} \eta^{\tau\lambda} - \eta^{\mu\tau} \eta^{\nu\lambda} + \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\tau} - i\epsilon^{\mu\nu\tau\lambda}) \quad . \quad (5.56)$$

I generatori  $\{\Sigma^{\mu\nu}\}$  del gruppo di Lorentz, che agiscono sulle componenti dello spinore, risultano essere

$$\Sigma^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^{\mu\nu} \end{bmatrix} \quad . \quad (5.57)$$

La rappresentazione chirale delle matrici gamma è legata alla rappresentazione standard (4.50) tramite una trasformazione unitaria. Siano  $\gamma_S^\mu$  le matrici gamma della rappresentazione standard, si ha

$$\gamma^\mu = W^{-1} \gamma_S^\mu W \quad , \quad \text{dove} \quad W = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad . \quad (5.58)$$

In alcune circostanze, come nel calcolo delle anomalie chirali di gauge, risulta conveniente utilizzare la rappresentazione chirale delle matrici gamma. Naturalmente, tutti i risultati e tutte le conseguenze fisiche che ne conseguono non dipendono dalla particolare rappresentazione che viene utilizzata.

#### 5.4.2 Spinori di Majorana

Uno spinore di Majorana  $\psi_M$  è uno spinore a quattro componenti che —a differenza di uno spinore di Dirac— è invariante per coniugazione di carica. Questo significa che  $\psi_M$  possiede solamente due componenti indipendenti. Si potrebbe utilizzare un campo spinoriale di Majorana per descrivere una ipotetica particella di spin 1/2 che

coincide con la sua antiparticella. In rappresentazione chirale,  $\psi_M$  può essere scritto nella forma

$$\psi_M = \begin{bmatrix} \xi_L^C \\ \xi_L \end{bmatrix} \quad , \quad \text{o equivalentemente} \quad \psi_M = \begin{bmatrix} \xi_R \\ \xi_R^C \end{bmatrix} \quad , \quad (5.59)$$

dove, per esempio, le due componenti di  $\xi_L$  rappresentano le componenti indipendenti di  $\psi_M$ . Un termine lagrangiano di massa di Majorana vale

$$\mathcal{L}_m^{Maj.} = -m \bar{\psi}_M \psi_M = -m \left[ (\xi_L^C)^\dagger \xi_L + \text{h.c.} \right] = -m \left[ \xi_L^T (i\sigma^2) \xi_L + \text{h.c.} \right] \quad (5.60)$$

e risulta non nullo qualora le componenti dello spinore  $\xi_L$  siano variabili anticommuntanti, ovvero quando le componenti di  $\xi_L$  siano descritte da variabili di Grassmann (questo punto verrà discusso nel Capitolo 9). Il possibile utilizzo degli spinori di Majorana per descrivere la massa ed il mixing dei vari tipi di neutrini è stato discusso, per esempio, da Ramond nella referenza [19].

### 5.5 Operatore di campo spinoriale chirale

Gli stati con chiralità definita di una particella di massa nulla e spin 1/2 —che non coincide con la sua antiparticella— possono essere descritti da uno spinore di Weyl; più precisamente, questi stati possono essere descritti da un campo spinoriale right oppure da un campo spinoriale left. Siccome ogni spinore right si può sempre interpretare come il  $C$ -coniugato di uno spinore left, è sufficiente considerare il campo spinoriale left  $\chi(x)$ . L'azione libera per il campo spinoriale chirale left  $\chi(x)$  è data

$$S_0 = \int d^4x \chi^\dagger(x) i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi(x) \quad , \quad (5.61)$$

e la corrispondente equazione del moto è

$$i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi(x) = 0 \quad . \quad (5.62)$$

L'equazione (5.62) implica

$$\partial^\mu \partial_\mu \chi(x) = 0 \quad , \quad (5.63)$$

quindi  $\chi(x)$  descrive particelle a massa nulla. Un insieme completo di funzioni d'onda che soddisfano l'equazione (5.62) è rappresentato da

$$\left\{ w(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \quad , \quad w^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\} \quad , \quad (5.64)$$

in cui  $\mathbf{p} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^3$ ,  $p^0 = |\mathbf{p}|$  e lo spinore a due componenti  $w(\mathbf{p})$  descrive lo stato di polarizzazione di una particella con elicità definita sinistrorsa

$$\frac{\sigma^i p^i}{|\mathbf{p}|} w(\mathbf{p}) = -w(\mathbf{p}). \quad (5.65)$$

Introducendo la notazione  $\mathbf{p} = |\mathbf{p}|(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , si può porre

$$w(\mathbf{p}) = \sqrt{2|\mathbf{p}|} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (5.66)$$

e valgono le relazioni

$$w^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\sigma}^\mu w(\mathbf{p}) = 2p^\mu, \quad w^\dagger_\alpha(\mathbf{p}) w_\beta(\mathbf{p}) = (\sigma^\mu p_\mu)_{\alpha\beta}. \quad (5.67)$$

L'operatore di campo  $\chi(x)$  assume la forma

$$\chi(x) = \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{w(\mathbf{p})}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}} \left\{ b(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} + d^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \right\}, \quad (5.68)$$

$$\chi^\dagger(x) = \int \frac{V d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{w^\dagger(\mathbf{p})}{\sqrt{2|\mathbf{p}|}} \left\{ b^\dagger(\mathbf{p}) \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} + d(\mathbf{p}) \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{V}} \right\}, \quad (5.69)$$

dove  $b(\mathbf{p})$  and  $b^\dagger(\mathbf{p})$  sono gli operatori di annichilazione e di creazione per una particella, mentre  $d(\mathbf{p})$  e  $d^\dagger(\mathbf{p})$  sono i corrispondenti operatori per la sua antiparticella. Gli anticommutatori non nulli sono

$$\{b(\mathbf{p}), b^\dagger(\mathbf{k})\} = \{d(\mathbf{p}), d^\dagger(\mathbf{k})\} = \frac{(2\pi)^3}{V} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (5.70)$$

## 5.6 Parità

La trasformazione di parità, denotata con  $P$ , modifica il verso degli assi cartesiani di tipo spaziale e pertanto si ha

$$P : (x^0, x^i) \rightarrow (x'^0, x'^i) = (x^0, -x^i). \quad (5.71)$$

Un campo scalare  $\phi_S(x)$  ed un campo pseudo scalare  $\phi_{PS}(x)$  trasformano come

$$\begin{aligned} P : \phi_S(x^0, x^i) &\rightarrow \phi_S(x^0, -x^i), \\ P : \phi_{PS}(x^0, x^i) &\rightarrow -\phi_{PS}(x^0, -x^i). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Le componenti di un campo vettoriale  $V_\mu(x) = \{V_0(x), V_j(x)\}$  soddisfano

$$\begin{aligned} P : V_0(x^0, x^i) &\rightarrow V_0(x^0, -x^i), \\ P : V_j(x^0, x^i) &\rightarrow -V_j(x^0, -x^i), \end{aligned} \quad (5.73)$$

mentre per un campo vettoriale assiale  $A_\mu(x) = \{A_0(x), A_j(x)\}$  si ottiene

$$\begin{aligned} P : A_0(x^0, x^i) &\rightarrow -A_0(x^0, -x^i), \\ P : A_j(x^0, x^i) &\rightarrow A_j(x^0, -x^i). \end{aligned} \quad (5.74)$$

La trasformazione di parità agisce [11] sul campo spinoriale di Dirac  $\psi(x)$  nel modo seguente

$$P : \psi(x^0, x^i) \rightarrow \gamma_0 \psi(x^0, -x^i). \quad (5.75)$$

In termini delle componenti right  $\psi_R(x)$  e left  $\psi_L(x)$  di  $\psi(x)$ , la trasformazione di parità assume la forma

$$P : \psi_R(x^0, x^i) \rightarrow \psi_L(x^0, -x^i), \quad P : \psi_L(x^0, x^i) \rightarrow \psi_R(x^0, -x^i). \quad (5.76)$$

L'equazione (5.75) determina il comportamento dei bilineari covarianti (4.74) per trasformazioni di parità. Il  $P$ -trasformato di un campo spinoriale left (right) si comporta come un campo spinoriale right (left). L'azione libera di un singolo campo spinoriale chirale (left, oppure right) non è invariante per una trasformazione di parità, a meno di non combinarla anche con la coniugazione di carica.

## 5.7 Coniugazione di carica

L'operazione di coniugazione di carica, denotata con  $C$ , equivale a scambiare tra loro il ruolo delle particelle e delle antiparticelle. Questo significa modificare i segni dei numeri quantici interni di un sistema fisico senza modificare i numeri quantici cosiddetti orbitali —cioè i numeri quantici associati alle proprietà cinematiche. I numeri quantici interni sono collegati all'azione di opportune simmetrie cosiddette interne —ovvero che commutano col gruppo di Poincaré— che agiscono sui campi: i numeri quantici sono determinati dagli autovalori dei generatori del gruppo di simmetria. Per ogni rappresentazione unitaria  $R$  di un gruppo compatto, è possibile definire la rappresentazione complessa coniugata, che verrà indicata con  $R^*$ .

**Nota 7. Rappresentazione complessa coniugata.** Si consideri il caso —fisicamente interessante— in cui  $R$  denota una rappresentazione irriducibile di un gruppo unitario  $U(N)$ , con  $N$  fissato e arbitrario. Ogni elemento di  $R$  si può scrivere come

$\exp(i\theta^a R^a)$  dove  $\theta^a$  sono parametri reali e le matrici  $R^a$ , che rappresentano i generatori del gruppo, sono hermitiane. Gli elementi della rappresentazione  $R^*$  sono perciò della forma  $\exp(-i\theta^a R^{*a}) = \exp(-i\theta^a R^{aT}) = \exp(i\theta^a (-R^{aT}))$  dove  $R^{aT}$  rappresenta la matrice trasposta di  $R^a$ . I generatori  $\tilde{R}^a$  della rappresentazione  $R^*$  sono dunque dati da (o unitariamente equivalenti a)  $\tilde{R}^a = -R^{aT}$ . Quindi gli autovalori dei generatori  $\tilde{R}^a$  di  $R^*$  si ottengono dagli autovalori dei generatori  $R^a$  di  $R$  mediante un semplice cambiamento di segno. Quindi, effettuare la trasformazione di coniugazione di carica corrisponde “essenzialmente” a sostituire ogni campo col suo complesso coniugato.

Per un campo scalare complesso  $\phi(x)$ , si può porre

$$C : \phi(x) \rightarrow \phi^*(x). \quad (5.77)$$

Un campo complesso si può decomporre nella somma di due campi reali; quindi, diagonalizzando l'azione della trasformazione (5.77), è possibile definire l'azione della coniugazione di carica anche su campi reali. Un campo reale può essere pari per  $C$ -coniugazione oppure può cambiare segno. Siccome il campo elettromagnetico  $A_\mu(x)$  accoppia alla corrente che definisce la carica elettrica, si ha

$$C : A_\mu(x) \rightarrow -A_\mu(x). \quad (5.78)$$

Per uno spinore di Dirac  $\psi(x)$  la coniugazione di carica agisce [11] come

$$\begin{aligned} C : \psi_\alpha(x) &\rightarrow (i\gamma^2)_{\alpha\beta} \psi_\beta^\dagger(x), \\ C : \bar{\psi}_\alpha(x) &\rightarrow -\psi_\beta(x) (i\gamma^2)_{\beta\alpha}^{-1}, \end{aligned} \quad (5.79)$$

dove la matrice  $\gamma^2$  è definita in equazione (4.50). Sulle componenti chirali di  $\psi(x)$ , la trasformazione (5.79) assume la forma

$$\begin{aligned} C : \psi_R(x) &\rightarrow (-i\sigma^2) \psi_L^*(x) = \psi_L^C(x), \\ C : \psi_L(x) &\rightarrow (i\sigma^2) \psi_R^*(x) = \psi_R^C(x). \end{aligned} \quad (5.80)$$

L'azione combinata della parità e della  $C$ -coniugazione sulle componenti con chiralità definita dello spinore di Dirac risulta essere

$$\begin{aligned} CP : \psi_R(x^0, x^i) &\rightarrow \psi_R^C(x^0, -x^i), \\ CP : \psi_L(x^0, x^i) &\rightarrow \psi_L^C(x^0, -x^i). \end{aligned} \quad (5.81)$$

Come nel caso della trasformazione di parità, l'azione libera per un singolo campo spinoriale chirale (left, o right) non è invariante per  $C$ -coniugazione; essa risulta invariante per una trasformazione di  $CP$  che è composta dalla trasformazione di parità e dalla coniugazione di carica.

## 5.8 Inversione temporale

La trasformazione di inversione temporale, che è usualmente denotata con  $T$ , cambia il segno della coordinata temporale

$$T : (x^0, x^i) \rightarrow ((x')^0, (x')^i) = (-x^0, x^i). \quad (5.82)$$

L'effetto di una trasformazione di inversione temporale consiste nel modificare il verso dell'evoluzione temporale dei campi. L'inversione temporale è implementata da un operatore antiunitario [11]. Questo significa che, nell'effettuare la  $T$ -coniugazione di una variabile operatoriale, occorre prendere il complesso coniugato di tutti i coefficienti numerici che appaiono nella composizione della variabile stessa. Nel caso del potenziale vettore  $A_\mu(x)$  dell'elettromagnetismo, si ha [11]

$$T : A_0(x^0, x^i) \rightarrow A_0(-x^0, x^i) \quad , \quad T : A_j(x^0, x^i) \rightarrow -A_j(-x^0, x^i). \quad (5.83)$$

Utilizzando la base (4.50) delle matrici gamma, la trasformazione  $T$  agisce su uno spinore di Dirac  $\psi(x)$  come [11]

$$T : \psi(x^0, x^i) \rightarrow (i\gamma^1\gamma^3) \psi(-x^0, x^i). \quad (5.84)$$

Per campi scalari, la  $T$ -coniugazione diagonalizzata agisce come

$$T : \phi(x^0, x^i) \rightarrow \pm \phi(-x^0, x^i). \quad (5.85)$$

La scelta del segno nell'equazione (5.85) è fissata [11] dal richiedere che la densità lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$  e ogni corrente vettoriale conservata  $J_\mu(x)$  trasformino come

$$\begin{aligned} T : \mathcal{L}(x^0, x^i) &\rightarrow \mathcal{L}(-x^0, x^i), \\ T : J_\mu(x^0, x^i) &\rightarrow J^\mu(-x^0, x^i). \end{aligned} \quad (5.86)$$

### 5.8.1 Teorema CPT

In generale, per ogni modello di teoria di campo la cui dinamica è locale, causale, relativisticamente covariante ed è descritta da una densità lagrangiana  $\mathcal{L}(x)$ , vale il Teorema  $CPT$ . Questo teorema afferma che è possibile fissare i segni (ovvero le fasi) associati alle singole trasformazioni  $C$ ,  $P$  e  $T$  in modo tale [10, 12, 25, 26] che

$$CPT : \mathcal{L}(x^0, x^i) \rightarrow \mathcal{L}(-x^0, -x^i). \quad (5.87)$$

L'invarianza per una trasformazione di  $CPT$  significa che, per ogni processo fisico elementare, l'ampiezza di transizione tra lo stato iniziale  $|in\rangle$  e lo stato finale  $|out\rangle$

coincide con l'ampiezza di transizione relativa al nuovo processo che si ottiene modificando il verso degli assi spaziali, sostituendo ogni particella con la propria antiparticella e invertendo formalmente il verso dell'asse temporale così da scambiare tra loro gli stati asintotici  $|in\rangle$  e  $|out\rangle$ .

### 5.8.2 CPT e prolungamento analitico

I dati sperimentali mostrano che, per qualunque sistema fisico e in qualunque fenomeno osservato, i valori assunti dall'energia sono limitati inferiormente; questa proprietà è sovente chiamata positività dell'energia. In effetti, scegliendo in maniera opportuna lo zero dell'energia, è possibile rendere positivi tutti i valori assunti dall'energia. Conseguentemente, nelle teorie di campo che si riferiscono ai fenomeni naturali è possibile effettuare un prolungamento analitico nella dipendenza dei vari campi dalla coordinata temporale. Infatti, l'evoluzione temporale per gli stati di singola particella introduce il tipico fattore di fase

$$\exp(-itE) = \exp[-i(t_2 - t_1)E] , \quad (5.88)$$

dove  $t = t_2 - t_1$  rappresenta l'intervallo di tempo trascorso tra l'istante  $t_1$  di creazione della particella e l'istante  $t_2$  di una sua possibile osservazione. Siccome ogni particella evolve nel tempo solo dopo essere stata creata, si ha necessariamente  $t = t_2 - t_1 > 0$ . Essendo l'energia  $E$  positiva e  $t > 0$ , il prolungamento analitico assume la forma  $t \rightarrow -i\tau$ , con  $\tau > 0$ , e le teorie definite in questo modo prendono il nome di teorie euclidee [26, 27]. L'utilità del prolungamento analitico nella regione euclidea per il calcolo delle ampiezze di transizione verrà illustrata nei prossimi capitoli.

In una teoria di campo euclidea, il gruppo di Lorentz  $SO(3, 1)$  deve essere rimpiazzato dal gruppo compatto  $SO(4)$  delle matrici ortogonali  $4 \times 4$ .  $SO(4)$  è isomorfo al gruppo delle trasformazioni lineari connesse all'identità di  $\mathbb{R}^4$  che sono isometrie dello spazio quadrimensionale euclideo. La matrice  $4 \times 4 -1$ , che differisce dalla matrice identica unicamente per il segno, appartiene ad  $SO(4)$ ; quindi la trasformazione (5.87) può essere interpretata nella regione euclidea come rappresentante di  $-1$ , che è un particolare elemento di  $SO(4)$ . In questo senso, la validità del teorema  $CPT$  nello spazio di Minkowski può essere intesa [10] come un effetto dovuto alla simmetria  $SO(4)$  nella regione euclidea.

### 5.8.3 Teorema di Spin e Statistica

Infine, nell'ambito delle teorie quantistiche di campo, la connessione [12, 14, 25, 26] tra spin e statistica è determinata dalla richiesta di località, di covarianza relativisti-

ca e di causalità. Utilizzando operatori di campo locali ed imponendo la covarianza relativistica, la causalità è verificata quando i campi che descrivono particelle di spin intero soddisfano le regole di commutazione canoniche ed i campi associati a particelle di spin semintero soddisfano le regole di anticommutazione. A sua volta, questo implica che particelle con spin semintero seguano la statistica di Fermi-Dirac mentre particelle di spin nullo o di spin intero seguano la statistica di Bose-Einstein.

## 5.9 Direzione del tempo

I dati sperimentali mostrano che, nei processi tra particelle elementari, si verifica una notevole asimmetria rispetto alla direzione del tempo. Per esempio, il mesone pseudoscalare  $\pi^0$  decade in due fotoni, mentre il processo inverso in cui due fotoni producono una particella  $\pi^0$  non si osserva. Infatti, dato un insieme di  $N_0$  mesoni  $\pi^0$  ad un certo istante  $t_0$ , al passare del tempo il numero  $N(t)$  di  $\pi^0$  diminuisce secondo una legge di tipo esponenziale  $N(t) \simeq N_0 e^{-(t-t_0)/\tau}$ , per  $(t - t_0) \geq 0$ . Questo processo è irreversibile e identifica una direzione nello scorrere del tempo. Naturalmente, lo stesso fenomeno si osserva anche nel caso in cui, al posto di mesoni  $\pi^0$ , si consideri un insieme di particelle o nuclei instabili, i cui prodotti di decadimento non sono necessariamente fotoni. In geologia, per esempio, il numero di certi isotopi radioattivi presenti in un campione di materiale viene spesso utilizzato come orologio per datare l'età del campione.

L'esistenza di una direzione determinata nello scorrere del tempo per i processi tra particelle elementari non è in contraddizione con l'invarianza per trasformazioni di inversione temporale, oppure di  $CPT$ , in teorie di campo. Infatti, l'ampiezza di transizione tra lo stato iniziale di  $\pi^0$  e lo stato finale di due fotoni coincide con la corrispondente ampiezza di transizione tra lo stato iniziale di due fotoni e lo stato finale di  $\pi^0$ . Ma, mentre qualunque sia lo stato iniziale del  $\pi^0$  esso può decadere in due fotoni, l'insieme dei possibili stati iniziali di due fotoni che possono produrre un  $\pi^0$  ha misura nulla nello spazio degli stati di due fotoni. Infatti, affinché il processo  $\gamma + \gamma \rightarrow \pi^0$  abbia luogo, i valori  $k_1$  e  $k_2$  degli impulsi dei due fotoni (con  $k_1^2 = 0 = k_2^2$ ) devono essere tali per cui  $(k_1 + k_2)^2 = m_{\pi^0}^2$ . Questo vincolo seleziona un insieme di stati di misura nulla rispetto a tutti i possibili stati di due fotoni, in cui i valori di  $k_1$  e  $k_2$  verificano  $k_1^2 = 0 = k_2^2$ , ma sono per il resto arbitrari.

Risulta pertanto che l'origine della cosiddetta freccia del tempo, che si osserva nei processi tra particelle elementari, ha fondamentalmente la stessa origine delle freccia del tempo che si osserva nei processi tra sistemi macroscopici, costituiti da un numero elevato di costituenti elementari.

## 6 Calcolo dei processi elementari

In questo capitolo si espongono le regole per il calcolo delle sezioni d'urto e delle vite medie —relative ai processi elementari tra particelle— a partire dalle ampiezze di transizione; queste regole vengono illustrate per mezzo di vari esempi riguardanti la fisica delle alte energie.

### 6.1 Matrice S

Assumendo di conoscere —in termini degli operatori di campo— l'espressione dell'azione di interazione  $S_I = \int d^4x \mathcal{L}_I(\Phi(x))$  che è rilevante per un determinato modello o per un determinato processo, l'operatore di evoluzione temporale tra stati asintotici è dato da

$$U(+\infty, -\infty) = T \exp \left( +i \int d^4x \mathcal{L}_I(\Phi(x)) \right), \quad (6.1)$$

Il T-prodotto per gli operatori di campo è definito in equazioni (3.9) e (3.10).

Generalmente l'operatore  $U(+\infty, -\infty)$  è il prodotto di due termini:  $U(+\infty, -\infty) = e^{i\theta_0} \mathbb{S}$ . Il primo termine  $e^{i\theta_0}$  è un semplice multiplo dell'identità che assume la forma di un fattore di fase. Nel connettere tra loro gli stati asintotici a tempi  $\pm\infty$ ,  $e^{i\theta_0}$  corrisponde ad un unico fattore moltiplicativo per tutti i vettori di stato. Mentre il secondo termine, che è non banale e contiene tutta l'informazione sui processi di interazione tra le particelle, prende il nome di matrice  $\mathbb{S}$

$$T(e^{iS_I}) = U(+\infty, -\infty) = e^{i\theta_0} \mathbb{S} = e^{i\theta_0} (1 + i\mathbb{T}). \quad (6.2)$$

Siccome l'operatore  $U(+\infty, -\infty)$  è unitario, anche  $\mathbb{S}$  è unitaria. La matrice  $\mathbb{S}$ , a sua volta, si decompone nella somma dell'operatore identità più  $i$  volte la cosiddetta matrice  $\mathbb{T}$ . Convenzionalmente, il fattore di fase  $e^{i\theta_0}$  non viene incluso nelle ampiezze di transizione; questo argomento verrà discusso nei capitoli seguenti. L'ampiezza di transizione  $A(\text{out}; \text{in})$  tra stati asintotici normalizzati, ovvero tra uno stato iniziale  $|\text{in}\rangle$  ed uno stato finale  $|\text{out}\rangle$  entrambi di norma unitaria, corrisponde agli elementi di matrice di  $\mathbb{S}$

$$A(\text{out}; \text{in}) = \langle \text{out} | \mathbb{S} | \text{in} \rangle = e^{-i\theta_0} \langle \text{out} | T(e^{iS_I}) | \text{in} \rangle. \quad (6.3)$$

Per calcolare l'ampiezza (6.3) si può utilizzare uno sviluppo di Taylor di  $e^{iS_I}$  in potenze della lagrangiana di interazione,

$$A(\text{out}; \text{in}) = e^{-i\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \langle \text{out} | T \left[ \int d^4x \mathcal{L}_I(\Phi(x)) \right]^n | \text{in} \rangle. \quad (6.4)$$

La lagrangiana di interazione è in generale la somma di vari termini ciascuno dei quali è un monomio nei campi; ogni termine è proporzionale alla costante di accoppiamento relativa al tipo di interazione che si considera. Il calcolo dell'ampiezza  $A(\text{out}; \text{in})$  mediante lo sviluppo in potenze di  $\mathcal{L}_I(\Phi(x))$  equivale pertanto ad uno sviluppo di  $A(\text{out}; \text{in})$  in potenze delle costanti di accoppiamento. Tale metodo di calcolo si chiama sviluppo perturbativo.

### 6.2 Ampiezze e probabilità

Si consideri un sistema costituito da vari tipi di particelle che verranno denotate con un indice  $\beta$ . Ad ogni tipo di particella è associato un operatore di campo  $\phi_\beta(x)$  che è definito in termini degli operatori di annichilazione e di creazione  $a_\beta$  e  $a_\beta^\dagger$ . Ogni stato di singola particella di tipo  $\beta$  è caratterizzato dal valore  $\mathbf{k}$  dell'impulso spaziale ed, eventualmente, da altri numeri quantici. Per semplificare le notazioni, tutti i numeri quantici ad esclusione dell'impulso  $\mathbf{k}$  non verranno denotati in maniera esplicita ma saranno sottintesi.

#### 6.2.1 Stati asintotici

Si assuma che lo stato iniziale contenga  $m$  particelle dotate di impulsi  $\{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_m\}$ ,

$$|\text{in}\rangle = |\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m\rangle = a_{\beta_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) a_{\beta_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) \dots a_{\beta_m}^\dagger(\mathbf{k}_m) |0\rangle, \quad (6.5)$$

mentre lo stato finale contenga  $n$  particelle con impulsi  $\{\mathbf{k}'_1, \dots, \mathbf{k}'_n\}$ ,

$$|\text{out}\rangle = |\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \dots, \mathbf{k}'_n\rangle = a_{\sigma_1}^\dagger(\mathbf{k}'_1) a_{\sigma_2}^\dagger(\mathbf{k}'_2) \dots a_{\sigma_n}^\dagger(\mathbf{k}'_n) |0\rangle; \quad (6.6)$$

i valori degli impulsi iniziali e di quelli finali siano tutti diversi tra loro. Dopo aver calcolato l'ampiezza di transizione

$$A(\mathbf{k}'; \mathbf{k}) = e^{-i\theta_0} \langle \mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2, \dots, \mathbf{k}'_n | T(e^{iS_I}) | \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_m \rangle, \quad (6.7)$$

si pone il problema di ricavare —dall'ampiezza (6.7)— l'espressione della sezione d'urto o della probabilità di decadimento per le particelle.

#### 6.2.2 Densità di stati nello spazio degli impulsi

Per una singola particella vincolata a muoversi entro una scatola cubica di lato  $L$  (e, quindi, di volume  $V = L^3$ ), i valori permessi per ogni componente dell'impulso sono  $k_i = 2\pi n_i / L$  dove  $n_i$  (con  $i = 1, 2, 3$ ) sono interi. Conseguentemente, la

somma adimensionale sui numeri quantici  $\{n_i\}$  determina —nel limite continuo— la seguente densità di stati nello spazio degli impulsi

$$\sum_{\text{stati di 1 particella}} = \sum_{n_1} \sum_{n_2} \sum_{n_3} \rightarrow \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3}. \quad (6.8)$$

L'espressione (6.8) coincide con la densità di stati per singola particella (2.45).

### 6.2.3 Probabilità di transizione

La probabilità di transizione si ottiene prendendo il modulo quadro dell'ampiezza (6.7) e moltiplicando il risultato ottenuto per la densità degli stati finali. Siano  $K_i$  e  $K_f$  i quadrimpulsi totali corrispondenti rispettivamente allo stato iniziale e finale. La struttura generale degli operatori di campo, le regole di commutazione tra gli operatori di annichilazione e di creazione per le particelle e l'invarianza per traslazioni spazio-temporali della dinamica implicano che l'ampiezza (6.7) assume necessariamente la forma seguente

$$A(\mathbf{k}'; \mathbf{k}) = (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) \frac{\prod_{i=1}^m (2E_i)^{-1/2} \prod_{j=1}^n (2E'_j)^{-1/2}}{V^{(n+m)/2}} \mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k}), \quad (6.9)$$

dove  $\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})$  verrà denotata col nome di ampiezza invariante. Pertanto, ricordando che

$$[(2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i)]^2 = (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) VT, \quad (6.10)$$

il modulo quadro dell'ampiezza vale

$$|A(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i) |\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 VT}{V^{(n+m)} \prod_i (2E_i) \prod_j (2E'_j)}, \quad (6.11)$$

e la probabilità di transizione risulta essere

$$\frac{T(2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i)}{V^{n+m-1} \prod_i (2E_i)} |\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 \prod_{j=1}^n \frac{V d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}. \quad (6.12)$$

Conseguentemente, la probabilità di transizione per unità di tempo, chiamata anche "rate"  $dw$ , è data da

$$dw = \frac{(2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i)}{V^{m-1} \prod_i (2E_i)} |\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}. \quad (6.13)$$

### 6.2.4 Decadimento

Nel caso del decadimento di una particella di massa  $M$ , occorre sostituire  $m = 1$  nell'equazione (6.13); nel sistema di riposo della particella che decade, la larghezza parziale di decadimento  $d\Gamma$  assume la forma

$$d\Gamma = dw = \frac{1}{2M} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} |\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i). \quad (6.14)$$

### 6.2.5 Processo di urto o scattering

Si consideri ora il processo di urto —o di scattering— tra due particelle incidenti di impulsi  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  e velocità  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{k}_1/E_1$  e  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{k}_2/E_2$ . In questo caso, occorre sostituire  $m = 2$  nella formula (6.13) e, per ricavare l'espressione della sezione d'urto differenziale, occorre dividere la probabilità di transizione per il flusso incidente  $\Phi_{in}$ , la cui espressione [4] è data da

$$\Phi_{in} = \frac{\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}{V E_1 E_2}, \quad (6.15)$$

dove  $m_1$  ed  $m_2$  indicano le masse delle due particelle. Si noti che, nel caso in cui le velocità  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  delle particelle incidenti siano collineari, il flusso (6.15) vale

$$\Phi_{in} = \frac{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}{V}. \quad (6.16)$$

La sezione d'urto differenziale  $d\sigma$  per il processo di urto si ottiene dividendo la probabilità di transizione per unità di tempo  $dw$  per il flusso incidente

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} |\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i). \quad (6.17)$$

### 6.2.6 Spazio delle fasi

Le espressioni (6.14) e (6.17) si riferiscono alla situazione in cui tutti gli impulsi e gli stati di spin delle particelle sono fissati. Per ottenere la larghezza totale di decadimento o la sezione d'urto totale di un processo di scattering, occorre integrare le espressioni (6.14) oppure (6.17) nel cosiddetto spazio delle fasi associato alle particelle dello stato finale. Nel caso in cui non si osservino le polarizzazioni delle particelle,

occorre mediare sugli stati iniziali e sommare sugli stati finali di spin. Per quanto riguarda lo spazio delle fasi delle particelle, occorre distinguere due possibilità:

- (1) Nel caso in cui ogni particella dello stato finale sia distinguibile dalle altre, lo spazio delle fasi comprende tutti i possibili valori degli impulsi finali  $\{\mathbf{k}'_j\}$  e tutti i possibili valori degli spin.
- (2) Si consideri ora il caso in cui l'insieme delle  $n$  particelle finali sia l'unione di vari sottoinsiemi di particelle identiche. Supponiamo che il sottoinsieme  $b$ -esimo contenga  $y_b$  particelle identiche, si ha  $\sum_b y_b = n$ . Scambiando tutte le variabili relative a due particelle identiche non si ottiene un nuovo stato. Conseguentemente, lo spazio delle fasi comprende tutti i possibili valori degli impulsi e degli spin finali a meno di permutazioni tra gli insiemi di particelle identiche. Siccome il modulo quadro dell'ampiezza di transizione è invariante per scambio delle variabili relative a due particelle identiche, si può convenire di integrare su tutti i possibili valori degli impulsi e sommare su tutti gli stati di spin purché si introduca il fattore correttivo  $1/\prod_b (y_b!)$ . (Questo modo di procedere è simile all'introduzione del fattore di Gibbs  $1/N!$  nel calcolo del peso statistico per  $N$  molecole identiche in fisica statistica).

In conclusione, la larghezza totale  $\Gamma$  di decadimento assume la forma

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \frac{1}{\prod_b (y_b!)} \int \prod_{j=1}^n \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} |\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i). \quad (6.18)$$

Mentre la sezione d'urto totale  $\sigma$  per un processo di urto tra due particelle vale

$$\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(k_1 \cdot k_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \frac{1}{\prod_b (y_b!)} \times \int \prod_{j=1}^m \frac{d^3 k'_j}{(2\pi)^3 2E'_j} |\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})|^2 (2\pi)^4 \delta^4(K_f - K_i). \quad (6.19)$$

### 6.2.7 Covarianza relativistica

In presenza di campi esterni, l'invarianza per traslazioni spazio-temporali può essere violata; conseguentemente, il quadrimpulso totale finale non necessariamente coincide col quadrimpulso iniziale poiché parte dell'impulso è fornito il campo esterno. In assenza di campi esterni, la covarianza relativistica del formalismo della teoria di campo assicura che la funzione  $\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})$  —che appare in equazioni (6.18) e (6.19)— sia uno scalare di Lorentz.

### 6.2.8 Spinori e matrici gamma

Quando campi spinoriali sono coinvolti nel calcolo dell'ampiezza di transizione, la funzione  $\mathcal{M}(\mathbf{k}'; \mathbf{k})$  che è definita in equazione (6.9) contiene termini del tipo

$$\bar{u}(\mathbf{k}, s) \Gamma v(\mathbf{p}, r) = u_\sigma^*(\mathbf{k}, s) \gamma_{\sigma\alpha}^0 \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta(\mathbf{p}, r), \quad (6.20)$$

in cui  $\Gamma$  denota un prodotto di matrici gamma,  $\Gamma = \gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_n}$ . Quindi, nel calcolo del modulo quadro dell'ampiezza di transizione, si ottiene il fattore

$$\begin{aligned} |\bar{u}(\mathbf{k}, s) \Gamma v(\mathbf{p}, r)|^2 &= u_\sigma^*(\mathbf{k}, s) \gamma_{\sigma\alpha}^0 \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta(\mathbf{p}, r) v_\delta^*(\mathbf{p}, r) \Gamma_{\delta\tau}^\dagger \gamma_{\tau\rho}^0 u_\rho(\mathbf{k}, s) \\ &= \bar{u}_\alpha(\mathbf{k}, s) \Gamma_{\alpha\beta} v_\beta(\mathbf{p}, r) \bar{v}_\nu(\mathbf{p}, r) \bar{\Gamma}_{\nu\rho} u_\rho(\mathbf{k}, s), \end{aligned} \quad (6.21)$$

in cui si è utilizzata la proprietà  $\gamma^0 \gamma^0 = 1$  e in cui si è posto

$$\bar{\Gamma} \equiv \gamma^0 \Gamma^\dagger \gamma^0 = \overline{(\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_n})} = \bar{\gamma}_{\mu_n} \cdots \bar{\gamma}_{\mu_2} \bar{\gamma}_{\mu_1}. \quad (6.22)$$

Un semplice calcolo mostra che

$$\bar{\gamma}_\mu = \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu, \quad \bar{\gamma}_5 = \gamma^0 \gamma_5^\dagger \gamma^0 = -\gamma_5. \quad (6.23)$$

Nel caso in cui si debba sommare l'espressione (6.21) sugli stati di polarizzazione, le relazioni di completezza (4.62) conducono al risultato

$$\sum_{r,s} |\bar{u}(\mathbf{k}, s) \Gamma v(\mathbf{p}, r)|^2 = \text{Tr} \left[ (\hat{k} + m) \Gamma (\hat{p} - m) \bar{\Gamma} \right]. \quad (6.24)$$

Espressioni analoghe alla formula (6.24) si ottengono utilizzando gli spinori  $u$  e  $v$  nelle quattro combinazioni possibili, oppure utilizzando gli spinori chirali (5.66). Per descrivere particelle di spin 1/2 con chiralità definita, si seguirà la convenzione standard che consiste nell'utilizzare spinori di Dirac a quattro componenti proiettati sugli stati di chiralità destrorsa mediante il proiettore  $(1 + \gamma^5)/2$ , oppure sugli stati di chiralità sinistrorsa mediante il proiettore  $(1 - \gamma^5)/2$ .

### Esercizio 2. Decadimento della particella di Higgs in elettrone e positrone.

La teoria di campo denominata Modello Standard —che è il modello di teoria di campo che descrive le interazioni tra le particelle elementari— prevede l'esistenza di una particella  $h$  di spin nullo e carica elettrica nulla, denominata particella di Higgs, che può decadere, per esempio, in elettrone e positrone

$$h \rightarrow e^+ + e^- \quad (6.25)$$

Sia  $h(x)$  il campo scalare reale associato alla particella di Higgs e sia  $\psi(x)$  il campo spinoriale che descrive l'elettrone (e il positrone). La lagrangiana di interazione, che risulta rilevante per il decadimento, assume la forma

$$\mathcal{L}_I(x) = -g_{he} h(x) \bar{\psi}(x) \psi(x), \quad (6.26)$$

dove, come mostrato in Capitolo XX, la costante di accoppiamento adimensionale  $g_{he}$  vale circa  $g_{he} \simeq 2 \times 10^{-6}$ . Si denoti con  $M$  la massa della particella di Higgs e con  $m$  la massa dell'elettrone; il valore della massa  $M$  è sufficientemente elevato da permettere il decadimento (6.25). Sia  $p$  il quadrimpulso della particella che decade, e  $k_1$  e  $k_2$  i quadrimpulsi dell'elettrone e del positrone prodotti negli stati di polarizzazione  $r_1$  ed  $r_2$  rispettivamente. Al primo ordine in  $g_{he}$ , l'ampiezza  $A$  di transizione,

$$A = \langle 0 | b(k_1, r_1) d(k_2, r_2) \left[ i \int d^4 x \mathcal{L}_I(x) \right] a^\dagger(p) | 0 \rangle, \quad (6.27)$$

vale

$$A = (2\pi)^4 \delta^4(p - k_1 - k_2) \frac{1}{V^{3/2} \sqrt{2E_{k_1}} \sqrt{2E_{k_2}} \sqrt{2E_p}} (-i g_{he} \bar{u}(k_1, r_1) v(k_2, r_2)). \quad (6.28)$$

Utilizzando le notazioni dell'equazione (6.9), la corrispondente ampiezza invariante risulta

$$\mathcal{M} = -i g_{he} \bar{u}(\mathbf{k}_1, r_1) v(\mathbf{k}_2, r_2). \quad (6.29)$$

Nel sistema di riposo della particella di Higgs, sommando sugli stati di polarizzazione si ricava

$$\Gamma = \frac{g_{he}^2}{8\pi^2 M} \int \frac{d^3 k_1}{2E_1} \frac{d^3 k_2}{2E_2} \text{Tr} \left[ (\hat{k}_1 + m)(\hat{k}_2 - m) \right] \delta^4(p - k_1 - k_2). \quad (6.30)$$

Si come  $\text{Tr} \left[ (\hat{k}_1 + m)(\hat{k}_2 - m) \right] = 4k_1 k_2 - 4m^2$ , si ottiene

$$\Gamma = \frac{g_{he}^2}{M\pi} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{m^2 + k^2} \delta(M - 2\sqrt{m^2 + k^2}) = \frac{g_{he}^2}{8\pi} M \left( 1 - 4\frac{m^2}{M^2} \right)^{3/2}. \quad (6.31)$$

### Esercizio 3. Scattering di mesoni

Per il calcolo della sezione d'urto riguardante il seguente processo di scattering tra i mesoni pseudoscalari  $\pi$  (denominati pioni)

$$\pi^+ + \pi^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (6.32)$$

si può utilizzare la lagrangiana di interazione

$$\mathcal{L}_I(x) = \lambda \partial_\mu \pi^0(x) \partial^\mu \pi^0(x) \pi^*(x) \pi(x), \quad (6.33)$$

dove la costante di accoppiamento  $\lambda$  ha le dimensioni dell'inverso di una massa al quadrato. Il campo pseudoscalare reale  $\pi^0(x)$  crea o annichila un pione scarico  $\pi^0$ . Il campo complesso  $\pi(x)$  crea un pione carico  $\pi^+$  o annichila una sua antiparticella, ovvero un pione  $\pi^-$ ; mentre il campo  $\pi^*(x)$  annichila un mesone  $\pi^+$  o crea un mesone  $\pi^-$ .

L'espressione (6.33) —che risulta sufficientemente accurata nel limite di bassa energia— approssima il termine lagrangiano di algebra delle correnti che verrà discusso nel Capitolo XX; in effetti si ha  $\lambda = -1/f_\pi^2$ , dove  $f_\pi$  denota la costante di decadimento debole dei pioni. Siano  $p_1$  e  $k_1$  ( $p_2$  e  $k_2$ ) gli impulsi iniziali (finali) del mesone  $\pi^0$  e del mesone  $\pi^+$  rispettivamente. L'ampiezza di scattering risulta

$$\begin{aligned} A &= \langle 0 | a_0(p_2) a_+(k_2) \left[ i \int d^4 x \mathcal{L}_I(x) \right] a_0^\dagger(p_1) a_+^\dagger(k_1) | 0 \rangle \\ &= \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{V^2 \sqrt{2E_{p_1}} \sqrt{2E_{k_1}} \sqrt{2E_{p_2}} \sqrt{2E_{k_2}}} (i 2 \lambda p_1 \cdot p_2), \end{aligned} \quad (6.34)$$

per cui l'ampiezza invariante vale

$$\mathcal{M} = i 2 \lambda p_1 \cdot p_2 = i 2 \lambda p_1^\mu p_{2\mu}. \quad (6.35)$$

Sia  $m_0$  la massa del mesone  $\pi^0$ . Nel sistema di riferimento in cui il mesone  $\pi^0$  si trova a riposo nello stato iniziale, la sezione d'urto differenziale assume la forma

$$d\sigma = \frac{\lambda^2 m_0}{16\pi^2 |\mathbf{k}_1|} d^3 \mathbf{p}_2 \frac{\sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_0^2}}{E_{k_2}} \delta \left( \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m_0^2} + E_{k_2} - E_{k_1} - m_0 \right). \quad (6.36)$$

### Esercizio 4. Decadimento del pione neutro in due fotoni

Il mesone  $\pi^0$  ha parità intrinseca negativa ed è pari per coniugazione di carica. Circa il 99% di tutti i possibili decadimenti del  $\pi^0$  sono dovuti alla reazione in cui il mesone  $\pi^0$  decade in due fotoni

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad (6.37)$$

Quindi l'inverso della larghezza di questo decadimento determina essenzialmente la vita media del  $\pi^0$ . Pur essendo una particella neutra,  $\pi^0$  deve interagire necessariamente col quadrivettore potenziale elettromagnetico  $A_\mu$  perché  $\pi^0$  decade in due fotoni; in effetti il pione è una particella composta ed i suoi costituenti elementari possiedono cariche elettriche non banali.

**Lagrangiana fenomenologica** Pur non conoscendo in dettaglio la struttura interna del  $\pi^0$  in termini dei suoi costituenti, è possibile descrivere la struttura cinematica del decadimento



(6.37) mediante l'introduzione di una lagrangiana di interazione fenomenologica  $\mathcal{L}_I$ . Siccome le interazioni elettromagnetiche conservano la parità e la coniugazione di carica,  $\mathcal{L}_I$  deve essere invariante per trasformazioni  $P$  e  $C$ . La struttura interna di una qualunque particella composta si manifesta—in maniera sempre più rilevante— all'aumentare dell'energia o dell'impulso trasferito; ad energie sufficientemente basse, una particella composta si comporta approssimativamente come una particella elementare e può essere descritta da un operatore di campo locale. La lagrangiana fenomenologica deve riprodurre gli aspetti essenziali dell'interazione dello stato composto  $\pi^0$  col campo elettromagnetico a bassa energia. Questa lagrangiana è costruita col campo pseudoscalare  $\pi^0(x)$ —associato alla particella  $\pi^0$ — e col campo vettoriale  $A_\mu(x)$  e deve essere invariante di gauge. In generale,  $\mathcal{L}_I$  è la somma di vari termini ed occorre trovare un criterio per ordinare questi termini rispetto all'importanza che essi hanno per la fisica delle basse energie. Questo criterio è basato sull'analisi dimensionale e consiste semplicemente nel conteggio del numero di derivate che agiscono sui campi. Siccome ogni derivata sui campi rappresenta un impulso, a bassa energia i termini dominanti sono quelli che contengono il minor numero di derivate. Quindi il termine lagrangiano dominante per il decadimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$  assume la forma

$$\mathcal{L}_I = g_0 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu(x) \partial_\rho A_\sigma(x) \pi^0(x), \quad (6.38)$$

dove  $g_0$  rappresenta una costante di accoppiamento fenomenologica che ha le dimensioni dell'inverso di una massa. Siccome il campo  $\pi^0(x)$  è pseudoscalare, la presenza nell'espressione (6.38) del tensore completamente antisimmetrico assicura l'invarianza di  $\mathcal{L}_I$  per parità.

**Larghezza di decadimento** Si denoti con  $p$  l'impulso del mesone  $\pi^0$ , mentre lo stato finale dei due fotoni sia caratterizzato dagli impulsi  $k_1$  e  $k_2$  e dagli stati di polarizzazione  $\alpha$  e  $\beta$ . Al primo ordine in  $g$ , l'ampiezza di transizione invariante per il processo (6.37) vale

$$\mathcal{M} = -i 2 g_0 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (k_1)_\mu (k_2)_\rho \epsilon_\nu^*(\mathbf{k}_1, \alpha) \epsilon_\sigma^*(\mathbf{k}_2, \beta). \quad (6.39)$$

Sommando sugli stati delle polarizzazioni fisiche dei due fotoni nello stato finale e integrando sui valori degli impulsi, si ottiene la larghezza di decadimento che, nel sistema di riposo del  $\pi^0$ , vale

$$\Gamma = g_0^2 \frac{m_0^3}{16\pi}, \quad (6.40)$$

dove  $m_0$  è la massa del mesone  $\pi^0$ . La vita media  $\tau$  del  $\pi^0$  è data quindi da  $\tau = 1/\Gamma$ . Sperimentalmente, la vita media del  $\pi^0$  risulta essere  $\tau \simeq 8.4 \times 10^{-17}$  secondi; da questo dato si può quindi determinare il valore della costante fenomenologica  $g_0$ , il risultato è

$$g_0 \simeq 1.23 \times 10^{-5} \text{ MeV}^{-1}. \quad (6.41)$$

**Costante di accoppiamento** Utilizzando argomenti di simmetria basati sulla espressione della anomalia chirale di flavour, è possibile collegare il valore della costante di accoppiamento

$g_0$  con i valori di altre costanti di accoppiamento che intervengono in processi diversi. Nel Capitolo 25 verrà derivata la relazione

$$g_0 = \frac{\alpha_{em} N_c}{6 \pi f_\pi} \quad (\text{predizione teorica}), \quad (6.42)$$

dove  $\alpha_{em}$  denota la costante di struttura fine elettromagnetica  $e^2/4\pi$  e  $N_c$  rappresenta il numero di colori dei quark.

### Esercizio 5. Scattering di elettroni in potenziale coulombiano

La lagrangiana di interazione tra particelle di spin 1/2—descritte dal campo spinoriale  $\psi(x)$ — con carica elettrica  $e$  ed il campo elettromagnetico  $A_\mu(x)$  è data da

$$\mathcal{L}_I(x) = -e \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x). \quad (6.43)$$

Si consideri lo scattering di elettroni dovuto al campo elettrostatico generato da un nucleo pesante a riposo nell'origine del sistema di coordinate. Il potenziale elettromagnetico generato dal nucleo di carica  $Ze$  è dato da

$$A_0(x) = A_0(\mathbf{x}) = \frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}, \quad A_i(x) = 0. \quad (6.44)$$

Il processo di urto riguarda un elettrone nello stato iniziale  $|\mathbf{p}, r\rangle$  e nello stato finale  $|\mathbf{k}, s\rangle$ . In questo processo non si ha produzione od annichilazione di fotoni, pertanto il campo elettromagnetico  $A_\mu(x)$  può essere considerato, in prima approssimazione, un campo classico il cui valore è dato in equazione (6.44). Se  $b^\dagger(\mathbf{p}, r)$  denota l'operatore di creazione di un elettrone di impulso  $\mathbf{p}$  e stato di polarizzazione descritto dall'indice  $r$ , al primo ordine nella lagrangiana di interazione, l'ampiezza di transizione risulta essere

$$\begin{aligned} A &= \langle 0 | b(\mathbf{k}, s) \left[ i \int d^4x \mathcal{L}_I(x) \right] b^\dagger(\mathbf{p}, r) | 0 \rangle \\ &= -ie \int d^4x A_0(x) \langle 0 | b(\mathbf{k}, s) \bar{\psi}(x) \gamma^0 \psi(x) b^\dagger(\mathbf{p}, r) | 0 \rangle \\ &= -\frac{ie}{\sqrt{2E(\mathbf{p})} \sqrt{2E(\mathbf{k})} V} 2\pi \delta(E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{k})) \bar{u}(\mathbf{k}, s) \gamma^0 u(\mathbf{p}, r) \times \\ &\quad \times \int d^3x A_0(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k})}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Siccome il campo esterno classico (6.44) rompe l'invarianza per traslazioni spaziali, nell'ampiezza (6.45) appare solamente la delta di conservazione dell'energia. La trasformata di Fourier del campo esterno rispetto all'impulso trasferito  $(\mathbf{k} - \mathbf{p})$  vale

$$\int d^3x A_0(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{k})} = \frac{Ze}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^2}. \quad (6.46)$$

Quindi l'espressione (6.45) diventa

$$A = \frac{-iZe^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^2} \frac{2\pi\delta(E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{k}))}{\sqrt{2E(\mathbf{p})}\sqrt{2E(\mathbf{k})}V} \bar{u}(\mathbf{k}, s)\gamma^0 u(\mathbf{p}, r). \quad (6.47)$$

Dividendo la probabilità di transizione per unità di tempo rispetto al flusso incidente che vale  $|\mathbf{v}|/V$ , dove  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E(\mathbf{p})$  denota la velocità dell'elettrone incidente, si ottiene la sezione d'urto

$$d\sigma = \frac{Z^2\alpha_{em}^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^4} \frac{\delta(E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{k}))}{|\mathbf{p}|} \frac{d^3k}{E(\mathbf{k})} |\bar{u}(\mathbf{k}, s)\gamma^0 u(\mathbf{p}, r)|^2, \quad (6.48)$$

dove è stata introdotta la costante di struttura fine elettromagnetica

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}. \quad (6.49)$$

Utilizzando la relazione

$$d^3k = d\Omega |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| = d\Omega |\mathbf{k}| E(\mathbf{k}) dE(\mathbf{k}), \quad (6.50)$$

dall'espressione (6.48) segue

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha_{em}^2}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^4} |\bar{u}(\mathbf{k}, s)\gamma^0 u(\mathbf{p}, r)|^2. \quad (6.51)$$

A questo punto, prendendo la media degli stati iniziali e la somma sugli stati finali di polarizzazione, si ricava

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha_{em}^2}{2|\mathbf{p} - \mathbf{k}|^4} \sum_{r,s} |\bar{u}(\mathbf{k}, s)\gamma^0 u(\mathbf{p}, r)|^2. \quad (6.52)$$

Le proprietà degli spinori implicano

$$\begin{aligned} \sum_{r,s} |\bar{u}(\mathbf{k}, s)\gamma^0 u(\mathbf{p}, r)|^2 &= \text{Tr} \left[ (\hat{\mathbf{k}} + m)\gamma^0 (\hat{\mathbf{p}} + m)\gamma^0 \right] \\ &= 4(2E(\mathbf{p})E(\mathbf{k}) - \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} + m^2). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Sia  $\theta$  l'angolo di diffusione dell'elettrone e  $v$  il modulo della velocità dell'elettrone,  $|\mathbf{p}| = vE$ ; allora si ottiene

$$\begin{aligned} E(\mathbf{p}) = E(\mathbf{k}) = E(\mathbf{k}), \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{k}| = vE, \quad |\mathbf{p} - \mathbf{k}|^4 = 16v^4 E^4 \sin^4 \theta/2 \\ \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = m^2 + v^2 E^2 (1 - \cos\theta) = m^2 + 2v^2 E^2 \sin^2 \theta/2, \end{aligned} \quad (6.54)$$

e la sezione d'urto (6.52) assume la forma [3]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2\alpha_{em}^2}{4v^4 E^2 \sin^4 \theta/2} (1 - v^2 \sin^2 \theta/2). \quad (6.55)$$

## 7 Propagatore

In questo capitolo viene definito il propagatore di Feynman; e viene illustrato il suo utilizzo nel calcolo delle ampiezze di transizione.

### 7.1 Contrazione di Wick

Come è stato discusso nel capitolo precedente, l'ampiezza di transizione (6.7) viene calcolata facendo uno sviluppo in potenze della lagrangiana di interazione

$$A(\mathbf{k}'; \mathbf{k}) = e^{-i\theta_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \langle 0 | a_{\sigma_1}(\mathbf{k}'_1) a_{\sigma_2}(\mathbf{k}'_2) \cdots \text{T} [\mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)] a_{\beta_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) a_{\beta_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) \cdots | 0 \rangle . \quad (7.1)$$

La lagrangiana di interazione è in generale un polinomio dei campi e delle loro derivate. Ogni termine della somma (7.1)

$$\langle 0 | a_{\sigma_1}(\mathbf{k}'_1) a_{\sigma_2}(\mathbf{k}'_2) \cdots \text{T} [\mathcal{L}_I(x_1) \mathcal{L}_I(x_2) \cdots \mathcal{L}_I(x_n)] a_{\beta_1}^\dagger(\mathbf{k}_1) a_{\beta_2}^\dagger(\mathbf{k}_2) \cdots | 0 \rangle \quad (7.2)$$

risulta non nullo quando, muovendo a destra gli operatori di annichilazione e a sinistra gli operatori di creazione fino ad applicarli sul vuoto, tutti gli operatori di annichilazione e di creazione —esplicitamente mostrati nella espressione (7.2)— vengono “eliminati” utilizzando le regole di commutazione. Quel che resta eventualmente da calcolare, allora, è il valor medio sul vuoto del prodotto di un certo numero di operatori di campo, o delle loro derivate, ordinati cronologicamente secondo il T-prodotto

$$\langle 0 | \text{T} [\phi_{\beta_i}(x_i) \phi_{\beta_j}(x_j) \cdots \phi_{\beta_k}(x_k)] | 0 \rangle . \quad (7.3)$$

Per valutare l'espressione (7.3), è sufficiente conoscere il valor medio sul vuoto del prodotto T-ordinato delle singole coppie di operatori

$$\langle 0 | \text{T} [\phi_\alpha(x) \phi_\beta(y)] | 0 \rangle = \overline{\phi_\alpha(x) \phi_\beta(y)} . \quad (7.4)$$

Il valor medio (7.4) è denominato contrazione di Wick. Se gli operatori di creazione e di annichilazione —contenuti nei campi  $\phi_\alpha(x)$  e  $\phi_\beta(y)$ — si riferiscono a particelle diverse tra loro, la quantità (7.4) assume il valore nullo. Mentre se i campi  $\phi_\alpha(x)$  e  $\phi_\beta(y)$  si riferiscono allo stesso tipo di particelle, allora la quantità (7.4) è non nulla e la funzione  $\overline{\phi_\alpha(x) \phi_\beta(y)}$  rappresenta il cosiddetto propagatore di Feynman. Siccome

gli operatori di campo sono lineari negli operatori di creazione ed annichilazione per le particelle e il commutatore (od anticommutatore) tra due operatori di creazione ed annichilazione è un numero, che commuta con tutti gli altri operatori, vale [9, 12, 14, 17] il seguente

**Teorema 2 (Teorema di Wick).** *Il valor medio del prodotto T-ordinato di un numero fissato di campi soddisfa la relazione*

$$\langle 0 | \text{T} [\phi_{\beta_1}(x_1) \phi_{\beta_2}(x_2) \cdots \phi_{\beta_n}(x_n)] | 0 \rangle = \sum_{i=2}^n \delta_i \overline{\phi_{\beta_1}(x_1) \phi_{\beta_i}(x_i)} \langle 0 | \text{T} [\phi_{\beta_2}(x_2) \cdots \widehat{\phi_{\beta_i}(x_i)} \cdots \phi_{\beta_n}(x_n)] | 0 \rangle , \quad (7.5)$$

dove il simbolo  $\widehat{\phi_{\beta_i}(x_i)}$  indica che il campo  $\phi_{\beta_i}(x_i)$  è stato eliminato. Il fattore moltiplicativo  $\delta_i$  è uguale all'unità quando i campi  $\phi_{\beta_1}$  e  $\phi_{\beta_i}$  sono di tipo commutante (statistica di Bose); mentre, se questi campi sono anticommutanti (statistica di Fermi), si ha  $\delta_i = (-1)^{f_i}$  dove  $f_i$  è il numero di campi anticommutanti compresi tra  $\phi_{\beta_1}$  e  $\phi_{\beta_i}$  nell'espressione di partenza.

Utilizzando in maniera ricorsiva la relazione (7.5), l'ampiezza (7.3) risulta uguale alla somma di prodotti di propagatori. Il valor medio del prodotto T-ordinato di un numero dispari di campi è nullo. Per illustrare l'utilizzo del Teorema di Wick, è utile considerare due esempi. Nel caso di un campo scalare reale, si ha

$$\langle 0 | \text{T} [\varphi(1) \varphi(2) \varphi(3) \varphi(4)] | 0 \rangle = \overline{\varphi(1) \varphi(2)} \overline{\varphi(3) \varphi(4)} + \overline{\varphi(1) \varphi(3)} \overline{\varphi(2) \varphi(4)} + \overline{\varphi(1) \varphi(4)} \overline{\varphi(2) \varphi(3)} . \quad (7.6)$$

Mentre nel caso di un campo spinoriale, si ottiene

$$\langle 0 | \text{T} [\psi(1) \psi(2) \bar{\psi}(3) \bar{\psi}(4)] | 0 \rangle = -\overline{\psi(1) \bar{\psi}(3)} \overline{\psi(2) \bar{\psi}(4)} + \overline{\psi(1) \bar{\psi}(4)} \overline{\psi(2) \bar{\psi}(3)} . \quad (7.7)$$

Una semplice regola permette di ottenere i prodotti di propagatori col giusto segno; quando si effettua una contrazione di Wick tra due campi occorre modificare, se necessario, l'ordinamento di questi operatori in modo tale da disporli in posizioni consecutive. Nel modificare la posizione degli operatori, occorre ricordare che gli operatori di campo di tipo commutante —che seguono la statistica di Bose— commutano con tutti gli altri operatori, mentre gli operatori di tipo anticommutante —che seguono la statistica di Fermi— anticommutano tra loro.

### 7.1.1 Calcolo del propagatore per campo scalare

Nel caso di un campo scalare reale  $\varphi(x)$  —la cui dipendenza dagli operatori di creazione e di annichilazione per le particelle è mostrata in equazione (4.3)— si ottiene

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [\varphi(x)\varphi(y)] | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y)\varphi(x) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-ik(x-y)} + \theta(y^0 - x^0) e^{-ik(y-x)} \right]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Come verrà dimostrato nella prossima sezione, vale la seguente identità

$$\int \frac{dk^0}{2\pi} \frac{i e^{ik^0 x^0}}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2E(\mathbf{k})} \left[ \theta(x^0) e^{-iEx^0} + \theta(-x^0) e^{iEx^0} \right], \quad (7.9)$$

in cui  $\epsilon$  rappresenta un parametro reale positivo infinitesimo che va messo a zero dopo aver effettuato l'integrale. Allora l'espressione (7.8) assume la forma manifestamente covariante

$$\langle 0 | T [\varphi(x)\varphi(y)] | 0 \rangle = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.10)$$

### 7.1.2 Componenti del propagatore

In base alla definizione (3.9) del T-prodotto e tenendo conto della dipendenza degli operatori di campo in rappresentazione di interazione dagli operatori di creazione e di annichilazione per le particelle —discussa nel Capitolo 4— si può procedere al calcolo esplicito dei vari propagatori. I risultati sono di seguito riportati.

- **Campo scalare reale.**

$$\langle 0 | T [\varphi(x)\varphi(y)] | 0 \rangle = \overline{\varphi(x)} \varphi(y) = i\Delta(x-y), \quad (7.11)$$

dove

$$\Delta(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.12)$$

- **Campo scalare complesso.** L'unica componente non nulla del propagatore vale

$$\langle 0 | T [\phi(x)\phi^*(y)] | 0 \rangle = \overline{\phi(x)} \phi^*(y) = i\Delta(x-y). \quad (7.13)$$

- **Campo vettoriale reale massiccio.**

$$\langle 0 | T [B_\mu(x) B_\nu(y)] | 0 \rangle = \overline{B_\mu(x)} B_\nu(y) = iD_{\mu\nu}(x-y), \quad (7.14)$$

dove

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{-\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.15)$$

- **Campo vettoriale complesso massiccio.**

$$\langle 0 | T [U_\mu(x) U_\nu^*(y)] | 0 \rangle = \overline{U_\mu(x)} U_\nu^*(y) = iD_{\mu\nu}(x-y). \quad (7.16)$$

- **Campo vettoriale reale di massa nulla.**

$$\begin{aligned} \langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle &= \overline{A_\mu(x)} A_\nu(y) \\ &= -i\eta_{\mu\nu} \Delta_0(x-y) + \text{termini di gauge}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

dove

$$\Delta_0(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (7.18)$$

L'espressione (7.17) contiene una parte non esplicita che è determinata dalla particolare scelta della gauge; questa parte non esplicita è nulla in gauge di Feynman. Questo argomento verrà discusso nel Capitolo XX.

- **Campo spinoriale.**

$$\langle 0 | T [\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y)] | 0 \rangle = \overline{\psi_\alpha(x)} \bar{\psi}_\beta(y) = iS_{\alpha\beta}(x-y), \quad (7.19)$$

dove

$$S_{\alpha\beta}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \frac{(\widehat{k} + m)_{\alpha\beta}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.20)$$

Le espressioni dei propagatori nello spazio degli impulsi contengono al denominatore il parametro infinitesimo reale positivo  $\epsilon$  ed è sottinteso che, dopo aver calcolato le ampiezze di interesse, questo parametro deve essere mandato a zero. Questa prescrizione, chiamata prescrizione- $\epsilon$  di Feynman, garantisce che il risultato finale che si ottiene sia consistente con la proprietà di causalità e di positività dell'energia. Si ricordi che quando alcune derivate spatio-temporali agiscono sui campi che appaiono nel T-prodotto, allora —in accordo con la definizione (3.10)— il valor medio corrispondente si ottiene semplicemente applicando le derivate al propagatore che è definito per i campi liberi senza derivate.

## 7.2 Funzione di Green

Il propagatore rappresenta la funzione di Green causale associata all'equazione del moto per campi liberi; equivalentemente, il propagatore corrisponde all'inverso dell'operatore differenziale che interviene nella lagrangiana libera. Per esempio, l'azione (4.1) per un campo scalare reale si può riscrivere come

$$S_0 = \int d^4x \frac{1}{2} \varphi(x) (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \varphi(x) = \int d^4x \frac{1}{2} \varphi(x) \mathcal{Q} \varphi(x), \quad (7.21)$$

in cui l'operatore differenziale  $\mathcal{Q} = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2)$ , che appare nella lagrangiana (7.21), interviene anche nell'equazione del moto per il campo  $\varphi(x)$

$$\mathcal{Q} \varphi(x) = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \varphi(x) = 0. \quad (7.22)$$

**Proposizione 1.** *Le regole di commutazione canoniche implicano che il propagatore per il campo  $\varphi(x)$  debba soddisfare la relazione*

$$\mathcal{Q} \overline{\varphi(x) \varphi(y)} = i\delta^4(x - y). \quad (7.23)$$

Dimostrazione. Dalla definizione (3.9) di T-prodotto segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^0} \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)] | 0 \rangle &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) - \varphi(y) \varphi(x) | 0 \rangle + \\ &+ \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \dot{\varphi}(x) \varphi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) \dot{\varphi}(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Siccome a tempi uguali i campi commutano,  $[\varphi(x^0, \mathbf{x}), \varphi(x^0, \mathbf{y})] = 0$ , il primo termine nel membro di destra dell'equazione (7.24) si annulla. Allora

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \right)^2 \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)] | 0 \rangle &= \delta(x^0 - y^0) \langle 0 | \ddot{\varphi}(x) \varphi(y) - \varphi(y) \ddot{\varphi}(x) | 0 \rangle + \\ &+ \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \ddot{\varphi}(x) \varphi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) \ddot{\varphi}(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.25)$$

La regole (3.20) e (3.21) della quantizzazione canonica implicano che, nel caso del campo scalare, debba valere  $[\dot{\varphi}(x^0, \mathbf{x}), \varphi(x^0, \mathbf{y})] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ , per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} \langle 0 | T [\varphi(x) \varphi(y)] | 0 \rangle &= i\delta^4(x - y) + \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \mathcal{Q} \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle + \\ &\theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y) \mathcal{Q} \varphi(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Siccome l'operatore di campo  $\varphi(x)$  soddisfa l'equazione del moto (7.22), l'equazione (7.26) risulta equivalente alla relazione (7.23). ■

Naturalmente, è immediato verificare che l'espressione esplicita (7.11) del propagatore del campo scalare  $\varphi(x)$  verifica l'equazione (7.23). Siccome la funzione  $\delta^4(x - y)$  rappresenta la matrice unità nello spazio delle  $x$ , l'equazione (7.23) mostra in che senso  $\overline{\varphi(x) \varphi(y)}$  può essere considerato l'inverso dell'operatore  $\mathcal{Q}$ . Più precisamente, dalla relazione (7.23) segue che  $\overline{\varphi(x) \varphi(y)}$  equivale a una funzione di Green associata all'equazione del moto per il campo  $\varphi(x)$  (moltiplicata per il fattore immaginario  $i$ ). L'introduzione della prescrizione- $\epsilon$  di Feynman assicura che la funzione di Green  $\overline{\varphi(x) \varphi(y)}$  sia causale ed in accordo con la positività dell'energia. Utilizzando l'operatore differenziale appropriato per le varie equazioni del moto, la struttura dell'equazione (7.23) risulta valida anche per i propagatori associati ai diversi operatori di campo.

## 7.3 Struttura analitica del propagatore e diagrammi di Feynman

Per analizzare gli effetti della prescrizione- $\epsilon$  di Feynman, si consideri per semplicità il propagatore di un campo scalare reale

$$\overline{\varphi(x) \varphi(y)} = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (7.27)$$

Per ogni valore fissato dell'impulso spaziale  $\mathbf{k}$ , l'integrando che appare in equazione (7.27) possiede due poli nel piano complesso della variabile di integrazione  $k^0$ . Al primo ordine in  $\epsilon > 0$ , le posizioni di questi due poli nel piano complesso di  $k^0$  sono dati da

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{(\mathbf{k})^2 + m^2} \mp i \frac{\epsilon}{2\sqrt{(\mathbf{k})^2 + m^2}} = \pm E(\mathbf{k}) \mp i \frac{\epsilon}{2E(\mathbf{k})}. \quad (7.28)$$

dove  $E(\mathbf{k}) = \sqrt{(\mathbf{k})^2 + m^2} > 0$ . L'integrale nella variabile reale  $k^0$ , che appare nell'espressione (7.27), corrisponde al cammino di integrazione lungo l'asse reale nel piano complesso  $k^0$ ; questo cammino e le posizioni dei poli (7.28) sono mostrati in Figura 7.1. Nel limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , i poli si posizionano sull'asse reale; quindi, la prescrizione- $\epsilon$  di Feynman rappresenta semplicemente una ricetta che determina univocamente il modo di contornare i poli sull'asse reale.

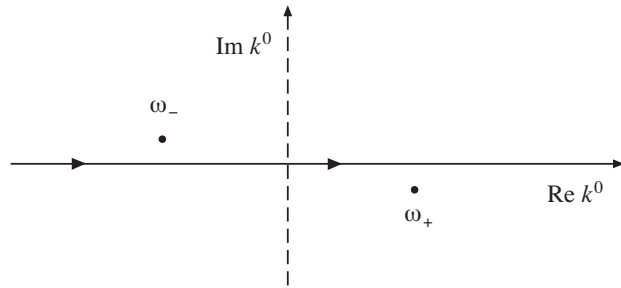


Figura 7.1 Piano complesso dell'energia.

Questa prescrizione è in accordo col fatto che, a causa della positività dell'energia, non si devono incontrare singolarità nel prolungamento analitico  $t \rightarrow -i\tau$ . Infatti, per mantenere la dipendenza funzionale standard —dalle coordinate e dai momenti— nelle trasformate di Fourier, quando si effettua il prolungamento analitico  $t \rightarrow -i\tau$  nelle coordinate risulta conveniente effettuare simultaneamente la sostituzione  $k^0 \rightarrow i\kappa$  negli impulsi. In base alla prescrizione- $\epsilon$ , nel piano complesso  $k^0$  i poli vengono contornati in modo tale che il cammino di integrazione può essere trasformato con continuità (mediante una rotazione di 90 gradi in senso antiorario) in un nuovo cammino diretto lungo l'asse immaginario nel piano complesso  $k^0$  senza incontrare singolarità. Conseguentemente, la prescrizione- $\epsilon$  è in accordo con l'esistenza del prolungamento analitico Euclideo.

Si consideri ora il calcolo esplicito dell'integrale nella variabile  $k^0$  che appare nell'espressione del propagatore. Quando l'intervallo temporale  $x^0 - y^0$  è positivo, l'integrale (7.27) può essere effettuato utilizzando il cammino mostrato in Figura 7.2 nel limite in cui il raggio del semicerchio nel semipiano complesso tende all'infinito. In base al teorema dei residui, si ottiene

$$\overline{\varphi(x)}\varphi(y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}(x-\mathbf{y})} e^{-i(x^0-y^0)E(\mathbf{k})}, \quad \text{per } x^0 - y^0 > 0. \quad (7.29)$$

In maniera analoga si calcola l'integrale quando l'intervallo temporale  $x^0 - y^0$  è negativo. Sommando i due contributi, si ottiene infine

$$\overline{\varphi(x)}\varphi(y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}(x-\mathbf{y})} \left[ \theta(x^0 - y^0) e^{-i(x^0-y^0)E(\mathbf{k})} + \theta(y^0 - x^0) e^{-i(y^0-x^0)E(\mathbf{k})} \right]. \quad (7.30)$$

L'espressione (7.30) può essere interpretata —nel limite formale in cui la massa della particella tende all'infinito— come l'ampiezza di transizione per una particella che è creata ed annichilata in corrispondenza dei punti  $x$  ed  $y$  dello spazio di Minkowski. Più precisamente, quando  $\Delta t = x^0 - y^0 > 0$ , una particella viene creata in un intorno del punto di coordinate  $y$  e viene annichilata in un intorno del punto  $x$ ; l'indeterminazione spaziale è fissata dalla lunghezza d'onda Compton  $\Delta x \sim 1/m$ . Similmente, quando  $\Delta t = y^0 - x^0 > 0$ , una particella viene creata in un intorno del punto di coordinate  $x$  e viene annichilata in un intorno del punto  $y$ .

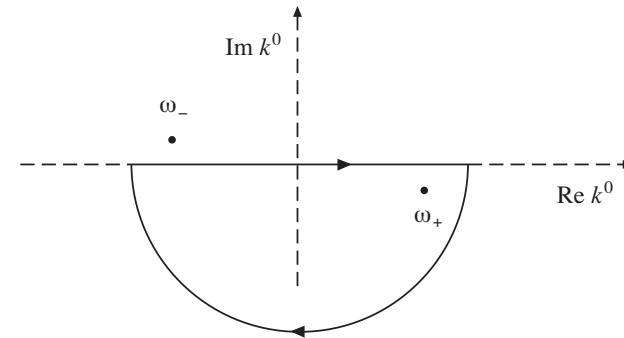


Figura 7.2 Cammino di integrazione.

L'evoluzione temporale, tra il momento di creazione e di annichilazione della particella, che appare nell'espressione (7.30) fa intervenire unicamente il valore positivo dell'energia. Infine, il fattore di normalizzazione  $2E(\mathbf{k})$  al denominatore dell'integrando nella formula (7.30) garantisce l'invarianza relativistica della misura di integrazione  $d^3k/2E(\mathbf{k})$ . La contrazione di Wick  $\overline{\varphi(x)}\varphi(y)$  rappresenta quindi l'ampiezza di transizione causale relativistica associata ad una particella che —nel limite non relativistico— propaga tra i punti di coordinate  $x$  ed  $y$ ; per questo motivo  $\overline{\varphi(x)}\varphi(y)$  è chiamato il propagatore.

**Nota 8. (Asimmetrie e causalità)** Il propagatore di Feynman ha un ruolo fondamentale nella descrizione delle interazioni tra le particelle elementari che viene fornita dallo sviluppo perturbativo in teorie quantistiche di campo. La definizione di propagatore  $\langle 0 | T [\varphi(x)\varphi(y)] | 0 \rangle$  potrebbe risultare non naturale e potrebbe apparire piuttosto asimmetrica sia nei riguardi della variabile temporale, sia per quanto riguarda l'introduzione della prescrizione- $\epsilon$ . In realtà, il formalismo utilizzato nelle teorie di campo è in accordo coi dati sperimentali, in base ai quali ogni particella

propaga—in maniera relativistica— nel tempo con energia positiva e viene eventualmente rilevata solo dopo essere stata creata. Infatti, la presenza del T-prodotto nella definizione del propagatore fa sì che, inizialmente, un operatore di creazione agisca sul vuoto per originare uno stato di singola particella e solo successivamente un operatore di annichilazione riconduca lo stato del sistema al vuoto. Per quanto riguarda la propagazione della particella —nell’intervallo tra la sua creazione e la sua annichilazione— la prescrizione- $\epsilon$  esprime in maniera relativisticamente invariante la positività dell’energia.

## 7.4 Diagrammi di Feynman

Si consideri in generale il calcolo delle ampiezze di transizione mediante il metodo perturbativo. Ad ogni ordine perturbativo fissato, cioè ad ogni ordine fissato delle potenze delle costanti di accoppiamento, il contributo all’ampiezza può essere descritto mediante opportuni grafici chiamati diagrammi di Feynman in cui

- ogni diagramma rappresenta un’ampiezza ovvero un numero complesso;
- ogni diagramma è composto da linee e da vertici (o vertici di interazione). I vertici sono i punti in cui varie linee si uniscono. Le linee possono essere interne od esterne al diagramma. Entrambe le estremità di una linea interna appartengono a vertici. Una linea è esterna se almeno una sua estremità non appartiene ad un vertice;
- ogni propagatore è rappresentato da una linea interna;
- le funzioni d’onda degli stati iniziali e finali (od i corrispondenti numeri quantici) sono rappresentate da linee esterne;
- per ogni tipo di termine nella lagrangiana di interazione corrisponde un tipo di vertice nei diagrammi. Se un determinato termine della lagrangiana di interazione è un monomio di grado  $n$  nei campi, il corrispondente vertice dei diagrammi di Feynman è il punto di incontro di  $n$  linee;
- le linee corrispondenti a campi diversi sono denotate in maniera diversa.

I diagrammi di Feynman risultano particolarmente convenienti per descrivere lo sviluppo perturbativo nel calcolo delle ampiezze di transizione. Figura 5.3 contiene due esempi di diagrammi di Feynman. Le linee esterne dei diagrammi corrispondono agli stati asintotici iniziale e finale delle particelle. Mentre le linee interne dei diagrammi,

che rappresentano propagatori di Feynman, corrispondono alla evoluzione degli stati intermedi che si incontrano in teoria perturbativa. Una linea interna di un diagramma viene generalmente indicata come la propagazione di una particella “virtuale” il cui impulso non soddisfa—in generale— la condizione di mass-shell  $p^2 = m^2$ ; gli stati corrispondenti a una particella virtuale non compaiono tra gli stati asintotici iniziale e finale bensì appaiono nelle somme sugli stati intermedi dello sviluppo perturbativo dell’ampiezza.

### Esercizio 6. Scattering Compton.

Per illustrare l’uso del Teorema di Wick nel calcolo delle ampiezze, si consideri il processo di scattering elettromagnetico in cui si ha un elettrone ed un fotone nello stato iniziale ed un elettrone ed un fotone nello stato finale. Lo stato iniziale sia specificato da

$$|\text{in}\rangle = b^\dagger(\mathbf{p}_1, r) a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}_1) |0\rangle, \quad (7.31)$$

dove l’elettrone si trova nello stato di polarizzazione descritto dall’indice  $r$  mentre il fotone si trova nello stato di polarizzazione rettilinea corrispondente all’indice  $\alpha$ . Lo stato finale sia descritto da

$$\langle \text{out} | = \langle 0 | b(\mathbf{p}_2, s) a_\beta(\mathbf{k}_2). \quad (7.32)$$

La lagrangiana di interazione vale  $\mathcal{L}_I(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$ ; quindi, al secondo ordine nella costante di accoppiamento, l’ampiezza risulta essere

$$A = -\frac{e^2}{2} \int d^4x \int d^4y \langle 0 | b(\mathbf{p}_2, s) a_\beta(\mathbf{k}_2) \times \\ \times \text{T} \{ \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x) \bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y)A_\nu(y) \} b^\dagger(\mathbf{p}_1, r) a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}_1) |0\rangle. \quad (7.33)$$

L’operatore  $a_\beta(\mathbf{k}_2)$  può eliminare un operatore di creazione contenuto in  $A_\mu(x)$  oppure contenuto in  $A_\nu(y)$ . Queste due possibilità danno origine a due contributi tra loro identici; quindi, è sufficiente considerare uno solo di essi e moltiplicare per un fattore due. Si assuma, per esempio, che  $a_\beta(\mathbf{k}_2)$  elimini un operatore di creazione contenuto in  $A_\mu(x)$ . Allora, l’operatore  $a_\alpha^\dagger(\mathbf{k}_1)$  deve eliminare un operatore di annichilazione contenuto necessariamente in  $A_\nu(y)$ . Pertanto si ottiene

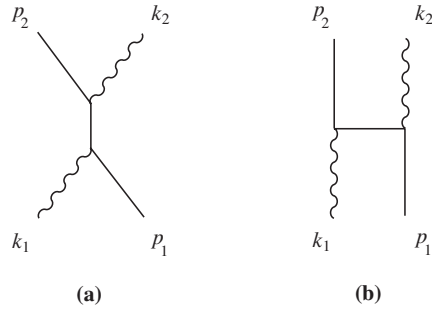
$$A = -\frac{e^2}{V} \int d^4x \int d^4y \frac{e^{ik_2x}}{\sqrt{2|\mathbf{k}_2|}} \frac{e^{-ik_1y}}{\sqrt{2|\mathbf{k}_1|}} \varepsilon_\mu^{(\beta)}(\mathbf{k}_2) \varepsilon_\nu^{(\alpha)}(\mathbf{k}_1) \times \\ \times \langle 0 | b(\mathbf{p}_2, s) \text{T} \{ \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \bar{\psi}(y)\gamma^\nu\psi(y) \} b^\dagger(\mathbf{p}_1, r) |0\rangle. \quad (7.34)$$

L’operatore  $b(\mathbf{p}_2, s)$  può eliminare un operatore di creazione contenuto in  $\bar{\psi}(x)$  oppure in  $\bar{\psi}(y)$ . Nel primo caso, l’operatore  $b^\dagger(\mathbf{p}_1, r)$  deve eliminare un operatore di annichilazione

contenuto in  $\psi(y)$  mentre, nel secondo caso,  $b^\dagger(\mathbf{p}_1, r)$  deve eliminare un operatore di annichilazione contenuto in  $\psi(x)$ . Questi due contributi non sono equivalenti e vanno sommati. Avendo eliminato  $b(\mathbf{p}_2, s)$  e  $b^\dagger(\mathbf{p}_1, r)$ , restano due operatori di campo fermionici su cui effettuare la contrazione di Wick. In conclusione, l'ampiezza (7.34) assume la forma [11]

$$A = \frac{-ie^2}{4V^2} \frac{(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + k_1 - p_2 - k_2)}{\sqrt{E(\mathbf{p}_1)E(\mathbf{p}_2)}|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_2|} \times \\ \times \left\{ \bar{u}(\mathbf{p}_2, s) \hat{\varepsilon}^{(\beta)}(\mathbf{k}_2) \frac{\hat{p}_1 + \hat{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{k}_1) u(\mathbf{p}_1, r) + \right. \\ \left. + \bar{u}(\mathbf{p}_2, s) \hat{\varepsilon}^{(\alpha)}(\mathbf{k}_1) \frac{\hat{p}_1 - \hat{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} \hat{\varepsilon}^{(\beta)}(\mathbf{k}_2) u(\mathbf{p}_1, r) \right\}. \quad (7.35)$$

L'ampiezza di transizione (7.35) ammette una descrizione in termini di diagrammi di Feynman. Utilizzando una linea continua per il campo spinoriale ed una linea ondulata per il campo vettoriale, i due contributi all'ampiezza (7.35) sono descritti dai diagrammi di Figura 7.3(a) e Figura 7.3(b).



**Figura 7.3** Scattering Compton elettrone-fotone.

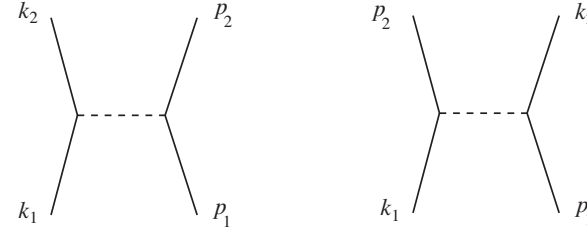
I diagrammi di Figura 7.3 contengono due vertici di interazione poiché l'ampiezza (7.35) è stata ottenuta utilizzando il quadrato dell'azione di interazione (ed è quindi del secondo ordine nella costante di accoppiamento). In ciascun vertice si riuniscono tre linee: una linea ondulata corrispondente al campo  $A_\mu$  e due linee continue che sono associate ai campi  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ . Il diagramma di Figura 7.3(a) indica l'ampiezza di scattering relativa al passaggio dell'elettrone e del fotone dallo stato iniziale allo stato finale tramite la propagazione nello stato intermedio di un "elettrone virtuale" con quadrimpulso  $(p_1 + k_1)$ . Il diagramma di Figura 7.3(b) rappresenta l'ampiezza associata allo scambio di un "elettrone virtuale" con quadrimpulso  $(p_1 - k_2)$ .

### Esercizio 7. Scattering neutrone neutrone

I dati sperimentali mostrano che l'interazione tra la particella neutrone —di spin 1/2 e carica elettrica nulla— e il mesone  $\pi^0$  (il neutrone interagisce anche con numerose altre particelle) può essere descritta, in prima approssimazione, da

$$S_I = ig \int d^4x \pi^0(x) \bar{\psi}_n(x) \gamma^5 \psi_n(x), \quad (7.36)$$

dove  $\psi_n(x)$  denota il campo spinoriale associato alla particella neutrone e  $g$  denota una opportuna costante di accoppiamento adimensionale. Le interazioni tra i barioni ed i mesoni verranno discusse dettagliatamente in seguito; per gli scopi del presente capitolo, l'espressione (7.36) rappresenta un semplice esempio di azione di interazione mediante la quale illustrare il calcolo della ampiezza di transizione in un processo di scattering.



**Figura 7.4** Scattering neutrone-neutrone.

Il contributo del termine di interazione (7.36) all'ampiezza di transizione nello scattering neutrone-neutrone è descritto —al secondo ordine nella costante di accoppiamento  $g$ — dai diagrammi mostrati in Figura 7.4, in cui il propagatore del campo  $\pi^0(x)$  è rappresentato dalla linea tratteggiata. Siano  $k_1$  e  $p_1$  i valori degli impulsi dei neutroni nello stato iniziale, e  $k_2$  e  $p_2$  gli impulsi dello stato finale. L'ampiezza di scattering è data da

$$A = -\frac{g^2}{2} \int d^4x \int d^4y \overline{\pi^0(x)} \pi^0(y) \langle 0 | b(\mathbf{p}_2, r_2) b(\mathbf{k}_2, s_2) \times \\ \times \bar{\psi}_n(x) \gamma^5 \psi_n(x) \bar{\psi}_n(y) \gamma^5 \psi_n(y) b^\dagger(\mathbf{p}_1, r_1) b^\dagger(\mathbf{k}_1, s_1) | 0 \rangle. \quad (7.37)$$

Eliminando gli operatori di creazione e di annichilazione dei neutroni che appaiono negli stati



asintotici si ottiene

$$A = -\frac{g^2}{2} \int d^4x \int d^4y \overline{\pi^0(x)} \pi^0(y) \left\{ \frac{e^{-ip_1x} e^{-ik_1y} e^{ik_2x} e^{ip_2y}}{4\sqrt{E_{p_1} E_{k_1} E_{p_2} E_{k_2}} V^2} \overline{u}(\mathbf{k}_2, s_2) \gamma^5 u(\mathbf{p}_1, r_1) \overline{u}(\mathbf{p}_2, r_2) \gamma^5 u(\mathbf{k}_1, s_1) - \frac{e^{-ip_1x} e^{-ik_1y} e^{ik_2y} e^{ip_2x}}{4\sqrt{E_{p_1} E_{k_1} E_{p_2} E_{k_2}} V^2} \overline{u}(\mathbf{p}_2, r_2) \gamma^5 u(\mathbf{p}_1, r_1) \overline{u}(\mathbf{k}_2, s_2) \gamma^5 u(\mathbf{k}_1, s_1) \right\}. \quad (7.38)$$

Inserendo nella formula (7.38) l'espressione del propagatore del mesone  $\pi^0$ , di massa  $m$ , si ricava

$$A = \frac{ig^2}{8} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_0^2} \frac{(2\pi)^4 \delta(k_2 + p_2 - k_1 - p_1)}{\sqrt{E_{p_1}} \sqrt{E_{k_1}} \sqrt{E_{p_2}} \sqrt{E_{k_2}} V^2} \left\{ - (2\pi)^4 \delta(-k + k_2 - p_1) \overline{u}(\mathbf{k}_2, s_2) \gamma^5 u(\mathbf{p}_1, r_1) \overline{u}(\mathbf{p}_2, r_2) \gamma^5 u(\mathbf{k}_1, s_1) + (2\pi)^4 \delta(-k - p_1 + p_2) \overline{u}(\mathbf{p}_2, r_2) \gamma^5 u(\mathbf{p}_1, r_1) \overline{u}(\mathbf{k}_2, s_2) \gamma^5 u(\mathbf{k}_1, s_1) \right\}, \quad (7.39)$$

da cui segue che l'ampiezza invariante vale

$$\mathcal{M} = \frac{ig^2}{2} \left\{ \frac{1}{(p_2 - p_1)^2 - m_0^2} \overline{u}(\mathbf{p}_2, r_2) \gamma^5 u(\mathbf{p}_1, r_1) \overline{u}(\mathbf{k}_2, s_2) \gamma^5 u(\mathbf{k}_1, s_1) - \frac{1}{(k_2 - p_1)^2 - m_0^2} \overline{u}(\mathbf{k}_2, s_2) \gamma^5 u(\mathbf{p}_1, r_1) \overline{u}(\mathbf{p}_2, r_2) \gamma^5 u(\mathbf{k}_1, s_1) \right\}. \quad (7.40)$$

I due termini che appaiono nella formula (7.40) corrispondono ai due diagrammi di Feynman della Figura 7.4 e sono in accordo con l'antisimmetria dei vettori di stato per scambio delle variabili di particelle identiche che seguono la statistica di Fermi-Dirac. Utilizzando il formalismo della teoria dei campi quantizzati —ovvero il formalismo della cosiddetta seconda quantizzazione— la proprietà di simmetria o antisimmetria degli stati per scambio di particelle identiche risulta automaticamente verificata.

## 7.5 Potenziale elettrostatico

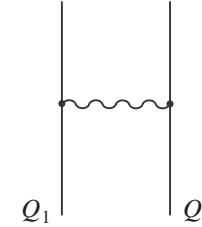
In molti casi risulta che le interazioni efficaci tra particelle si possono interpretare —in teoria perturbativa— come originate dallo scambio di una particella virtuale, spesso denominata mesone o bosone intermedio. A questo proposito risulta significativo mostrare come si manifesta e come si calcola —nel formalismo della teoria di campo— il potenziale elettrostatico tra cariche elettriche.

Per determinare il potenziale elettrostatico occorre considerare il limite in cui due cariche elettriche puntiformi  $Q_1$  e  $Q_2$  sono poste a riposo nei punti  $\mathbf{x}_1$  e  $\mathbf{x}_2$  dello spazio; l'energia di interazione tra queste cariche —al variare della distanza relativa— identifica il cosiddetto potenziale elettrostatico. Risulta pertanto utile sostituire, nella lagrangiana di interazione dell'elettrodinamica quantistica  $\mathcal{L}_I = -e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)$ , l'operatore corrente elettromagnetica  $-e\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)$  con una opportuna corrente classica  $j^\mu(x)$ . Sia quindi

$$\mathcal{L}_I(x) = j^\mu(x) A_\mu(x), \quad (7.41)$$

dove la corrente  $j^\mu(x)$  —che deve essere conservata per mantenere l'invarianza di gauge dell'espressione (7.41)— assume la forma

$$j^0(x) = j^0(\mathbf{x}) = Q_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + Q_2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad , \quad \mathbf{j}(x) = 0. \quad (7.42)$$



**Figura 7.5** Scambio di un “fotone virtuale”.

L'ampiezza  $\mathcal{A}$  determinata dallo scambio di un “fotone virtuale, schematicamente indicata dal diagramma di Figura 5.5, vale

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y j^0(\mathbf{x}) j^0(\mathbf{y}) \overline{A_0(x)} A_0(y); \quad (7.43)$$

trascurando le auto-interazioni di ciascuna carica con sè stessa —che non sono rilevanti per il calcolo del potenziale elettrostatico tra due cariche distinte— si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -Q_1 Q_2 \int dx^0 \int dy^0 \overline{A_0(x^0, \mathbf{x}_1)} A_0(y^0, \mathbf{x}_2) \\ &= iQ_1 Q_2 \int dx^0 \int dy^0 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{-ik^0(x^0 - y^0)}}{(k^0)^2 - (\mathbf{k})^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Siccome la corrente classica è conservata, l'arbitrarietà —dovuta alla scelta della gauge— della forma del propagatore per il campo vettoriale  $A_\mu(x)$  è del tutto inefficace e l'espressione (7.44) è univoca. Integrando nella variabile  $y^0$  si ricava

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= -iQ_1Q_2 \int dx^0 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}}{(\mathbf{k})^2} \\ &= i \int dx^0 \left( -\frac{Q_1Q_2}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \right). \end{aligned} \quad (7.45)$$

L'ampiezza  $\mathcal{A}$  rappresenta un'azione moltiplicata per  $i$ , e l'azione è l'integrale nel tempo della lagrangiana che, in assenza di termine cinetico, coincide con l'opposto dell'energia potenziale  $V_{pot}$ , ovvero  $\mathcal{A} = i \int dx^0 (-V_{pot})$ . Dall'equazione (7.45) si ricava quindi

$$V_{pot} = \frac{Q_1Q_2}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}, \quad (7.46)$$

che rappresenta l'energia potenziale elettrostatica tra due cariche, nelle notazioni (4.36) in cui la lagrangiana libera per il campo elettromagnetico vale  $\mathcal{L} = -(1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

## 7.6 Soluzione perturbativa delle equazioni del moto

In quanto funzione di Green associata alle equazioni del moto per campi liberi, il propagatore interviene in maniera essenziale nel risolvere —in maniera perturbativa— le equazioni del moto nel caso interagente. Si consideri per esempio la seguente equazione del moto per il campo scalare  $\varphi(x)$

$$(-\partial^2 - m^2)\varphi(x) - (g/6)\varphi^3(x) = -J(x), \quad (7.47)$$

dove  $J(x)$  rappresenta una funzione assegnata —chiamata anche sorgente classica— e  $g$  denota una opportuna costante di accoppiamento. Volendo determinare il valore di  $\varphi(x)$  —che soddisfa l'equazione (7.47)— in funzione di  $J(x)$ , si può utilizzare il metodo perturbativo che è basato su uno sviluppo di  $\varphi(x)$  in potenze della costante di accoppiamento

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + g\varphi_1(x) + g^2\varphi_2(x) + \dots \quad (7.48)$$

Inserendo l'espressione (7.48) in equazione (7.47) ed uguagliando i termini con le stesse potenze della costante di accoppiamento, si ottiene un insieme di equazioni che

—risolte ricorsivamente— permettono di determinare  $\varphi_n(x)$  per ogni  $n$ . All'ordine zero in potenze di  $g$ , si ottiene

$$(-\partial^2 - m^2)\varphi_0(x) = -J(x), \quad (7.49)$$

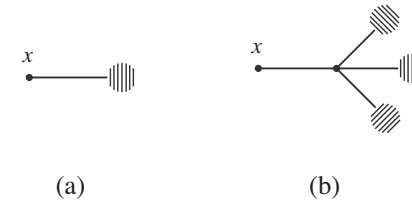
la cui soluzione è formalmente data da

$$\varphi_0(x) = \left[ i(-\partial^2 - m^2)^{-1} iJ \right](x) = \left( \frac{i}{-\partial^2 - m^2} \right) iJ. \quad (7.50)$$

In accordo con la Proposizione 1,  $i(-\partial^2 - m^2)^{-1}$  rappresenta precisamente il propagatore  $\overline{\varphi(x)\varphi(y)} = i\Delta(x-y)$  per il campo scalare  $\varphi(x)$ , e l'espressione (7.50) significa

$$\varphi_0(x) = \int d^4y i\Delta(x-y) iJ(y). \quad (7.51)$$

Il risultato (7.51) per  $\varphi_0(x)$  può essere rappresentato dal diagramma di Figura 7.6(a), in cui la linea continua rappresenta il propagatore per il campo  $\varphi(x)$  e la zona tratteggiata denota il termine di sorgente  $iJ(y)$ .



**Figura 7.6** Diagrammi che rappresentano le espressioni (7.51) e (7.53).

Al primo ordine in potenze di  $g$  si ricava

$$(-\partial^2 - m^2)\varphi_1(x) = (1/6)\varphi_0^3(x), \quad (7.52)$$

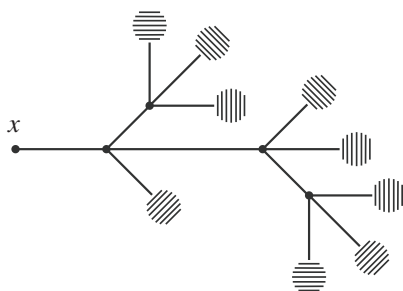
la cui soluzione

$$\varphi_1(x) = \left( \frac{i}{-\partial^2 - m^2} \right) (-i/6) \left[ \left( \frac{i}{-\partial^2 - m^2} \right) iJ \right]^3 \quad (7.53)$$

può essere rappresentata dal diagramma di Figura 7.6(b). L'equazione (7.53) si può riscrivere in dettaglio come

$$\varphi_1(x) = \int d^4y i\Delta(x-y)(-i/6) \left[ \int d^4z i\Delta(y-z)iJ(z) \right]^3. \quad (7.54)$$

In generale, lo sviluppo perturbativo (7.48) della soluzione dell'equazione del moto (7.47) è costituito dalla somma di diagrammi aventi una struttura "ad albero" e vertici 4-valenti; per esempio, il diagramma di Figura 7.7 rappresenta un contributo a  $\varphi_4(x)$ .



**Figura 7.7** Contributo a  $\varphi_4(x)$ .

Il ruolo che questi diagrammi "ad albero" hanno nell'ambito delle teorie quantistiche di campo verrà discusso nei prossimi capitoli.

## Riferimenti bibliografici

- [1] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc. (New York, 2001).
- [2] E. Fermi, *Nuclear Physics*, The University of Chicago Press (Chicago, 1950).
- [3] E. Fermi, *Sopra l'elettrodinamica quantistica*, Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei 12 (1930) 431.
- [4] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie des Champs*, Editions MIR (Moscou, 1970).
- [5] L. Landau et E. Lifchitz, *Mécanique Quantique*, Editions MIR (Moscou, 1970).
- [6] R.P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, Frontiers in Physics W.A. Benjamin, Inc. (New York, 1962).
- [7] J. Schwinger (ed), *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, Inc. (New York, 1958).
- [8] J. Schwinger, *Particles, Sources, and Fields*, volumes I, II and III, Advanced Book Program, Perseus Books Publishing L.L.C. (Reading MA, 1970).
- [9] N.N. Bogolioubov et D.V. Chirkov, *Introduction a la théorie quantique des champs*, Dunod Editeur (Paris, 1960).
- [10] V. Berestetski, E. Lifchitz et L. Pitayevski, *Théorie quantique relativiste*, Editions MIR (Moscou, 1972).
- [11] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, Ed. McGraw-Hill, Inc. (New York, 1965).
- [12] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic quantum fields*, Ed. McGraw-Hill, Inc. (New York, 1965).
- [13] Stephen Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics*, John Wiley & Sons, Inc. (New York, 1966).
- [14] C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (Singapore, 1980).
- [15] S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, (New York, 1985).
- [16] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons (New York, 1984).
- [17] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (Boulder, 1995).
- [18] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, volumes I and II, Cambridge University Press (New York, 1995).
- [19] P. Ramond, *Journeys Beyond the Standard Model*, Westview Press (Boulder, 2004).
- [20] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Fourth Edition, Clarendon Press, Oxford (Norfolk, 2004).
- [21] H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Theory*, Dover Publications, Inc. (New York, 2009).
- [22] L. Maiani, *Interazioni elettrodeboli*, Editori Riuniti University Press (Roma, 2013).
- [23] A. Di Giacomo, *Lezioni di Fisica Teorica*, Edizioni ETS (Pisa, 1992).
- [24] M. Maggiore, *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press, (New York, 2005).
- [25] G. Lüders, Ann. of Phys. (N.Y.) 2 (1957) 1.
- [26] R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics and All That*, W.A. Benjamin, Inc., (New York, 1964).
- [27] K. Symanzik, J. Math. Phys. 7 (1966) 510.
- [28] H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmerman, Nuovo Cimento 1 (1955) 205.
- [29] E.S. Abers and B.W. Lee, *Gauge Theories*, Physics Reports 9 (1973) 1.
- [30] J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 664.
- [31] E.P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press (New York, 1958).