

SUPERFLUIDITÀ

§ 22. *Eccitazioni elementari nel liquido di Bose quantistico*

Passiamo ora allo studio dei liquidi quantistici a spettro energetico di tipo assolutamente diverso, che si potrebbe chiamare *tipo Bose*¹⁾.

Questo spettro è caratterizzato dal fatto che le eccitazioni elementari (non esistenti nello stato fondamentale del liquido) possono comparire e scomparire separatamente. Ma il momento di ogni sistema quantomeccanico (del liquido nel caso in questione) può subire cambiamenti soltanto di un numero intero. Pertanto le eccitazioni elementari che compaiono separatamente a una a una devono avere momento di valore numerico intero e, quindi, obbedire alla statistica di Bose. Comunque ogni liquido quantistico composto di particelle a spin intero (tale è l'isotopo liquido He⁴) deve possedere uno spettro di questo tipo.

A titolo di confronto ricordiamo che queste eccitazioni possono comparire o scomparire soltanto a coppie nel liquido di Fermi, quando esso viene descritto in termini dello spettro delle eccitazioni elementari non esistenti nello stato fondamentale (vedi la fine del § 1). Questa è la ragione per cui le eccitazioni elementari in questo tipo di spettro possono avere spin semintero.

Nel liquido di Bose quantistico le eccitazioni elementari con piccoli impulsi p (la lunghezza d'onda è grande rispetto alle distanze interatomiche) corrispondono alle onde sonore idrodinamiche ordinarie, cioè rappresentano fononi. Ciò significa che l'energia di queste quasi-particelle è una funzione del loro impulso

$$\varepsilon = up, \quad (22,1)$$

dove u è la velocità del suono nel liquido. Quest'ultima è data dalla formula $u^2 = \partial P / \partial \rho$, dove non occorre precisare che la derivata

¹⁾ La teoria di questi liquidi quantistici è stata creata da *L. D. Landau* nel 1940-41 subito dopo la scoperta di *P. L. Kapitsa* della superfluidità dell'elio liquido. Queste scoperte hanno dato origine allo sviluppo della fisica moderna dei liquidi quantistici.

è calcolata a temperatura T o entropia S costanti in quanto $T \rightarrow 0$ così come $S \rightarrow 0$ ¹⁾.

Il numero di eccitazioni elementari nel liquido di Bose tende a zero per $T \rightarrow 0$, e a temperature basse le quasi-particelle di densità sufficientemente piccola si possono supporre non interagenti mutualmente, cioè costituenti un gas di Bose perfetto. Pertanto, dal punto di vista statistico, la distribuzione d'equilibrio delle eccitazioni elementari nel liquido di Bose è data dalla formula di Bose (a potenziale chimico nullo; vedi la nota alla pag. 20)

$$n(p) = [e^{\varepsilon(p)/T} - 1]^{-1}. \quad (22,2)$$

Con l'ausilio di questa distribuzione e conoscendo la dipendenza $\varepsilon(p)$ per p piccoli, si possono calcolare le grandezze termodinamiche del liquido a temperature così vicine allo zero assoluto per cui praticamente tutte le eccitazioni elementari esistenti nel liquido abbiano energie piccole, essendo cioè fononi. Si possono scrivere immediatamente le formule corrispondenti a partire dalle espressioni per le grandezze termodinamiche dei solidi alle basse temperature (cfr. V, § 64). La sola differenza è che al posto delle tre direzioni di polarizzazione possibili delle onde sonore nei solidi (una longitudinale e due trasversali) nel liquido ne esiste una sola (longitudinale); pertanto tutte le espressioni per le grandezze termodinamiche devono essere divise per 3. Così, per l'energia libera del liquido abbiamo

$$F = F_0 - V \frac{\pi^2 T^4}{90 (\hbar u)^3}, \quad (22,3)$$

dove F_0 è l'energia libera allo zero assoluto. L'energia del liquido vale

$$E = E_0 + V \frac{\pi^2 T^4}{30 (\hbar u)^3}, \quad (22,4)$$

e il calore specifico

$$C = V \frac{2\pi^2 T^3}{15 (\hbar u)^3}; \quad (22,5)$$

esso è proporzionale al cubo della temperatura.

La legge fononica della dispersione (22,1) è valida soltanto perché la lunghezza d'onda della quasi-particella \hbar/p è grande rispetto alle distanze interatomiche. A misura che l'impulso aumenta, la curva $\varepsilon = \varepsilon(p)$ devia, certamente, dalla dipendenza lineare; il suo

¹⁾ La nozione dei fononi è stata introdotta in V, §§ 71, 72 per le eccitazioni elementari nei solidi. Sottolineiamo che l'impulso di un'eccitazione elementare in un sistema microscopicamente omogeneo — liquido — è il vero impulso e non un quasi-impulso, come nel campo periodico del reticolo cristallino di un corpo solido.

andamento ulteriore dipende dalla legge di interazione concreta fra le molecole del liquido e non può essere definito, quindi, in forma generale.

Nell'elio liquido la legge di dispersione delle eccitazioni elementari ha la forma rappresentata nella fig. 2; dopo la crescita lineare iniziale la funzione $\varepsilon(p)$ raggiunge un massimo, in seguito decresce e per un determinato valore dell'impulso p_0 passa attraverso un minimo ¹⁾. In equilibrio termico la maggioranza delle eccitazioni

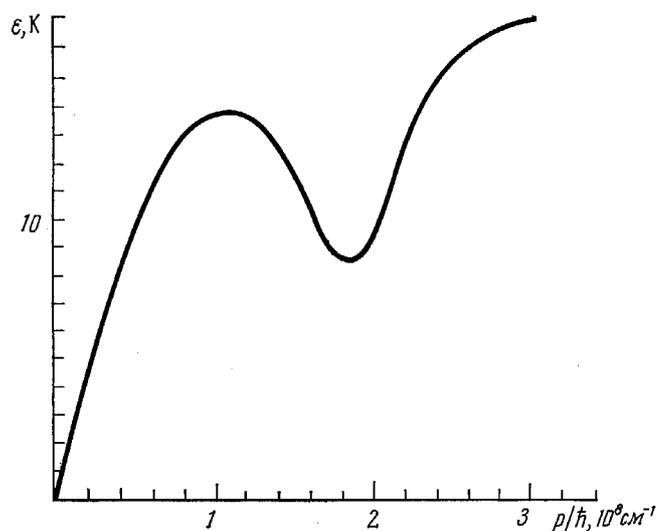


Fig. 2

elementari nel liquido hanno energie nell'intorno dei minimi della funzione $\varepsilon(p)$, cioè nel dominio degli ε piccoli (l'intorno di $\varepsilon = 0$) e nel dominio del valore di $\varepsilon(p_0)$. Pertanto sono questi domini ad avere importanza sostanziale. In prossimità del punto $p = p_0$ si può sviluppare la funzione $\varepsilon(p)$ in potenze di $p - p_0$. Il termine lineare non esiste nello sviluppo e abbiamo, a meno dei termini del secondo ordine,

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*}, \quad (22,6)$$

¹⁾ Questa forma dello spettro, proposta originariamente da *L. D. Landau* (1947) in base all'analisi dei dati sperimentali sulle grandezze termodinamiche dell'elio liquido, in seguito è stata confermata empiricamente dall'esperienza di diffusione dei neutroni.

La teoria qualitativa dello spettro del dato tipo appartiene a *R.P. Feynman* (1954); si veda più avanti la nota alla pag. 442.

dove $\Delta = \varepsilon(p_0)$ e m^* sono costanti. Le quasi-particelle di questo tipo sono dette *rotoni*. Sottolineiamo, tuttavia, che ambedue i tipi di quasi-particelle — fononi e rotoni — corrispondono soltanto a diversi tratti di una medesima curva fra i quali si ha una transizione continua.

I valori empirici dei parametri dello spettro energetico dell'elio liquido (estrapolati per pressione nulla nel caso di densità $\rho = 0,145 \text{ g/cm}^3$) sono i seguenti ¹⁾:

$$\begin{aligned} u &= 2,4 \cdot 10^4 \text{ cm/s}, & \Delta &= 8,7 \text{ K}, \\ p_0/\hbar &= 1,9 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}, & m^* &= 0,16m \text{ (He}^4\text{)}. \end{aligned} \quad (22,7)$$

Poiché l'energia del rotone contiene sempre la grandezza Δ grande rispetto a T — a temperature sufficientemente basse per poter parlare di un « gas rotonico » — si può descrivere quest'ultimo mediante la distribuzione di Boltzmann al posto di quella di Bose. In accordo con ciò, per calcolare la parte rotonica delle grandezze termodinamiche dell'elio liquido, noi partiamo dalla formula per l'energia libera del gas di Boltzmann:

$$F = -NT \ln \frac{eV}{N} \int e^{-\varepsilon/T} d\tau, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(vedi V, § 41). Allora in questa formula si deve intendere con N il numero di rotoni nel liquido. Ma questo numero stesso è definito dalla condizione di equilibrio termodinamico, cioè dalla condizione di minima energia libera. Eguagliando a zero $\partial F/\partial N$, troviamo che il numero di rotoni vale

$$N_r = V \int e^{-\varepsilon/T} d\tau \quad (22,8)$$

(ciò che corrisponde, naturalmente, alla distribuzione di Boltzmann con il potenziale chimico nullo). Il valore corrispondente dell'energia libera è

$$F_r = -VT \int e^{-\varepsilon/T} d\tau.$$

Bisogna sostituire in questa formula l'espressione (22,6). Poiché $p_0^2 \gg m^*T$, allora, integrando in dp , si può portare il fattore p^2 all'infuori dal segno di integrale rimpiazzandolo con p_0^2 con una precisione sufficiente. Integrando l'espressione esponenziale, si può estendere il dominio di integrazione da $-\infty$ a ∞ . Come risultato otteniamo

$$N_r = \frac{2(m^*T)^{1/2} p_0^2 V}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} e^{-\Delta/T}, \quad F_r = -TN_r. \quad (22,9)$$

¹⁾ Diamo anche il valore del potenziale chimico dell'elio liquido per $T = 0$: $\mu = -7,16 \text{ K}$.

Di qui i contributi dei rotoni nell'entropia e nel calore specifico sono

$$S_r = N_r \left(\frac{3}{2} + \frac{\Delta}{T} \right), \quad C_r = N_r \left(\frac{3}{4} + \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta^2}{T^2} \right). \quad (22,10)$$

Vediamo che la dipendenza termica della parte rotonica nelle grandezze termodinamiche è essenzialmente esponenziale. Questa è la ragione per cui a temperature sufficientemente basse (più basse all'incirca di 0,8 K per l'elio liquido) la parte rotonica è più piccola della parte fononica, ma a temperature più alte la situazione si capovolge e il contributo rotonico supera quello fononico.

§ 23. Superfluidità

Il fluido quantistico a spettro energetico del tipo testé descritto gode di una proprietà sorprendente, detta *superfluidità*, ossia la capacità del liquido di passare per stretti capillari o fenditure senza manifestare viscosità. Iniziamo lo studio del liquido allo zero assoluto quando esso si trova nel suo stato normale, non eccitato.

Consideriamo un fluido passante per un capillare a velocità costante v . La presenza della viscosità consisterebbe in ciò: grazie all'attrito contro le pareti del tubo e all'attrito all'interno del fluido stesso si produrrebbe dissipazione dell'energia cinetica del fluido e il flusso rallenterebbe gradualmente.

Sarà più comodo considerare il flusso in un sistema di coordinate che si muove con il fluido. In questo sistema l'elio è in quiete, mentre le pareti del capillare si muovono a velocità $-v$. In presenza di viscosità l'elio in quiete dovrebbe anch'esso cominciare a muoversi. Fisicamente è evidente che il trascinamento del fluido da parte delle pareti del tubo non può implicare il movimento del fluido come tutt'uno. La comparsa del moto deve iniziare da un'eccitazione graduale dei movimenti interni, cioè dalla comparsa di eccitazioni elementari nel liquido.

Supponiamo che nel liquido esista un'eccitazione elementare di impulso \mathbf{p} ed energia $\varepsilon(p)$. Allora l'energia E_0 del liquido (nel sistema di coordinate in cui prima era in quiete) sarà uguale all'energia di questa eccitazione ε e il suo impulso \mathbf{P}_0 uguale all'impulso \mathbf{p} . Torniamo ora al sistema di coordinate in cui il capillare si trova a riposo. In accordo con le note formule meccaniche di trasformazione dell'energia e dell'impulso, in questo sistema abbiamo i seguenti valori per l'energia E e l'impulso \mathbf{P} del liquido:

$$E = E_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 + M\mathbf{v}, \quad (23,1)$$

dove M è la massa del liquido. Rimpiazzando E_0, \mathbf{P}_0 con ε, \mathbf{p} , scriviamo

$$E = \varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2}. \quad (23,2)$$

Il termine $Mv^2/2$ rappresenta l'energia cinetica iniziale del liquido in moto; quanto al termine $\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}$, esso esprime la variazione dell'energia grazie alla comparsa dell'eccitazione. Questa variazione deve essere negativa in quanto l'energia del liquido in moto deve diminuire

$$\varepsilon + \mathbf{p}\mathbf{v} < 0.$$

Per un dato p la grandezza a primo membro della disuguaglianza ha il valore più piccolo per \mathbf{p} e \mathbf{v} antiparalleli; perciò in ogni caso si deve avere $\varepsilon - pv < 0$, cioè

$$v > \frac{\varepsilon}{p}. \quad (23,3)$$

Questa disuguaglianza deve essere verificata almeno per certi valori dell'impulso p dell'eccitazione elementare. Pertanto possiamo ottenere la condizione di comparsa possibile delle eccitazioni nel liquido passante per il capillare dopo aver trovato il minimo del rapporto ε/p . Dal punto di vista geometrico il rapporto ε/p rappresenta la tangente dell'angolo d'inclinazione della retta tracciata dall'origine delle coordinate (nel piano p, ε) verso un punto della curva $\varepsilon = \varepsilon(p)$. Il suo termine minimo sarà definito, evidentemente, dal punto in cui la retta tracciata dall'origine delle coordinate è tangente alla curva. Se questo minimo è diverso da zero, allora per velocità del flusso non troppo grandi nel liquido non possono comparire eccitazioni. Ciò significa che il suo flusso non si rallenterà, cioè che si verificherà il fenomeno della superfluidità.

La condizione di superfluidità ottenuta si riduce di fatto all'ipotesi che la curva $\varepsilon = \varepsilon(p)$ non tocchi l'asse delle ascisse nell'origine delle coordinate (a prescindere dall'eventualità poco probabile che nel suo andamento ulteriore essa tocchi questo asse). Perciò ogni spettro in cui le eccitazioni, sufficientemente piccole, siano fononi condurrà infatti alla superfluidità.

Consideriamo ora lo stesso liquido a temperatura diversa dallo zero assoluto (anche se vicina ad esso). In questo caso il liquido non si trova più nello stato fondamentale e contiene eccitazioni. I ragionamenti sopra citati restano di per sé validi, poiché in essi non è stato tenuto conto del fatto che il liquido si trovava inizialmente nello stato fondamentale. Il movimento del liquido relativamente alle pareti del tubo, essendo soddisfatta la detta condizione, non potrà implicare, come prima, la comparsa di eccitazioni elementari nuove.

Tuttavia dobbiamo precisare come si comporteranno le eccitazioni già esistenti nel liquido.

Supponiamo a tal fine che il « gas di quasi-particelle » si muova come un tutt'uno di moto traslatorio a velocità \mathbf{v} relativamente al liquido. La funzione di distribuzione per il gas moventesi come un tutt'uno si ottiene dalla funzione di distribuzione $n(\varepsilon)$ per il gas in quiete sostituendovi l'energia ε della particella con la grandezza $\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}$, dove \mathbf{p} è l'impulso della particella. Per un gas ordinario questa circostanza non consegue direttamente dal principio di relatività di Galileo e si dimostra semplicemente passando da un sistema di coordinate a un altro. Nel caso considerato, invece, queste considerazioni sono inapplicabili in quanto il gas di quasi-particelle si muove non nel vuoto, ma « attraverso il liquido ». Ciononostante, l'affermazione resta valida, come deriva dai ragionamenti seguenti.

Supponiamo che il gas di eccitazioni si muova relativamente al liquido a velocità \mathbf{v} . Consideriamo un sistema di coordinate in cui il gas come un tutt'uno è in quiete, mentre il liquido si muove rispettivamente a velocità $-\mathbf{v}$ (sistema K). Secondo la formula di trasformazione (23,1) l'energia E del liquido nel sistema K è legata all'energia E_0 nel sistema in cui il liquido è in quiete (sistema K_0) dalla relazione

$$E = E_0 - \mathbf{P}_0\mathbf{v} + \frac{Mv^2}{2}.$$

Supponiamo che nel liquido compaia un'eccitazione elementare di energia $\varepsilon(p)$ (nel sistema K_0). Allora l'energia supplementare del liquido nel sistema K sarà $\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}$, ciò che dimostra l'affermazione fatta ¹⁾.

Quindi, l'impulso completo del gas di quasi-particelle (riferito all'unità di volume) sarà

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p}n(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}) d\tau.$$

Supponiamo che la velocità \mathbf{v} sia piccola, e sviluppiamo l'espressione integranda in potenze di $\mathbf{p}\mathbf{v}$. Il termine di ordine zero scompare (integrando sulle direzioni del vettore \mathbf{p}) e resta

$$\mathbf{P} = - \int \mathbf{p}(\mathbf{p}\mathbf{v}) \frac{dn(\varepsilon)}{d\varepsilon} d\tau,$$

ossia, dopo aver calcolato la media rispetto alle direzioni del vettore \mathbf{p} ,

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{v}}{3} \int \left(- \frac{dn}{d\varepsilon} \right) p^2 d\tau. \quad (23,4)$$

¹⁾ Per le quasi-particelle nel liquido di Bose $n(\varepsilon)$ rappresenta la distribuzione (22,2). Rivolgiamo l'attenzione sul fatto che la condizione di superfluidità ($v < \varepsilon/p$) coincide esattamente con la condizione che garantisce la positività e la finitezza dell'espressione $n(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v})$ per tutte le energie.

Vediamo soprattutto che il movimento del gas di quasi-particelle è accompagnato dal trasporto di una certa massa: la massa efficace dell'unità di volume di gas è determinata dal coefficiente di proporzionalità fra l'impulso \mathbf{P} e la velocità \mathbf{v} nella formula (23,4). D'altra parte, quando il liquido scorre in un capillare, ad esempio, niente impedisce alle quasi-particelle di urtare contro le pareti del tubo e di scambiare con esse l'impulso. Come risultato il gas di eccitazioni sarà arrestato, come si verificherebbe con qualsiasi gas normale passante per un capillare.

Siamo giunti così al risultato fondamentale seguente. A temperature diverse da zero una parte della massa del liquido si comporterà come un liquido viscoso normale che si « appiccica » in moto alle pareti del condotto; la parte restante della massa si comporterà, invece, come un liquido superfluido privo di viscosità. Il fatto essenziale è che fra queste due parti della massa liquida, che si muovono « l'una attraverso l'altra », non esiste attrito, vale a dire che non si produce la trasmissione d'impulso da una all'altra. Infatti, abbiamo già ottenuto l'esistenza stessa di questo movimento reciproco di una parte della massa liquida relativamente all'altra considerando l'equilibrio statistico nel gas di eccitazioni in moto uniforme. Ma se un certo movimento relativo può prodursi nello stato di equilibrio termico, ciò significa che esso non viene accompagnato da attrito.

Sottolineiamo che considerare il liquido come « miscela » delle sue due « parti », normale e superfluida, non rappresenta altro che un'espressione comoda per la descrizione dei fenomeni che si verificano nel liquido quantistico; ciò non significa affatto che si può separare realmente il liquido in due parti. Come ogni altra descrizione dei fenomeni quantistici in termini classici, questo modo non è completamente adeguato. In realtà è più corretto dire che nel liquido di Bose quantistico possono prodursi contemporaneamente due moti, ciascuno dei quali è legato alla sua massa efficace (cosicché la somma di queste masse è uguale alla massa reale completa del liquido). Uno di questi moti è « normale », cioè gode delle stesse proprietà del moto di un liquido viscoso ordinario; l'altro, invece, è « superfluido ». Entrambi questi moti si producono senza trasmissione d'impulso dall'uno all'altro.

Quindi, dal punto di vista idrodinamico, la densità del liquido di Bose può essere rappresentata sotto forma della somma $\rho = \rho_n + \rho_s$ delle parti normale e superfluida, ciascuna delle quali è legata alla sua velocità idrodinamica rispettiva: \mathbf{v}_n e \mathbf{v}_s . La potenzialità è una proprietà importante del movimento superfluido:

$$\text{rot } \mathbf{v}_s = 0. \quad (23,5)$$

Questa proprietà è l'espressione macroscopica del fatto che le eccitazioni elementari di grande lunghezza d'onda (cioè di impulsi piccoli) sono quanti sonori, ossia fononi. Pertanto l'idrodinamica macro-

scopica del movimento superfluido non deve ammettere altre vibrazioni, tranne le vibrazioni sonore ¹⁾; ciò è garantito fra l'altro dalla condizione (23,5) (alla cui giustificazione noi torniamo ancora al § 26) ²⁾.

Per $T = 0$ la parte normale della densità è $\rho_n = 0$; il liquido può eseguire soltanto il movimento superfluido. A temperature diverse da zero ρ_n è data dalla formula (23,4):

$$\rho_n = \frac{1}{3} \int \left(-\frac{dn}{d\varepsilon} \right) p^2 d\tau. \quad (23,6)$$

Per calcolare il contributo fononico in ρ_n , poniamo nella (23,6) $\varepsilon = up$:

$$(\rho_n)_f = -\frac{1}{3u} \int_0^\infty \frac{dn}{dp} p^2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

e dopo integrazione per parti troviamo

$$(\rho_n)_f = \frac{4}{3u} \int_0^\infty np \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4}{3u^2} \int \varepsilon n d\tau.$$

L'integrale rimanente qui non rappresenta altro che l'energia dell'unità di volume del gas fononico; ricavando questa grandezza dalla (22,4), otteniamo infine

$$(\rho_n)_f = \frac{4E_f}{3u^2V} = \frac{2\pi^2 T^4}{45\hbar^3 u^5}. \quad (23,7)$$

Per calcolare, invece, il contributo rotonico in ρ_n , osserviamo quanto segue: poiché i rotoni si possono descrivere mediante la distribuzione di Boltzmann, allora per essi $dn/d\varepsilon = -n/T$, e dalla (23,6) ricaviamo

$$(\rho_n)_r = \frac{1}{3T} \int p^2 n d\tau = \frac{\overline{p^2}}{3T} \frac{N_r}{V}.$$

Ponendo, con precisione sufficiente, $\overline{p^2} = p_0^2$ e ricavando N_r dalla (22,9), otteniamo

$$(\rho_n)_r = \frac{p_0^2 N_r}{3TV} = \frac{2(m^*)^{1/2} p_0^4}{3(2\pi)^{3/2} T^{1/2} \hbar^3} e^{-\Delta T}. \quad (23,8)$$

Alle temperature più basse il contributo fononico in ρ_n è grande rispetto a quello rotonico. Essi diventano uguali pressappoco per

¹⁾ È supposto che il liquido sia illimitato. In presenza di superficie libera sono possibili anche delle onde capillari superficiali (ciò conduce a una determinata dipendenza termica della tensione superficiale; vedi il problema 1).

²⁾ Per uno studio più dettagliato dell'idrodinamica del liquido superfluido vedi un altro volume del presente Corso (volume VI).

0,6 K, e per temperature più elevate il contributo rotonico diventa prevalente.

Al crescere della temperatura una parte sempre più grande della massa liquida diventa normale. Nel punto in cui si ottiene l'uguaglianza $\rho_n = \rho$ la proprietà di superfluidità scompare completamente. Questo punto, detto λ -punto del liquido, rappresenta un punto di transizione di fase di seconda specie ¹⁾. Quanto alle formule quantitative (23,7-8), esse, ovviamente, sono inapplicabili nell'intorno del λ -punto, dove la concentrazione di quasi-particelle è così grande che la stessa nozione di esse in misura notevole perde senso.

Sofferamoci ancora sulla questione inerente al comportamento degli atomi di impurità sciolte nell'elio liquido; la concentrazione di queste impurità è supposta così piccola che i loro atomi si possono considerare come non interagenti gli uni con gli altri (*L. D. Landau, I. Ja. Pomerančuk, 1948*).

La presenza di un atomo estraneo nel liquido implica la comparsa di una diramazione nuova dello spettro energetico, corrispondente al passaggio di questo atomo attraverso il liquido; è ovvio che, data la forte interazione fra l'atomo dell'impurità e gli atomi del liquido, questo movimento rappresenta in realtà un'azione comune cui prendono parte anche gli atomi del liquido. A questo movimento si può attribuire un certo impulso risultante p che si conserva. Quindi, nel liquido compaiono quasi-particelle di tipo nuovo (di numero uguale al numero di atomi dell'impurità), la cui energia $\varepsilon_{im}(p)$ è una funzione dell'impulso. Le energie di queste quasi-particelle in equilibrio termico saranno concentrate in prossimità del più piccolo dei minimi della funzione $\varepsilon_{im}(p)$. Infatti, si tratta dell'impurità dell'isotopo He^3 , e i dati empirici mostrano che questo minimo si trova per $p = 0$; nel suo intorno l'energia della quasi-particella ha la forma

$$\varepsilon_{im}(p) = \frac{p^2}{2m_{im}^*} \quad (23,9)$$

con la massa efficace $m_{im}^* = 2,8$ masse dell'atomo He^3 .

Le quasi-particelle di impurità interagiscono con i fononi e i rotoni entrando in collisione con essi e, quindi, appartengono alla composizione della parte normale del liquido. Poiché la concentrazione di queste quasi-particelle è piccola, la loro distribuzione termica

¹⁾ L'elio liquido alle temperature al di sotto di questo punto è detto elio II. I λ -punti formano una linea sul diagramma delle fasi nel piano P, T . Questa linea interseca la linea di equilibrio fra il liquido e il vapore alla temperatura di 2,19 K.

è rappresentata da quella di Boltzmann e il loro contributo in ρ_n (definito dalla (23,6)) è dato dalla formula

$$(\rho_n)_{1m} = \frac{N_{1m}}{V} \frac{\overline{p^2}}{3T} = \frac{N_{1m}}{V} m_{1m}^*, \quad (23,10)$$

dove N_{1m}/V è il numero di atomi dell'impurità nell'unità di volume.

PROBLEMI

1. Trovare la legge limite della dipendenza dalla temperatura del coefficiente di tensione superficiale α dell'elio liquido in prossimità dello zero assoluto (*K. R. Atkins, 1953*).

Soluzione. Il coefficiente α è l'energia libera dell'unità di superficie del liquido (vedi V, la formula (154,6)). Questa grandezza si calcola in base alla formula (64,1) del volume V , nella quale le frequenze ω_α sono riferite ora alle vibrazioni superficiali. Nel caso bidimensionale, il passaggio dalla somma all'integrazione (in vettori d'onda delle vibrazioni) va eseguito introducendo il fattore $d^2k/(2\pi)^2$ o $2\pi k dk/(2\pi)^2$. L'integrazione per parti dà

$$\alpha = \alpha_0 + T \int \ln(1 - e^{-\hbar\omega/T}) \frac{k dk}{2\pi} = \alpha_0 - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{k^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

(α_0 è la tensione superficiale per $T = 0$). A temperature sufficientemente basse hanno importanza soltanto le vibrazioni a frequenze piccole, cioè a lunghezze d'onda grandi. Queste vibrazioni rappresentano le onde capillari idrodinamiche per le quali $\omega^2 = \alpha k^3/\rho \approx \alpha_0 k^3/\rho$, dove ρ è la densità del liquido. Pertanto

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\hbar}{4\pi} \left(\frac{\rho}{\alpha_0} \right)^{2/3} \int_0^\infty \frac{\omega^{4/3} d\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

(la convergenza rapida dell'integrale permette di rendere infinito il limite superiore). Il calcolo dell'integrale (vedi la nota al § 58, V) dà

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{T^{7/3} \rho^{2/3}}{4\pi \hbar^{4/3} \alpha_0^{2/3}} \Gamma_1^2\left(\frac{7}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) = \alpha_0 - 0,13 \frac{T^{7/3} \rho^{2/3}}{\hbar^{4/3} \alpha_0^{2/3}}.$$

Questo risultato riguarda l' He^4 liquido a temperature così basse che tutta la massa del liquido può essere considerata superfluida¹⁾.

2. Trovare la legge di dispersione $\varepsilon_{1m}(\mathbf{p})$ per le particelle di impurità in un liquido superfluido in moto se questa legge $\varepsilon_{1m}^{(0)}(p)$ è nota per il liquido in quiete (*J. Bardeen, G. Baym, D. Pines, 1967*).

Soluzione. Dopo aver aggiunto al liquido in quiete (per $T = 0$) un atomo di impurità (di massa m) di impulso \mathbf{p}_0 la sua energia e il suo impulso (nel sistema di coordinate in cui il liquido inizialmente era in quiete) sono $E_0 = \varepsilon_{1m}^{(0)}(p_0)$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{p}_0$. Nel sistema di coordinate, invece, in cui il liquido si muove a velocità \mathbf{v} , secondo la (23,1) abbiamo

$$E = \varepsilon_{1m}^{(0)}(p_0) + \mathbf{p}_0 \mathbf{v} + \frac{1}{2} (M + m) v^2, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_0 + (M + m) \mathbf{v}.$$

¹⁾ Nel liquido di Fermi (He^3 liquido) le onde capillari del tipo considerato (così come le onde volumetriche del suono normale) non esistono a causa di un aumento indefinito della viscosità per $T \rightarrow 0$.

Di qui si vede che le variazioni dell'energia e dell'impulso del liquido in moto con un atomo di impurità associato sono

$$\varepsilon_{\text{im}} = \varepsilon_{\text{im}}^{(0)}(p_0) + \mathbf{p}_0 \mathbf{v} + \frac{mv^2}{2}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m\mathbf{v}.$$

Esprimendo ε_{im} in funzione di \mathbf{p} , troviamo

$$\varepsilon_{\text{im}}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\text{im}}^{(0)}(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) + \mathbf{p}\mathbf{v} - \frac{mv^2}{2}.$$

Per piccoli valori di v , per lo spettro $\varepsilon_{\text{im}}^{(0)}(p)$ della forma (23,9) abbiamo, a meno dei termini del primo ordine,

$$\varepsilon_{\text{im}}(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_{\text{im}}^*} + \mathbf{v}\mathbf{p} \left(1 - \frac{m}{m_{\text{im}}^*}\right).$$

§ 24. Fononi nel liquido

Passando dal quadro classico delle onde sonore alla rappresentazione quantistica dei fononi, le grandezze termodinamiche (densità, velocità del fluido ecc.) vengono sostituite con operatori che si esprimono in funzione degli operatori $\hat{c}_{\mathbf{k}}$, $\hat{c}_{\mathbf{k}}^\dagger$ di distruzione e creazione dei fononi. Deduciamo le formule che forniscono queste espressioni.

Ricordiamo che nella descrizione classica di un'onda sonora la densità del liquido è sottoposta a piccole vibrazioni di frequenza e vettore d'onda legati dalla relazione $\omega = uk$. La velocità del liquido \mathbf{v} ha lo stesso ordine di grandezza infinitesimale che la parte variabile della densità $\rho' = \rho - \rho_0$ (essendo ρ_0 la densità in equilibrio). Il movimento del liquido nell'onda è potenziale, cioè può essere descritto dal potenziale scalare della velocità φ che determina la velocità secondo la relazione

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi. \quad (24,1)$$

La velocità e la densità sono legate reciprocamente dall'equazione di continuità $\partial\rho'/\partial t = -\text{div}(\rho\mathbf{v}) \approx -\rho_0 \text{div} \mathbf{v}$, ossia

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\rho_0\Delta\varphi. \quad (24,2)$$

L'energia del liquido in un'onda sonora è data dall'integrale

$$E = \int \left(\frac{\rho_0\mathbf{v}^2}{2} + \frac{u^2\rho'^2}{2\rho_0} \right) d^3x. \quad (24,3)$$

Il primo termine dell'espressione integranda è la densità dell'energia cinetica e il secondo dell'energia interna del liquido; ambedue i termini sono quadratici nelle grandezze piccole \mathbf{v} e ρ' .

L'ulteriore procedimento di quantizzazione si potrebbe effettuare completamente in modo analogo, come è stato fatto per i fononi nei cristalli solidi (vedi V, § 72). Tuttavia, seguiremo qui un'altra via

che fornisce alcuni momenti metodologici assai istruttivi. Consideriamo dapprima gli operatori di densità e velocità del liquido, espressi in funzione di variabili microscopiche, cioè mediante le coordinate delle particelle.

Nella teoria classica la densità ρ e la densità del flusso della massa liquida \mathbf{j} possono essere rappresentate dalle somme

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a \mathbf{p}_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}),$$

calcolate su tutte le particelle (\mathbf{r}_a e \mathbf{p}_a sono raggi vettori e impulsi delle particelle); gli integrali di queste funzioni in un volume qualsiasi danno la massa e l'impulso completi del liquido in questo volume. Passando alla teoria quantistica, queste funzioni vengono sostituite dagli operatori corrispondenti. L'operatore di densità ha la stessa forma

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}), \quad (24,4)$$

mentre l'operatore di densità del flusso è

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_a \{ \hat{\mathbf{p}}_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}_a \}, \quad (24,5)$$

dove $\hat{\mathbf{p}}_a = -i\hbar \nabla_a$ rappresenta l'operatore di impulso della particella¹⁾.

Troviamo la regola di commutazione fra gli operatori $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ e $\hat{\rho}(\mathbf{r}')$, calcolati nei punti \mathbf{r} e \mathbf{r}' ; in questo caso si può considerare, per brevità, un solo termine nelle somme (24,4-5) in quanto gli operatori corrispondenti a diverse particelle sono commutativi. Sviluppando il commutatore, gli operatori della forma $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \nabla_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')$ si trasformano nel seguente modo:

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \nabla_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + \\ + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \nabla_1,$$

dove l'espressione $(\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ del primo termine non significa altro che il gradiente della funzione δ ; dato che questo termine con-

¹⁾ Supponiamo, per semplicità, che il sistema sia composto di una sola particella. La media dell'operatore $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = m \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ rispetto allo stato con funzione d'onda $\psi(\mathbf{r}_1)$ dà $\int \psi^*(\mathbf{r}_1) \hat{\rho} \psi(\mathbf{r}_1) d^3x_1 = m |\psi(\mathbf{r})|^2$, come deve essere.

Analogamente, la media dell'operatore $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ fornisce l'espressione corretta per la densità del flusso

$$(\hbar/2i) \{ \psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r}) \}.$$

tiene il fattore $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ vi si può scrivere $(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ al posto di $(\nabla_1\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'))$. Come risultato otteniamo

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})\hat{\rho}(\mathbf{r}') - \hat{\rho}(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = -i\hbar\hat{\rho}(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')). \quad (24,6)$$

Introduciamo ora, al posto di $\hat{\mathbf{j}}$, l'operatore di velocità dei liquidi $\hat{\mathbf{v}}$ in base alla definizione

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}).$$

La regola di commutazione degli operatori $\hat{\rho}$ e $\hat{\mathbf{v}}$ è determinata dalla condizione che per il commutatore di $\hat{\rho}$ e $\hat{\mathbf{j}}$ si abbia l'espressione (24,6). È facile provare che a tal fine occorre porre

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})\hat{\rho}(\mathbf{r}') - \hat{\rho}(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) = -i\hbar(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$$

(tenendo intanto conto della commutatività evidente degli operatori $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ e $\hat{\rho}(\mathbf{r}')$). Infine, ponendo $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}) = \nabla\hat{\varphi}(\mathbf{r})$, otteniamo la seguente regola di commutazione fra gli operatori di densità e di potenziale della velocità:

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r})\hat{\rho}'(\mathbf{r}') - \hat{\rho}'(\mathbf{r}')\hat{\varphi}(\mathbf{r}) = -i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (24,7)$$

(è evidente che al posto di $\hat{\rho}$ si può scrivere qui l'operatore $\hat{\rho}' = \hat{\rho} - \rho_0$ della parte variabile della densità). La regola (24,7) è analoga alla regola di commutazione fra la coordinata e l'impulso della particella; in questo senso le grandezze ρ' e φ fungono nel caso considerato da « coordinate » ed « impulsi » generalizzati canonicamente coniugati.

Utilizzando le espressioni (24,4-5) per stabilire la regola (24,7), scriviamo ora gli operatori $\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}'$ nella rappresentazione della seconda quantizzazione (esprimendoli cioè in funzione degli operatori di distruzione e creazione dei fononi) chiedendo in questo caso che essi soddisfino la regola (24,7). A tal fine scriviamo

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + A_{\mathbf{k}}^*\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}})$$

a coefficienti $A_{\mathbf{k}}$ per il momento indeterminati; la sommatoria va estesa a tutti i valori che il vettore d'onda descrive in un volume V grande ma finito¹⁾. Gli operatori $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ e $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ verificano le regole

¹⁾ A differenza degli operatori ψ delle particelle, l'operatore di una grandezza reale φ è hermitiano e contiene contemporaneamente gli operatori di annichilazione e creazione dei fononi. Ricordiamo che questa proprietà (così come la stessa proprietà degli operatori di campo in elettrodinamica quantistica) è dovuta alla non conservazione del numero di « particelle » nel campo fononico.

di commutazione di Bose

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} - \hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (24,8)$$

Per gli ulteriori rimandi ricordiamo che gli elementi matriciali non nulli di questi operatori sono

$$\langle n_{\mathbf{k}} - 1 | \hat{c}_{\mathbf{k}} | n_{\mathbf{k}} \rangle = \langle n_{\mathbf{k}} | \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} | n_{\mathbf{k}} - 1 \rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}}}, \quad (24,9)$$

dove $n_{\mathbf{k}}$ sono i numeri di riempimento degli stati fononici.

Tuttavia, nel seguito avremo bisogno dell'operatore di Heisenberg $\hat{\varphi}(t, \mathbf{r})$, anziché di quello di Schrödinger $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$. Esso si ottiene semplicemente da $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ introducendo i fattori $\exp(\pm i\omega t)$ a frequenze $\omega = uk$ in ciascun termine della somma

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} (A_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \hbar u t)} + A_{\mathbf{k}}^*\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \hbar u t)})$$

(cfr. quanto detto a questo proposito per gli operatori ψ all'inizio del § 9). Quanto all'operatore di densità $\hat{\rho}'(t, \mathbf{r})$, esso deve essere connesso all'operatore $\hat{\varphi}(t, \mathbf{r})$ mediante la relazione (24,2) e, di conseguenza, viene dato dalla stessa somma coi fattori $iA_{\mathbf{k}}\rho_0\hbar k/u$ al posto di $A_{\mathbf{k}}$. In seguito i fattori $A_{\mathbf{k}}$ si devono determinare tali che si verifichi la regola di commutazione (24,7). Infine, otteniamo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar u}{2V\rho_0 k} \right)^{1/2} (\hat{c}_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\hbar t)} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\hbar t)}), \\ \hat{\rho}'(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} i \left(\frac{\rho_0\hbar k}{2Vu} \right)^{1/2} (\hat{c}_{\mathbf{k}}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\hbar t)} - \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - u\hbar t)}). \end{aligned} \quad (24,10)$$

Infatti, sostituendo queste espressioni nel primo membro della regola (24,7) e tenendo conto della (24,8), otteniamo la funzione δ cercata

$$\begin{aligned} & -i\hbar \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} (\hat{c}_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger} - \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{k}}) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} = \\ & = -\frac{i\hbar}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \rightarrow -\frac{i\hbar}{V} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} = -i\hbar\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

È facile convincersi anche che l'operatore hamiltoniano del liquido, che si ottiene rimpiazzando \mathbf{v} e ρ' con $\hat{\mathbf{v}} = \nabla\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}'$, nell'integrale (24,3) ha, come deve, la forma

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} u\hbar k \left(\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger}\hat{c}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right);$$

i suoi autovalori sono uguali a $\sum u\hbar k (n_k + 1/2)$ in accordo con la rappresentazione dei fononi di energie $\varepsilon = u\hbar k$.

L'espressione (24,3) per l'energia del liquido nell'onda sonora rappresenta i primi termini (dopo quello zero) dello sviluppo dell'espressione esatta

$$E = \int \left[\frac{\rho v^2}{2} + \rho e(\rho) \right] d^3x$$

(dove $e(\rho)$ è l'energia interna dell'unità di massa del liquido). Questo integrale, nel quale v e ρ sono sostituiti dagli operatori $\hat{v} = \nabla \hat{\varphi}$ e $\hat{\rho} = \rho_0 + \hat{\rho}'$ con $\hat{\varphi}$ e $\hat{\rho}'$ ricavati dalla (24,10), funge da operatore hamiltoniano esatto

$$\hat{H} = \int \left[\frac{\hat{v} \hat{\rho} \hat{v}}{2} + \hat{\rho} e(\hat{\rho}) \right] d^3x \quad (24,11)$$

(l'operatore dell'energia cinetica è scritto nella forma simmetrizzata $\hat{v} \hat{\rho} \hat{v} / 2$ per essere hermitiano). In questo caso è importante che ρ e φ rappresentino « coordinate ed impulsi generalizzati » canonicamente coniugati mediante i quali deve essere espresso l'operatore hamiltoniano. Ciò si vede dal fatto che la regola di commutazione (24,7), cui soddisfano gli operatori (24,10), è esatta in quanto per la sua deduzione non è stato mai supposto che le oscillazioni fossero piccole.

I termini di grado più elevato (di terzo ecc.) dello sviluppo di questo operatore hamiltoniano esprimono la natura anarmonica delle vibrazioni sonore, mentre in termini di rappresentazione fononica descrivono l'interazione fra i fononi. Questi termini hanno elementi matriciali per le transizioni con variazione simultanea di alcuni numeri di riempimento dei fononi e, quindi, fungono da perturbazione che genera processi disparati di diffusione e decadimento dei fononi. In questo caso gli elementi matriciali degli stessi operatori \hat{c}_k e \hat{c}_k^\dagger hanno, ovviamente, la precedente forma (24,9), poiché (come si fa sempre nella teoria delle perturbazioni) si usa una rappresentazione in cui l'operatore hamiltoniano imperturbato è diagonale. Diamo qui le espressioni per i termini del terzo e del quarto ordine:

$$\hat{H}^{(3)} = \int \left[\frac{\hat{v} \hat{\rho}' \hat{v}}{2} + \left(\frac{d}{d\rho_0} \frac{u^2}{\rho_0} \right) \frac{\hat{\rho}'^3}{6} \right] d^3x, \quad (24,12)$$

$$\hat{H}^{(4)} = \frac{1}{24} \left(\frac{d^2}{d\rho_0^2} \frac{u^2}{\rho_0} \right) \int \hat{\rho}'^4 d^3x. \quad (24,13)$$

§ 25. Gas di Bose quasi-perfetto degenero

Le proprietà fondamentali dello spettro energetico del tipo di Bose sono evidenti in un modello di gas di Bose debolmente non perfetto a temperature vicine allo zero. Questo modello verrà studia-

to nel presente paragrafo, così come abbiamo fatto al § 6 per il gas di Fermi ¹⁾. Quanto detto al § 6 riguardo alla caratteristica generale dei modelli di un gas quasi-perfetto degenerare si riferisce ugualmente al caso in questione. In particolare, la condizione per cui un gas è debolmente non perfetto (il parametro gassoso vale $a(N/V)^{1/3} \ll 1$ con a come lunghezza di diffusione) può essere formulata, come prima, nella forma della condizione (6,1) di piccolezza degli impulsi delle particelle: $pa/\hbar \ll 1$ ²⁾.

L'operatore hamiltoniano di un sistema di bosoni (che supporremo non aventi spin) interagenti a coppie ha una forma che differisce dalla (6,6) soltanto per mancanza degli indici di spin:

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{1}{2} \sum \langle p_1 p_2 | U | p_1 p_2 \rangle \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1} \quad (25,1)$$

(la sommatoria è estesa a tutti gli impulsi che figurano negli indici). Quanto agli operatori di distruzione e creazione delle particelle, ora essi verificano le regole di commutazione

$$\hat{a}_p \hat{a}_p^+ - \hat{a}_p^+ \hat{a}_p = 1.$$

Come al § 6, in accordo con l'ipotesi di impulsi piccoli, sostituiamo di nuovo tutti gli elementi matriciali nella (25,1) con i loro valori per impulsi nulli; allora

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{U_0}{2V} \sum \hat{a}_{p_1}^+ \hat{a}_{p_2}^+ \hat{a}_{p_2} \hat{a}_{p_1}. \quad (25,2)$$

La seguente osservazione serve come punto di partenza per l'applicazione della teoria delle perturbazioni a questo operatore hamiltoniano. Nello stato fondamentale del gas di Bose perfetto tutte le particelle si trovano in *condensato*, ossia nello stato di energia nulla; i numeri di riempimento $N_{p=0} \equiv N_0 = N$, $N_p = 0$ per $p \neq 0$ (vedi V, § 62). Quanto al gas quasi-perfetto, i numeri N_p nello stato fondamentale e negli stati debolmente eccitati sono diversi da zero, ma sempre molto piccoli rispetto al numero macroscopicamente grande N_0 . Ciò che la grandezza $\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 = N_0 \approx N$ è assai grande rispetto all'unità significa che l'espressione

$$\hat{a}_0 \hat{a}_0^+ - \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 = 1$$

¹⁾ Il metodo che viene esposto sotto appartiene a *N. N. Bogoljubov* (1947). L'applicazione di questo metodo al gas di Bose è stato il primo esempio di deduzione microscopica conseguente dello spettro energetico dei « liquidi quantistici ».

²⁾ Noi vedremo più avanti che nel gas di Bose degenerare la massa principale di particelle (fuori del « condensato ») ha impulsi $p \sim \hbar \sqrt{aN/V}$ per i quali la detta disuguaglianza è effettivamente valida.

è piccola rispetto ai valori stessi \hat{a}_0, \hat{a}_0^+ ; perciò questi ultimi si possono considerare come numeri ordinari (uguali a $\sqrt{N_0}$) trascurandone la non commutatività.

Formalmente l'applicazione della teoria delle perturbazioni significa ora lo sviluppo della somma quadrupla nell'espressione (25,2) in potenze delle grandezze piccole \hat{a}_p e \hat{a}_p^+ ($p \neq 0$). Il termine nullo dello sviluppo vale

$$\hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 = a_0^4. \quad (25,3)$$

I termini del primo ordine mancano (poiché è impossibile osservare in essi la legge di conservazione dell'impulso). I termini del secondo ordine sono

$$a_0^2 \sum_{p \neq 0} (\hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p^+ \hat{a}_{-p}^+ + 4\hat{a}_p^+ \hat{a}_p). \quad (25,4)$$

Se ci limitiamo alla precisione fino ai termini del secondo ordine, possiamo sostituire $a_0^2 = N_0$ nella (25,4) al numero completo di particelle N . Nel termine (25,3), invece, si deve tener conto della relazione più precisa

$$a_0^2 + \sum_{p \neq 0} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p = N.$$

Come risultato la somma dei termini (25,3-4) diventa uguale a

$$N^2 + N \sum_{p \neq 0} (\hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p^+ \hat{a}_{-p}^+ + 2\hat{a}_p^+ \hat{a}_p),$$

e dopo la sua sostituzione nella (25,2) otteniamo la seguente espressione per l'operatore hamiltoniano:

$$\hat{H} = \frac{N^2}{2V} U_0 + \sum_p \frac{p^2}{2m} \hat{a}_p^+ \hat{a}_p + \frac{N}{2V} U_0 \sum_{p \neq 0} (\hat{a}_p \hat{a}_{-p} + \hat{a}_p^+ \hat{a}_{-p}^+ + 2\hat{a}_p^+ \hat{a}_p). \quad (25,5)$$

Il primo termine di questa espressione definisce, in prima approssimazione, l'energia E_0 dello stato fondamentale del gas, mentre la sua derivata rispetto a N definisce rispettivamente il potenziale chimico μ per $T = 0$:

$$E_0 = \frac{N^2}{2V} U_0, \quad \mu = \frac{N}{V} U_0. \quad (25,6)$$

Gli altri termini (nella (25,5)) danno, invece, la correzione ad E_0 e lo spettro di stati debolmente eccitati del gas.

L'integrale U_0 che figura nella (25,5) deve essere ancora espresso in funzione di una grandezza fisica reale, ossia della lunghezza di diffusione a . Nei termini del secondo ordine ciò si può eseguire direttamente in base alla formula (6,2): $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$. Quanto al primo

termine, qui occorre la formula più esatta (6,5), che tiene conto della seconda approssimazione di Born nell'ampiezza di diffusione. Inoltre si tratta di due particelle collidenti del condensato per cui nella somma della (6,5) bisogna porre $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$, $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}$ in modo che si abbia

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \frac{1}{p^2} \right).$$

Sostituendo questa espressione nella (25,5), avremo per l'operatore hamiltoniano

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \frac{N^2}{V} \left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \frac{1}{p^2} \right) + \\ & + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \frac{N}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{p}}^{\dagger} + 2\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}}) + \sum_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (25,7)$$

Per determinare i livelli energetici, occorre ridurre l'operatore hamiltoniano alla forma diagonale, il che si ottiene mediante una trasformazione lineare appropriata degli operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$. Introduciamo i nuovi operatori $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ in base alla definizione

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} = u_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + v_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}},$$

e, inoltre, chiediamo che essi verifichino le stesse relazioni di commutazione

$$\hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'} - \hat{b}_{\mathbf{p}'} \hat{b}_{\mathbf{p}} = 0, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{\mathbf{p}'}^{\dagger} - \hat{b}_{\mathbf{p}'}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{p}} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'},$$

degli operatori $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$. Si vede facilmente che a tal fine deve essere $u_{\mathbf{p}}^2 - v_{\mathbf{p}}^2 = 1$. Tenendone conto, scriviamo la trasformazione lineare come segue:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} = \frac{\hat{b}_{\mathbf{p}} + L_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}}{\sqrt{1 - L_{\mathbf{p}}^2}}, \quad \hat{a}_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \frac{\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} + L_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}}{\sqrt{1 - L_{\mathbf{p}}^2}}. \quad (25,8)$$

La grandezza $L_{\mathbf{p}}$ deve essere definita in modo tale che nell'operatore hamiltoniano scompaiano i termini non diagonali ($\hat{b}_{\mathbf{p}} \hat{b}_{-\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{p}}^{\dagger}$). Un semplice calcolo dà

$$L_{\mathbf{p}} = \frac{1}{mu^2} \left\{ \varepsilon(p) - \frac{p^2}{2m} - mu^2 \right\}, \quad (25,9)$$

dove si sono introdotte le seguenti notazioni:

$$\varepsilon(p) = \left[u^2 p^2 + \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (25,10)$$

$$u = \left(\frac{4\pi\hbar^2 a N}{m^2 V} \right)^{1/2}. \quad (25,11)$$

In questo caso l'operatore hamiltoniano diventa

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \varepsilon(\mathbf{p}) \hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{p}}, \quad (25,12)$$

dove

$$E_0 = \frac{N}{2} m u^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \left\{ \varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{p^2}{2m} - m u^2 + \frac{m^3 u^4}{p^2} \right\}. \quad (25,13)$$

La forma dell'operatore hamiltoniano (25,12) e le relazioni di Bose della commutazione fra gli operatori $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ permettono di concludere che $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ e $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ rappresentano operatori di creazione e distruzione delle quasi-particelle di energia $\varepsilon(\mathbf{p})$ che obbediscono alla statistica di Bose. Gli autovalori dell'operatore diagonale $\hat{b}_{\mathbf{p}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{p}}$ rappresentano i numeri $n_{\mathbf{p}}$ di quasi-particelle con impulso \mathbf{p} , mentre la formula (25,10) determina la dipendenza della loro energia dall'impulso (di nuovo i numeri di riempimento delle quasi-particelle sono indicati con $n_{\mathbf{p}}$ a differenza dei numeri di riempimento $N_{\mathbf{p}}$ delle particelle vere e proprie del gas). Con ciò lo spettro energetico degli stati debolmente eccitati del gas considerato è completamente determinato.

La grandezza E_0 , invece, è l'energia dello stato fondamentale del gas. Sostituendo alla sommatoria sui valori discreti di \mathbf{p} (nel volume V) l'integrazione in $V d^3 p / (2\pi\hbar)^3$ ed eseguendo i calcoli, otteniamo la seguente espressione:

$$E_0 = \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV} \left[1 + \frac{128}{15} \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}} \right] \quad (25,14)$$

(*T. D. Lee, C. N. Yang, 1957*). Rispettivamente, per il potenziale chimico del gas (per $T = 0$) abbiamo

$$\mu = \frac{\partial E_0}{\partial N} = \frac{4\pi\hbar^2 a N}{mV} \left[1 + \frac{32}{3} \sqrt{\frac{a^3 N}{\pi V}} \right]. \quad (25,15)$$

Queste formule rappresentano i due primi termini dello sviluppo in potenze di $(a^3 N / V)^{1/2}$. Ma già il termine successivo non potrebbe essere calcolato con il suddetto metodo. Esso deve contenere il volume come V^{-2} , e una grandezza di questo ordine dipende ormai non soltanto dagli urti doppi, ma anche da quelli tripli.

Per grandi valori dell'impulso ($p \gg mu$) l'energia delle quasi-particelle (25,10) tende a $p^2/2m$, cioè all'energia cinetica di una singola particella del gas.

Invece, per piccoli impulsi ($p \ll mu$) abbiamo $\varepsilon \approx up$. È facile vedere che il coefficiente u coincide con la velocità del suono nel gas, cosicché questa espressione corrisponde ai fononi, in accordo con le affermazioni generali fatte al § 22. Per $T = 0$ l'energia libera

coincide con l'energia E_0 ; considerando il termine generale nello sviluppo di quest'ultima, troviamo la pressione

$$P = - \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV^2}.$$

Quanto alla velocità del suono, otteniamo $u = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ (dove $\rho = mN/V$ è la densità del gas), il che coincide con la formula (25,14).

Notiamo che nel modello considerato del gas di Bose la lunghezza di diffusione a deve necessariamente essere positiva (interazione di repulsione fra le particelle). Formalmente ciò si vede già dal fatto che nelle formule ottenute comparirebbero termini immaginari per l'energia se a fosse negativa. Il significato termodinamico della condizione $a > 0$ è che essa è necessaria, affinché nel suddetto modello del gas di Bose sia verificata la disuguaglianza $(\partial P / \partial V)_T < 0$.

La distribuzione statistica delle eccitazioni elementari (dove \bar{n}_p sono le medie dei loro numeri di riempimento) a temperatura non nulla è data semplicemente dalla formula di distribuzione di Bose (22,2). Quanto alla distribuzione \bar{N}_p degli impulsi delle particelle vere del gas, la si può calcolare mediante la media dell'operatore $\hat{a}_p^+ \hat{a}_p$. Utilizzando la (25,8) e tenendo conto che i prodotti $\hat{b}_{-p} \hat{b}_p$ e $\hat{b}_p^+ \hat{b}_{-p}^+$ non hanno elementi matriciali diagonali, otteniamo

$$\bar{N}_p = \frac{\bar{n}_p + L_p^2 (\bar{n}_p + 1)}{1 - L_p^2}. \quad (25,16)$$

Questa espressione è valida, ovviamente, soltanto per $p \neq 0$. Il numero di particelle di impulso nullo è

$$\bar{N}_0 = N - \sum_{p \neq 0} \bar{N}_p = N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \bar{N}_p d^3 p. \quad (25,17)$$

In particolare, allo zero assoluto tutti gli $n_p = 0$, e mediante la formula (25,9) ricaviamo dalla (25,16) la funzione di distribuzione nella forma ¹⁾

$$N_p = \frac{m^2 u^4}{2\varepsilon(p) \{\varepsilon(p) + p^2/2m + mu^2\}} \quad (25,18)$$

(per $T = 0$ i valori medi di N_p coincidono con i valori esatti; perciò omettiamo il trattino orizzontale sopra la lettera). La natura non perfetta del gas di Bose implica, naturalmente, la comparsa di

¹⁾ Notiamo che il massimo del numero di particelle con dato valore dell'impulso ($\sim p^2 N_p$) si trova per $p/\hbar \sim \sqrt{aN/V}$, dove si produce il passaggio da un'espressione limite di $\varepsilon(p)$ a un'altra. Questa circostanza è stata già menzionata nella nota alla pag. 129.

particelle con impulso non nullo anche allo zero assoluto; l'integrazione nella (25,17) con N_p della (25,18) è semplice e dà

$$N_0 = N \left[1 - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{Na^3}{\pi V}} \right]. \quad (25,19)$$

Infine, facciamo un'altra osservazione a proposito dello spettro qui ottenuto. Per p piccoli la derivata $d^2\varepsilon/dp^2 > 0$, vale a dire che la curva $\varepsilon(p)$ si piega in alto sopra la tangente iniziale $\varepsilon = up$. In questo caso (vedi più avanti, § 34) lo spettro diventa instabile, il che è dovuto alla possibilità di decadimento spontaneo delle quasiparticelle (fononi). Tuttavia, la larghezza corrispondente dei livelli è piccola (proporzionale a p^3 per p piccoli) e non incide sulle espressioni che si ottengono nelle approssimazioni considerate.

§ 26. Funzione d'onda del condensato

Come è stato detto già al § 23, la comparsa o la scomparsa della superfluidità nell'elio liquido avviene per transizione di fase di seconda specie. Questa transizione è sempre legata a un certo cambiamento qualitativo delle proprietà del corpo. Nel caso del λ -punto dell'elio liquido, questo cambiamento può essere descritto macroscopicamente come la comparsa o la scomparsa della componente superfluida del liquido. Da un punto di vista macroscopico più approfondito, qui si tratta di proprietà determinate della distribuzione degli impulsi delle particelle (vere!) del liquido. A differenza di un liquido non superfluido, una parte finita di particelle (cioè un loro numero macroscopicamente grande) nel liquido superfluido ha un impulso rigorosamente nullo; queste particelle formano il *condensato di Bose-Einstein* (o, semplicemente, condensato) nello spazio degli impulsi. Ricordiamo che in un gas di Bose perfetto, per $T = 0$, tutte le particelle si trasformano in condensato (vedi V, § 62), e in un gas quasi-perfetto quasi tutte. Nel caso di liquido di Bose a forte interazione fra le particelle, la frazione del numero di particelle che per $T = 0$ si trovano in condensato non è affatto vicina all'unità.

Mostriamo come la proprietà di condensazione bose-einsteiniana viene formulata in termini di operatori ψ .

Per un gas di Bose perfetto — sistema di bosoni non interagenti — l'operatore ψ di Heisenberg si scrive in forma esplicita nel seguente modo ¹⁾:

$$\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r} - \frac{i}{\hbar} \frac{p^2}{2m} t \right\}. \quad (26,1)$$

¹⁾ Vedi la formula (9,3). Supponiamo che le particelle del gas siano senza spin per cui l'indice di spin manca. Nella (26,1) si è tenuto anche conto che per il gas di Bose perfetto il potenziale chimico μ è nullo per $T = 0$, e perciò il termine $-\mu t/\hbar$ negli esponenti è omissso.

Come è stato spiegato al § 25, si può trascurare la non commutatività degli operatori \hat{a}_0 a \hat{a}_0^+ , considerandoli cioè come grandezze classiche. In altre parole, parte dell'operatore ψ (26,1), denotiamola con Ξ , risulta essere un numero ordinario:

$$\hat{\Xi} = \frac{\hat{a}_0}{\sqrt{V}}. \quad (26,2)$$

Per formulare questa proprietà degli operatori ψ nel caso generale di un liquido di Bose qualsiasi, osserviamo quanto segue: poiché nel condensato si trova lo stesso numero di particelle macroscopicamente grande, la variazione di questo numero di 1 non cambia sostanzialmente lo stato del sistema; si può dire che, aggiungendo (o sottraendo) una particella al condensato da un certo stato del sistema di N particelle, si ottiene lo « stesso » stato del sistema di $N \pm 1$ particelle ¹⁾. In particolare, lo stato fondamentale resta tale quale era. Indicando con $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^+$ la parte degli operatori ψ , che cambia di 1 il numero di particelle nel condensato, abbiamo, quindi, per definizione

$$\hat{\Xi}|m, N+1\rangle = \Xi|m, N\rangle, \quad \hat{\Xi}^+|m, N\rangle = \Xi^*|m, N+1\rangle,$$

dove i simboli $|m, N\rangle$ e $|m, N+1\rangle$ esprimono due stati « uguali » che differiscono soltanto per il numero di particelle nel sistema, e Ξ è un certo numero complesso. Queste affermazioni sono valide rigorosamente nel limite $N \rightarrow \infty$. Pertanto la definizione della grandezza Ξ deve essere scritta nella forma

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle m, N | \hat{\Xi} | m, N+1 \rangle &= \Xi, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \langle m, N+1 | \hat{\Xi}^+ | m, N \rangle &= \Xi^*; \end{aligned} \quad (26,3)$$

il passaggio al limite va eseguito per un dato valore finito della densità del liquido N/V .

Se rappresentiamo gli operatori ψ come

$$\hat{\Psi} = \hat{\Xi} + \hat{\Psi}', \quad \hat{\Psi}^+ = \hat{\Xi}^+ + \hat{\Psi}'^+, \quad (26,4)$$

la loro parte restante (« sopra condensato ») trasforma lo stato $|m, N\rangle$ negli stati ortogonali ad esso, cioè gli elementi matriciali ²⁾

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle m, N | \hat{\Psi}' | m, N+1 \rangle = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \langle m, N+1 | \hat{\Psi}'^+ | m, N \rangle = 0. \quad (26,5)$$

¹⁾ L'aggiunta o la sottrazione di una particella deve essere supposta come un processo indefinitamente lento, ciò che esclude un'eccitazione del sistema da parte di un campo variabile.

²⁾ A scanso di equivoci, ricordiamo ancora una volta che queste uguaglianze si riferiscono unicamente alle transizioni fra stati « uguali »!

Nel limite $N \rightarrow \infty$ la differenza fra gli stati $|m, N\rangle$ e $|m, N+1\rangle$ scompare completamente, e in questo senso la grandezza Ξ diventa il valore medio dell'operatore $\hat{\Psi}$ rispetto a questo stato. Sottolineiamo che la finitezza di questo limite è caratteristica per un sistema con condensato.

Le uguaglianze (26,3) esauriscono le proprietà « operatoriali » di $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^+$ e si possono supporre commutative con $\hat{\Psi}'$, $\hat{\Psi}'^+$. In particolare, gli operatori $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^+$ verranno sostituiti con Ξ , Ξ^* , cioè si comporteranno come grandezze classiche, qualunque siano i valori medi rispetto allo stato fondamentale. Sottolineiamo di nuovo che questa approssimazione implica (dato il numero macroscopico di particelle nel condensato) che vengano trascurate soltanto le quantità di ordine relativo di grandezza di $1/N^1$.

Se la dipendenza temporale delle funzioni d'onda è determinata in base all'operatore hamiltoniano $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$, la grandezza Ξ non dipende dal tempo. Infatti, l'elemento matriciale $\langle m, N | \Xi | m, N+1 \rangle$ è proporzionale a

$$\exp \left\{ -\frac{it}{\hbar} [E(N+1) - E(N) - (N+1)\mu + N\mu] \right\}.$$

Ma questo esponente si annulla poiché $E(N+1) - E(N) = \mu$ (a meno della grandezza $\sim 1/N$).

In un liquido omogeneo fisso, Ξ è indipendente anche dalle coordinate e (per una fase appropriata di questa grandezza complessa) vale semplicemente

$$\Xi = \sqrt{n_0}, \quad (26,6)$$

dove n_0 è il numero di particelle condensate per unità di volume del liquido. Infatti, $\hat{\Xi}^+ \hat{\Xi}$ è l'operatore di densità del numero di particelle nel condensato, e il valore medio di questo operatore vale esattamente n_0 .

L'esistenza del condensato conduce a una differenza qualitativa fra le proprietà della matrice densità di particelle del liquido di Bose e della matrice densità di un liquido normale. La matrice densità del liquido di Bose omogeneo in uno stato arbitrario è data dall'espressione

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle m, N | \hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1) | m, N \rangle, \quad (26,7)$$

dove questa funzione dipende unicamente dalla differenza $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ (cfr. la formula (7,13)). Sostituendovi gli operatori ψ della forma (26,4) e tenendo conto delle proprietà (26,3) e (26,5), otteniamo

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n_0 + N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (26,8)$$

¹⁾ In particolare, con questa approssimazione si devono supporre coincidenti gli elementi matriciali degli operatori $\hat{\Psi}'$ per le transizioni fra diversi stati che differiscono per un numero uguale (piccolo) di particelle nel sistema.

La matrice densità « sopra condensato » ρ' tende a zero per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$; invece la matrice densità ρ tende, in questo caso, a un limite finito n_0/N . Con ciò si spiega l'esistenza nel liquido superfluido di un « ordine distante », assente nei liquidi normali in cui sempre $\rho \rightarrow 0$ per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$. Questa è la proprietà di simmetria che distingue la fase superfluida del liquido da quella non superfluida (V. L. Ginzburg, L. D. Landau, 1950).

La componente di Fourier della matrice densità determina la distribuzione degli impulsi delle particelle del liquido in base alla formula

$$N(\mathbf{p}) = N \int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^3x \quad (26,9)$$

(vedi la (7,20)). Sostituendovi ρ nella forma (26,8), otteniamo

$$N(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 n_0 \delta(\mathbf{p}) + N \int \rho'(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d^3x. \quad (26,10)$$

Il termine con la funzione δ corrisponde alla probabilità finita che la particella abbia impulso rigorosamente nullo.

Se il liquido rivela superfluidità, o se si trova in condizioni esterne non omogenee e non stazionarie (che variano sostanzialmente, però, soltanto a distanze più grandi di quelle interatomiche), allora la condensazione bose-einsteiniana si verifica, come prima, ma non si può più affermare che essa si produce nello stato con $\mathbf{p} = 0$. La grandezza Ξ , definibile come prima in accordo con la (26,3), sarà ora una funzione delle coordinate e del tempo, che ha il significato di funzione d'onda della particella allo stato condensato. Essa è normalizzata dalla condizione $|\Xi|^2 = n_0$ e perciò può essere rappresentata nella forma

$$\Xi(t, \mathbf{r}) = \sqrt{n_0(t, \mathbf{r})} e^{i\Phi(t, \mathbf{r})}. \quad (26,11)$$

Siccome allo stato condensato si trova un numero macroscopicamente grande di particelle, la funzione d'onda di questo stato diventa una grandezza macroscopica classica ¹⁾. Quindi, nel liquido superfluido compare una caratteristica nuova degli stati macroscopici, compresi quelli in equilibrio termodinamico.

La densità del flusso calcolata mediante la funzione d'onda (26,11) è

$$\mathbf{j}_{\text{cond}} = \frac{i\hbar}{2m} (\Xi \nabla \Xi^* - \Xi^* \nabla \Xi) = \frac{\hbar}{m} n_0 \nabla \Phi,$$

dove m è la massa della particella del liquido. Per il suo significato, questa è la densità del flusso macroscopico di particelle condensate

¹⁾ Analogamente a come l'intensità del campo delle onde elettromagnetiche diventa una grandezza classica per grandi numeri di riempimento di fotoni in ciascuno stato (vedi IV, § 5).

e la si può rappresentare nella forma $n_0 \mathbf{v}_s$, dove \mathbf{v}_s è la velocità macroscopica di questo movimento. Dal confronto di ambedue le espressioni risulta che

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \Phi. \quad (26,12)$$

Poiché questo movimento può avere luogo in stato di equilibrio termodinamico (caratterizzato dalla grandezza Ξ), esso è non dissipativo, in modo che la relazione (26,12) determina la velocità del moto superfluido. Arriviamo così di nuovo alla proprietà del moto superfluido già menzionata al § 23, ossia alla sua potenzialità. In questo caso il potenziale φ risulta essere coincidente (a meno di un fattore costante) con la fase della funzione d'onda condensata

$$\varphi = \frac{\hbar}{m} \Phi. \quad (26,13)$$

A scanso di equivoci sottolineiamo, tuttavia, che sebbene la velocità del condensato coincida con quella della componente superfluida del liquido (e sebbene il condensato e la componente superfluida compaiano contemporaneamente nel λ -punto), la densità del condensato mn_0 e la densità della componente superfluida ρ_s non coincidono per niente, senza citare che un'identificazione di queste due grandezze non potrebbe essere in nessun modo giustificata: la sua infondatezza si vede anche dal fatto che allo zero assoluto tutta la massa del liquido è superfluida, mentre le sue particelle sono ben lungi dall'essere tutte nel condensato ¹⁾.

§ 27. Dipendenza della densità del condensato dalla temperatura

La densità del numero di particelle nel condensato è massima per $T = 0$ e all'aumentare della temperatura cala. La legge limite della dipendenza di questa densità dalla temperatura per $T \rightarrow 0$ può essere trovata considerando le fluttuazioni di una grandezza macroscopica, ossia della funzione d'onda condensata Ξ (*R. A. Ferrell, N. Menyhard, H. Schmidt, F. Schwabl, P. Szépfalusy, 1968*).

Ricordiamo anzitutto che Ξ è una grandezza classica, cui nel formalismo quantomeccanico corrisponde l'operatore Ψ . Così, per calcolare le fluttuazioni si dovrebbe, in principio, ricorrere a questi operatori. D'altra parte, in prossimità dello zero assoluto sono le vibrazioni di grande lunghezza d'onda a giocare il ruolo principale nello spettro delle fluttuazioni di una grandezza macroscopica. Queste vibrazioni in un liquido sono delle onde sonore che vengono

¹⁾ Infatti, la densità del condensato nell'elio liquido costituisce, evidentemente, soltanto una piccola parte della densità totale del liquido.

descritte dalle equazioni idrodinamiche macroscopiche; perciò sorge la possibilità di costruire un operatore che corrisponda alla grandezza Ξ mediante una sua quantizzazione indipendente.

In questo caso, per la grandezza $\Xi = \sqrt{n_0} \exp(i\Phi)$ una fluttuazione più forte nel limite di grande lunghezza d'onda, l'ha la fase Φ legata direttamente al potenziale della velocità superfluida dalla formula (26,13). Ricordiamo che le due grandezze φ e Φ non sono univoche, e ad esse si può associare una qualsiasi costante. Quanto alla grandezza univoca $\sqrt{n_0}$, essa può essere espressa soltanto mediante le derivate di Φ , e perciò le componenti di Fourier delle sue fluttuazioni non contengono altro che potenze ridondanti del vettore d'onda \mathbf{k} , cioè sono piccole per \mathbf{k} piccoli.

Il legame fra la fase Φ e il potenziale φ permette di legare direttamente questa fase a grandezze che stanno a caratterizzare la distribuzione dei fononi nel liquido. A tal fine consideriamo φ e, quindi, Φ come operatore di seconda quantizzazione esprimendolo, in accordo con la (24,10), in funzione degli operatori di creazione e distruzione dei fononi:

$$\hat{\Phi} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{m\mathbf{u}}{2Vn\rho} \right)^{1/2} (\hat{c}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} + \hat{c}_{\mathbf{p}}^{\dagger} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}) \quad (27,1)$$

scriviamo la densità imperturbata del liquido nella forma $\rho = nm$, dove n è la densità del numero di particelle; l'indice 0 è omissivo). In accordo con quanto detto sopra ciò vuol dire che l'operatore della grandezza macroscopica Ξ , cioè la parte di grande lunghezza d'onda dell'operatore $\hat{\Psi}$, può essere rappresentata nella forma

$$\hat{\Psi} = \sqrt{n_0} \exp(i\hat{\Phi}), \quad (27,2)$$

dove n_0 è la densità di particelle condensate.

Prima di tutto ricorriamo a questa formula per calcolare la distribuzione degli impulsi delle particelle « sopra condensato » del liquido di Bose (per valori piccoli di essi). Nella matrice densità a una sola componente $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, per grandi distanze $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, si può utilizzare la seguente espressione in grande lunghezza d'onda per l'operatore ψ (27,2):

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle \approx n_0 \langle e^{-i\hat{\Phi}(\mathbf{r}_2)} e^{i\hat{\Phi}(\mathbf{r}_1)} \rangle, \quad (27,3)$$

dove la media viene calcolata rispetto allo stato del liquido a una data temperatura. Essendo piccole le fluttuazioni, occorre sviluppare questa espressione in potenze di $\hat{\Phi}$, conservando unicamente i primi termini che non si annullano (quadratici). Tenendo presente che $\hat{\Phi}^{\dagger} = \hat{\Phi}$, otteniamo

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n_0 - n_0 \langle \hat{\Phi}^2(\mathbf{r}) \rangle + n_0 \langle \hat{\Phi}(\mathbf{r}_2) \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1) \rangle. \quad (27,4)$$

Il terzo termine tende a zero per $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \rightarrow \infty$ e fornisce la parte

« sopra condensato » cercata della matrice densità (il secondo termine, invece, è indipendente in generale da \mathbf{r} in un liquido omogeneo e fornisce una correzione alla densità del condensato che verrà calcolata più avanti in un altro modo). Partendo dalla (27,4), riduciamo la parte « sopra condensato » alla forma

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{n_0 mu}{2Vn} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{p} \{ \langle \hat{c}_{\mathbf{p}}^+ \hat{c}_{\mathbf{p}} \rangle e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\hbar} + \langle \hat{c}_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^+ \rangle e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\hbar} \} = \frac{n_0 mu}{Vn} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{p} \left(n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\hbar},$$

dove

$$n_{\mathbf{p}} = [e^{pu/T} - 1]^{-1}.$$

Passando dalla somma all'integrazione, abbiamo

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{n_0 mu}{n} \int \frac{n_{\mathbf{p}} + 1/2}{p} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (27,5)$$

È ovvio che questa espressione è valida unicamente per un contributo fornito da p piccoli (\hbar/p è grande rispetto alle distanze interatomiche). L'espressione integranda nella (27,5) definisce immediatamente la distribuzione degli impulsi delle particelle

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 mu}{np} \left(n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \right). \quad (27,6)$$

Per $T=0$ questa formula dà

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 mu}{2np} \quad (27,7)$$

(*J. Gavoret, Ph. Nozières, 1964*), e per $T \neq 0$, $up \ll T$:

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 mT}{np^2} \quad (27,8)$$

(*P. C. Hohenberg, P. C. Martin, 1965*).

Ora possiamo definire la dipendenza della densità del condensato dalla temperatura. Per definizione abbiamo

$$n_0(T) = n - \int N(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (27,9)$$

Se sostituiamo direttamente questa espressione nella formula (27,6), l'integrale divergerà per vibrazioni nulle. Questa circostanza è dovuta all'inapplicabilità della (27,6) per p grandi e non significa altro che l'impossibilità di calcolare in questo modo il valore della parte condensata per $T=0$, che deve essere supposto qui una grandezza data. Quanto alla definizione della dipendenza dalla temperatura,

occorre sottrarre da $n_0(T)$ il suo valore per $T = 0$, dopo di che l'integrale sarà convergente. Come risultato abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{n_0(T) - n_0(0)}{n_0(0)} &= -\frac{mu}{n} \int \frac{n_{\mathbf{p}}}{p} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= -\frac{mT^2}{2\pi^2 nu\hbar^3} \int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = -\frac{mT^2}{12nu\hbar^3}. \end{aligned} \quad (27,10)$$

Nei calcoli eseguiti abbiamo trascurato la dipendenza della densità completa del liquido dalla temperatura, il che è legittimo in quanto la dilatazione termica del liquido (dovuta all'eccitazione dei fononi) è proporzionale a una potenza più elevata della temperatura: T^4 (vedi V, § 67) ¹⁾.

Infine, facciamo alcune osservazioni relative al liquido di Bose bidimensionale, questione che presenta un interesse metodologico. In questo caso, la parte dell'integrale (27,9), dipendente dalla temperatura, diverge logaritmicamente nel dominio dei \mathbf{p} piccoli, dove la formula per $N(\mathbf{p})$ dovrebbe essere vera. Ciò significa che nel caso bidimensionale l'ipotesi fondamentale dell'esistenza del condensato a temperature non nulle è falsa; in questo caso il condensato può esistere soltanto per $T = 0$ ²⁾. La situazione qui è analoga a quella dei cristalli bidimensionali (vedi V, § 137). Così come nei cristalli bidimensionali le fluttuazioni di spostamento degli atomi fanno « smussare » il reticolo, anche le fluttuazioni della fase distruggono il condensato. L'analogia formale fra le due situazioni è dovuta al fatto che in ambedue i casi l'energia dipende da grandezze che possono entrare in essa soltanto sotto forma di derivate. Nel primo caso sono i vettori spostamento degli atomi, che da soli non possono entrare nell'energia essendo quest'ultima invariante rispetto agli spostamenti del sistema come un tutt'uno. Nel secondo caso è la fase della funzione d'onda condensata, che da sola non può entrare nell'energia per sua non univocità. Il fatto che l'energia dipende unicamente dai gradienti di queste grandezze conduce, in fin dei conti, alla divergenza delle fluttuazioni.

In seguito, abbiamo visto nel volume V, § 138, che la divergenza debole (logaritmicamente) delle fluttuazioni implica in un cristallo bidimensionale una decrescenza lenta (potenza) della funzione di correlazione del sistema. Analogamente, nel sistema di Bose bidimensionale la matrice densità (27,3) decresce per $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow \infty$,

¹⁾ Le formule ottenute sono valide per qualsiasi liquido di Bose e concordano, ovviamente, con le formule dedotte al § 25 per un gas di Bose debolmente non perfetto. Confrontandole, si deve tener presente che per questo gas $n_0 \approx n$ e che la condizione di piccolezza di p ha la forma $p \ll mu \sim \hbar (an)^{1/2}$.

²⁾ Queste affermazioni riguardano anche il gas di Bose perfetto bidimensionale.

ma in base a una legge potenziale ¹⁾, e non tende affatto a un limite costante come in presenza del condensato. Osserviamo che, grazie a questo fatto, questo sistema si differenzia qualitativamente da un liquido ordinario, cosicché nel caso bidimensionale è possibile la transizione di fase di seconda specie fra un liquido normale con decrescenza esponenziale di $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ e un liquido con decrescenza in base a una legge potenziale.

§ 28. *Comportamento della densità superfluida in prossimità del λ -punto*

Come è stato già detto al § 23, all'aumentare della temperatura la parte superfluida della densità del liquido di Bose ρ_s/ρ decresce e si annulla infine nel cosiddetto λ -punto della transizione di fase di seconda specie. La temperatura T_λ di questo punto è funzione della pressione P ; l'equazione $T = T_\lambda(P)$ determina la curva dei λ -punti del diagramma di fase nel piano P, T .

Nella teoria generale delle transizioni di fase di seconda specie la variazione dello stato di un corpo viene descritta dall'andamento del parametro d'ordine che ne caratterizza le proprietà di simmetria. Per la transizione λ del liquido di Bose il ruolo di questo parametro è svolto dalla funzione d'onda condensata Ξ che descrive, come è stato sottolineato al § 26, l'« ordine distante » nel liquido. La complessità di Ξ significa che il parametro d'ordine ha due componenti e che, fra l'altro, l'operatore hamiltoniano efficace del sistema (vedi V, § 147) dipende unicamente da $|\Xi|^2$, vale a dire che esso è invariante rispetto alla trasformazione $\Xi \rightarrow e^{i\alpha} \Xi$ quale che sia α reale.

I dati empirici relativi alla transizione λ nell'elio liquido testimoniano, evidentemente, che per essa non esiste campo di applicabilità della teoria delle transizioni di fase di Landau: il criterio (146,15) del volume V non si verifica in nessun intorno del λ -punto (cioè in nessun punto del dominio $|T - T_\lambda| \ll T_\lambda$). Perciò la descrizione delle proprietà di questa transizione richiede l'uso della teoria fluttuazionale delle transizioni di fase di seconda specie che dà la possibilità di legare tra loro le dipendenze delle varie grandezze dalla temperatura.

La dipendenza del parametro d'ordine (e, quindi, anche della densità del condensato n_0) dalla temperatura è data, per $T \rightarrow T_\lambda$, dall'indice critico β (vedi V, § 148):

$$|\Xi| = \sqrt{n_0} \propto (T_\lambda - T)^\beta. \quad (28,1)$$

Tuttavia, la questione relativa all'andamento della densità superfluida ρ_s presenta maggiore interesse. Per il suo calcolo consideriamo un liquido in cui la fase Φ della funzione d'onda condensata

¹⁾ Per dettaglio vedi *J. W. Kane, L. Kadanoff, Phys. Rev. 155, 80 (1967)*.

varia lentamente nello spazio. Ciò significa che nel liquido si produce un moto superfluido macroscopico di velocità (26,12) e, rispettivamente, di energia cinetica (per l'unità di volume del liquido)

$$\frac{\rho_s v_s^2}{2} = \rho_s \frac{\hbar^2}{2m^2} (\nabla\Phi)^2. \quad (28,2)$$

Questa espressione si può applicare anche alle fluttuazioni del parametro d'ordine nel dominio delle lunghezze d'onda grandi. In accordo con l'ipotesi dell'invarianza di scala, l'unico parametro di lunghezza, che descrive il quadro fluttuazionale nell'intorno del punto di transizione, è il raggio di correlazione r_c delle fluttuazioni. Di conseguenza, sempre questo raggio definisce l'ordine di grandezza delle distanze sulle quali la variazione fluttuazionale della fase Φ è dell'ordine dell'unità; pertanto la media del quadrato della velocità di fluttuazione varia con la temperatura in base alla legge

$$\overline{v_s^2} \sim r_c^{-2} \sim (T_\lambda - T)^{2\nu},$$

dove ν è l'indice critico del raggio correlativo. D'altra parte, siccome la singolarità delle grandezze termodinamiche nel punto di transizione è legata proprio alle fluttuazioni nel dominio delle grandi lunghezze d'onda, è naturale supporre che nell'intorno di questo punto l'energia cinetica fluttuazionale (28,2) vari con la temperatura in base alla stessa legge della parte singolare del potenziale termodinamico del liquido, cioè come $(T_\lambda - T)^{2-\alpha}$ (dove α è l'indice critico del calore specifico C_p). Troviamo così che

$$\rho_s \overline{v_s^2} \sim \rho_s (T_\lambda - T)^{2\nu} \sim (T_\lambda - T)^{2-\alpha},$$

da cui $\rho_s \sim (T_\lambda - T)^{2-\alpha-2\nu}$. Infine, tenuto conto della relazione $3\nu = 2 - \alpha$ (la quale discende dall'ipotesi dell'invarianza di scala; vedi V, § 149), otteniamo

$$\rho_s \sim (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/3}. \quad (28,3)$$

Con ciò abbiamo stabilito il legame fra le dipendenze di ρ_s e del calore specifico dalla temperatura in prossimità del λ -punto (B. D. Josephson, 1966)¹).

§ 29. Linee di vortice quantizzate

Un liquido ordinario contenuto in un recipiente cilindrico ruotante attorno al proprio asse viene trascinato dall'attrito contro le pareti del recipiente e, infine, comincia a ruotare come un tutt'uno con il recipiente. Nel liquido superfluido viene trascinata dalla rotazione soltanto la sua componente normale; quanto alla componente

¹) Infatti, gli indici α e ζ per l'elio liquido sono molto piccoli; pertanto con buona approssimazione si ha $\beta \approx 1/3$ in modo che $\rho_s \sim n_0 \sim (T_\lambda - T)^{2/3}$.

superfluida, essa resta fissa in accordo con il fatto che, in generale, questa componente non può ruotare come un tutt'uno, poiché in questo caso sarebbe violata la potenzialità del movimento superfluido ¹⁾.

Tuttavia, a velocità di rotazione sufficientemente grandi, questo stato diventa termodinamicamente svantaggioso. La condizione di equilibrio termodinamico è che debba essere minima la grandezza

$$E_{\text{rot}} = E - M\Omega, \quad (29,1)$$

che rappresenta l'energia rispetto a un sistema di coordinate rotante; qui E e M sono rispettivamente l'energia e il momento dell'impulso del sistema relativamente a un sistema di coordinate fisso (vedi V, § 26). In questa espressione è il termine $-M\Omega$ a fornire il vantaggio termodinamico (per Ω sufficientemente grandi) allo stato con $M\Omega > 0$ rispetto allo stato con $M = 0$.

Quindi, all'aumentare della velocità di rotazione del recipiente, deve comparire, in fin dei conti, il movimento superfluido. La contraddizione apparente fra questa affermazione e la condizione di potenzialità del movimento superfluido può essere eliminata supponendo che la potenzialità venga violata soltanto su certe linee singolari del liquido, le *linee di vortice* ²⁾. Attorno a queste linee il liquido è animato da un movimento che si potrebbe chiamare *rotazione potenziale*, cosicché in tutto il volume all'esterno delle dette linee si ha $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$.

Le linee di vortice nel liquido sono di spessore misurabile in unità atomiche e, dal punto di vista macroscopico, si devono considerare come infinitamente sottili ³⁾. La loro esistenza non contraddice l'espressione della velocità nella formula (26,12), in quanto quest'ultima parte dall'ipotesi che la variazione di \mathbf{v}_s nello spazio sia sufficientemente lenta, mentre in prossimità di una linea di vortice \mathbf{v}_s ha una variazione rapida a piacere (vedi più avanti la formula (29,3)). Essa non contraddice neanche la giustificazione della potenzialità del movimento superfluido, data al § 23 in base alle proprietà dello spettro energetico del liquido di Bose, poiché a una linea di vortice è legata una determinata energia macroscopicamente grande (vedi più avanti la formula (29,8)), per cui lo stato del liquido avente una tale linea non può più essere considerato debolmente eccitato.

¹⁾ Al ruotare del liquido come un tutt'uno la velocità vale $\mathbf{v} = [\Omega\mathbf{r}]$, dove Ω è la velocità angolare e il raggio vettore \mathbf{r} viene calcolato a partire da un punto giacente sull'asse. Inoltre, $\text{rot } \mathbf{v} = 2\Omega \neq 0$.

²⁾ Questa supposizione è stata avanzata da *L. Onsager* (1949) e in seguito sviluppata da *R.P. Feynman* (1955).

³⁾ Questa affermazione non si riferisce, tuttavia, a un intorno vicino del λ -punto; qui la linea di vortice è di uno spessore dell'ordine di grandezza del raggio di correlazione delle fluttuazioni.

Consideriamo dapprima le linee di vortice da un punto di vista puramente cinematico, ossia come linee singolari nella distribuzione delle velocità per un moto potenziale del liquido. Ogni linea di vortice è caratterizzata da un determinato valore della circuitazione (denotiamolo con $2\pi\kappa$) della velocità lungo un contorno chiuso che contiene questa linea:

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\kappa. \quad (29,2)$$

Questo valore è indipendente dalla scelta del cammino di integrazione. Infatti, se C_1 e C_2 sono due contorni che delimitano una linea di vortice, allora la differenza tra le circuitazioni della velocità lungo questi contorni è uguale, secondo il teorema di Stokes, al flusso del vettore $\text{rot } \mathbf{v}_s$ attraverso una superficie costruita fra C_1 e C_2 ; siccome la detta superficie non interseca da nessuna parte la linea di vortice, in tutti i suoi punti $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$, cosicché l'integrale si annulla. Ne consegue ugualmente che la linea di vortice non si interrompe: essa o è chiusa o termina sulla frontiera del liquido (quando questi è illimitato, i due estremi della curva si trovano all'infinito). Infatti, l'esistenza di un estremo libero della linea di vortice significherebbe la possibilità di costruire sul contorno C una superficie non intersecantesi in nessun punto con la linea e, come risultato, l'integrale a primo membro della formula (29,2) si annullerebbe.

La condizione (29,2) permette di determinare la distribuzione delle velocità in un liquido che si muove intorno alla linea di vortice. Nel caso più semplice di linea di vortice in un liquido illimitato, le linee di corrente sono delle circonferenze su piani perpendicolari alla linea e con centri giacenti su di essa. La circuitazione della velocità lungo una tale linea è $2\pi r v_s$, in modo che

$$v_s = \frac{\kappa}{r}, \quad (29,3)$$

essendo r la distanza dalla linea. Notiamo che per rotazione potenziale la velocità cala allontanandosi dall'asse di rotazione (linea di vortice) contrariamente alla rotazione come un tutt'uno, in cui la velocità cresce proporzionalmente a r .

Per una linea di vortice di forma arbitraria la distribuzione delle velocità è data dalla formula

$$\mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{2} \int \frac{[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{R}]}{R^3}, \quad (29,4)$$

dove si integra lungo la linea e \mathbf{R} è il raggio vettore tracciato da $d\mathbf{l}$ al punto di osservazione della velocità ¹⁾. A distanze dalla linea di

¹⁾ Si potrebbe scrivere direttamente questa espressione per analogia con la nota formula di Biot-Savart per un campo magnetico di correnti lineari. La coincidenza formale di entrambi i problemi è immediata dal confronto della

vortice piccole rispetto al suo raggio di curvatura è ovvio che la formula (29,4) si riduce approssimativamente alla (29,3).

Come è stato già detto, le formule (29,2-4) sono conseguenze della sola potenzialità del movimento del liquido. Quanto alla natura quantistica delle linee di vortice nel liquido superfluido, essa si manifesta nel fatto che la costante κ non assume altri valori che quelli di una serie discreta. Utilizzando infatti la formula (26,12) per la velocità v_s , espressa dalla fase Φ della funzione d'onda condensata, troviamo che la sua circuitazione è

$$\oint v_s dl = \frac{\hbar}{m} \Delta\Phi, \quad (29,5)$$

dove $\Delta\Phi$ è la variazione della fase al descrivere il contorno. Poiché la funzione d'onda è monodroma, la variazione della sua fase nel tornare al punto di partenza non può essere altro che un multiplo intero di 2π . Ne segue che

$$\kappa = n\hbar/m, \quad (29,6)$$

dove n è un intero. Noi vedremo più avanti che di fatto sono termodinamicamente stabili soltanto le linee di vortice con il valore minimo possibile di circuitazione ($n = 1$). Perciò porremo nel seguito

$$\kappa = \hbar/m. \quad (29,7)$$

Determiniamo ora la velocità di rotazione critica di un recipiente cilindrico per la quale compare per la prima volta una linea di vortice. Da considerazioni di simmetria è evidente che questa linea sarà disposta lungo l'asse del recipiente. La variazione dell'energia a causa della linea di vortice comparsa è

$$\Delta E = \int \frac{\rho_s v_s^2}{2} dV = \frac{\rho_s}{2} L \int v_s^2 \cdot 2\pi r dr = L\rho_s \pi \kappa^2 \int \frac{dr}{r}$$

(L è la lunghezza del recipiente). Si deve integrare in dr nei limiti fra il raggio R del recipiente e un certo valore $r \sim a$ dell'ordine di grandezza delle distanze atomiche, sulle quali la considerazione macroscopica perde senso; data la divergenza logaritmica dell'integrale, il suo valore è poco sensibile a una scelta esatta del valore di a . Quindi,

$$\Delta E = L\pi\rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \ln \frac{R}{a} \quad (29,8)$$

(questa espressione ha, come si dice, precisione logaritmica, vale a dire che è supposto grande non soltanto il rapporto R/a , ma anche

circuitazione della velocità (29,2) con quella del campo magnetico \mathbf{H} attorno alla corrente lineare J : $\oint \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} J$. Un problema discende dall'altro cambiando le notazioni: $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{v}_s$, $J/c \rightarrow \kappa/2$.

il suo logaritmo)¹⁾. Quanto al momento della quantità di moto del liquido rotante, esso vale

$$M = \int \rho_s v_s r dV = \rho_s \kappa \int dV = L\pi R^2 \frac{\hbar}{m} \rho_s. \quad (29,9)$$

La comparsa di una linea di vortice è termodinamicamente vantaggiosa se $\Delta E_{\text{rot}} = \Delta E - M\Omega < 0$, cioè se

$$\Omega > \Omega_{\text{cr}} = \frac{\hbar}{mR^2} \ln \frac{R}{a}. \quad (29,10)$$

I ragionamenti esposti permettono ugualmente di capire la ragione per cui le linee di vortice con $n > 1$ nella (29,6) risultano essere termodinamicamente instabili. Infatti, sostituendo al valore $n = 1$ quello $n > 1$, l'energia ΔE aumenta di n^2 volte e il momento M di n volte; in questo caso ΔE_{rot} aumenterà automaticamente.

All'aumentare ulteriore della velocità di rotazione del recipiente cilindrico (oltre il valore critico (29,10)) compaiono linee di vortice nuove, e per $\Omega \gg \Omega_{\text{cr}}$ il numero di queste linee sarà già molto grande. La loro distribuzione nella sezione del recipiente tende, in questo caso, ad essere uniforme e al limite la loro totalità imita la rotazione di tutta la parte superfluida del liquido come un tutt'uno²⁾. È facile determinare il numero di linee di vortice per un dato (grande) valore di Ω a condizione che il valore della circuitazione della velocità su un contorno che delimita un grande numero di curve corrisponda alla rotazione del liquido come un tutt'uno. Se questo contorno include l'area unitaria (nel piano perpendicolare all'asse di rotazione), allora

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = v \cdot 2\pi\kappa = 2\pi v \frac{\hbar}{m},$$

dove v è la densità di distribuzione delle linee di vortice nella sezione del recipiente. D'altra parte, per rotazione del liquido come un tutt'uno si ha $\text{rot } \mathbf{v}_s = 2\Omega$ e la stessa circuitazione vale 2Ω . Eguagliando i due valori, troviamo che

$$v = m\Omega/\pi\hbar. \quad (29,11)$$

¹⁾ Il movimento attorno alla linea di vortice è accompagnato, in generale, dalla variazione di densità del liquido. Il fatto che nel calcolo esposto è stata trascurata questa variazione può essere giustificato da quanto segue: il contributo fondamentale all'energia (29,8) proviene (data la divergenza logaritmica dell'integrale) da grandi distanze r sulle quali la variazione della densità è ormai piccola. Per la stessa ragione si può trascurare il contributo proveniente dalla variazione dell'energia interna del liquido in ΔE .

²⁾ È facile convincersene osservando quanto segue: poiché il numero di linee cresce proporzionalmente a Ω (vedi più avanti la formula (29,11)), il secondo termine nella relazione $\Delta E_{\text{rot}} = \Delta E - M\Omega$ cresce come Ω^2 e il primo come Ω , perciò lo si può trascurare per $\Omega \gg \Omega_{\text{cr}}$. Allora la minimizzazione di ΔE_{rot} si riduce alla massimizzazione di M , che si ottiene appunto per rotazione del liquido come un tutt'uno.

La comparsa di linee di vortice viola in un certo senso la proprietà di superfluidità del liquido. Le eccitazioni elementari, che costituiscono la componente normale del liquido, verranno diffuse ora sulle linee, cedendo ad esse (e, quindi, alla componente superfluida del liquido) parte del loro impulso. In altre parole, ciò significa la comparsa di una *forza d'attrito reciproco* fra ambedue le componenti del liquido.

In generale, le linee di vortice si spostano nello spazio assieme al liquido in moto. Per $T = 0$, allorché il liquido è totalmente superfluido, ogni elemento dl della linea si muove alla stessa velocità \mathbf{v}_s che il liquido possiede nel punto in cui si trova questo elemento. A temperature non nulle la forza d'attrito applicata alla linea di vortice implica la comparsa di una certa velocità di spostamento relativamente alla componente superfluida.

Le linee di vortice che compaiono per rotazione hanno forma rettilinea. Il flusso del liquido attraverso capillari, fenditure ecc. può essere accompagnato, invece, da formazione di linee di vortice chiuse, ossia di *anelli vorticosi*. Ciò implica la violazione della superfluidità per correnti con velocità superiori a un dato valore critico. In effetti, i valori di queste *velocità critiche* dipendono dalle condizioni concrete per le quali si verifica il flusso; essi sono di gran lunga inferiori a quel valore, oltre il quale la condizione (23,3) risulta violata.

Contrariamente alle linee di vortice rettilinee, che possono essere ferme in un liquido in quiete (lontano da queste linee), gli anelli vorticosi si muovono relativamente al liquido. La velocità di spostamento di ogni elemento di lunghezza della curva è quel valore di \mathbf{v}_s che è dato (secondo la formula (29,4)), nel punto in cui l'elemento si trova, da tutti gli altri elementi della linea; in generale, questo valore per le linee incurvate è non nullo. Come risultato gli anelli vorticosi posseggono non soltanto determinate energie, ma anche determinati impulsi e rappresentano, in questo senso, un tipo particolare di eccitazioni elementari.

PROBLEMI

1. Determinare la velocità e l'impulso di un anello circolare vorticoso. *Soluzione.* Ogni elemento dell'anello si sposta a velocità \mathbf{v}_s in un dato punto; data la simmetria dell'anello circolare, questa velocità in tutti i suoi punti è identica. Pertanto è sufficiente determinare la velocità \mathbf{v}_s data in un certo punto dell'anello P dagli altri suoi elementi. Gli elementi dl dell'anello e i raggi vettori \mathbf{R} tracciati da dl al punto P giacciono nel piano dell'anello; perciò la velocità nel punto P data dalla formula (29,4) è perpendicolare al piano dell'anello (per cui l'anello si sposta conservando invariate la sua forma e le dimensioni).

Determiniamo la posizione dell'elemento dl mediante l'angolo ϑ (fig. 3). Allora

$$dl = R_0 d\vartheta, \quad R = 2R_0 \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad |[d\mathbf{l} \cdot \mathbf{R}]| = R \sin \frac{\vartheta}{2} dl,$$

dove R_0 è il raggio dell'anello; dalla (29,4) ricaviamo la seguente espressione per la velocità v dell'anello:

$$v = \frac{\kappa}{8R_0} 2 \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sin(\vartheta/2)}.$$

Tuttavia, questo integrale diverge logaritmicamente nel limite inferiore e deve essere tagliato al valore $\vartheta \sim a/R_0$ corrispondente alle distanze atomiche ($\sim a$) fra l'elemento dl e il punto P . Con precisione logaritmica l'integrale viene determinato dal dominio dei valori $a/R_0 \ll \vartheta \ll \pi$ e vale

$$\int_{\sim a/R_0}^{\sim 1} \frac{2 d\vartheta}{\vartheta} = 2 \ln \frac{R_0}{a},$$

in modo che

$$v = \frac{\kappa}{2R_0} \ln \frac{R_0}{a} = \frac{\hbar}{2mR_0} \ln \frac{R_0}{a}. \quad (1)$$

Con la stessa precisione logaritmica l'energia dell'anello vorticoso è

$$\varepsilon = 2\pi^2 R_0 \rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \ln \frac{R_0}{a} \quad (2)$$

(utilizzando la formula (29,8) dopo avervi effettuato le sostituzioni $R \rightarrow R_0$, $L \rightarrow 2\pi R_0$). L'energia ε è legata alla velocità v dalla relazione $d\varepsilon/dp = v$, dove p è l'impulso dell'anello. Di qui abbiamo

$$dp = \frac{d\varepsilon}{v} = 4\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m} R_0 dR_0$$

(con precisione logaritmica si deve supporre costante, derivando, il logaritmo grande) e infine

$$p = 2\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m} R_0^2. \quad (3)$$

Le formule (2) e (3) definiscono in forma parametrica (parametro R_0) la dipendenza funzionale $\varepsilon(p)$ per gli anelli vorticosi.

Notiamo che per la natura logaritmica dell'integrazione, con cui si ottiene la formula (1), quest'ultima resta valida (con certe modifiche nelle notazioni) anche per la velocità di spostamento \mathbf{v} di ogni dato elemento di una linea di vortice di forma qualsiasi:

$$\mathbf{v} = \frac{\kappa}{2R_0} \mathbf{b} \ln \frac{\lambda}{a}. \quad (4)$$

Qui \mathbf{b} è il versore perpendicolare al piano tangente in un dato punto alla curva (vettore binormale); R_0 il raggio di curvatura della curva nello stesso punto; λ la distanza caratteristica alla quale varia la curvatura della curva.

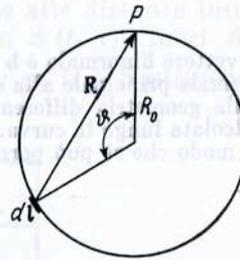


Fig. 3

2. Determinare la legge di dispersione delle piccole vibrazioni di una linea di vortice rettilinea (*W. Thomson, 1880*).

Soluzione. Consideriamo la linea di vortice come asse z e supponiamo che il vettore $\mathbf{r} = (x, y)$ dia la deviazione dei punti della linea per le vibrazioni; questo vettore è una funzione di z e del tempo t della forma $\exp [i(kz - \omega t)]$. La velocità dei punti della linea è data dalla formula (4), nella quale con λ si deve intendere nel dato caso la lunghezza d'onda delle vibrazioni ($\lambda \sim 1/k$):

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -i\omega\mathbf{r} = \frac{\kappa}{2} \ln \frac{1}{ak} \frac{\mathbf{b}}{R_0}.$$

Il vettore binormale è $\mathbf{b} = [t\mathbf{n}]$, dove \mathbf{t} e \mathbf{n} sono i versori della tangente e della normale principale alla curva, rispettivamente. In accordo con la nota formula della geometria differenziale abbiamo $d^2\mathbf{r}/dl^2 = \mathbf{n}/R_0$, dove l è la lunghezza calcolata lungo la curva. Per piccole vibrazioni la linea è debolmente incurvata in modo che si può porre $l \approx z$ e $\mathbf{t} = \mathbf{n}_z$ (versore lungo l'asse z); allora

$$\frac{\mathbf{b}}{R_0} \approx \left[\mathbf{n}_z \frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2} \right] = -k^2 [\mathbf{n}_z\mathbf{r}].$$

Troviamo così l'equazione di moto della linea

$$-i\omega\mathbf{r} = -\frac{\kappa k^2}{2} [\mathbf{n}_z\mathbf{r}] \ln \frac{1}{ak}.$$

Sviluppandola otteniamo un sistema di due equazioni omogenee lineari in x e y ; eguagliando a zero il determinante del sistema, otteniamo la relazione cercata fra ω e k :

$$\omega = \frac{\kappa k^2}{2} \ln \frac{1}{ak}.$$

§ 30. Linea di vortice in un gas di Bose quasi-perfetto

Come è stato già detto, lo spessore della linea di vortice stessa nel liquido è misurabile in distanze atomiche. Fa eccezione, però, il caso di un gas di Bose quasi-perfetto. Qui il « midollo » della linea di vortice, in cui le proprietà del mezzo sono essenzialmente modificate, ha (come vedremo più avanti) uno spessore macroscopico e la sua struttura può essere descritta macroscopicamente (*V. L. Ginzburg, L. P. Pitaevskij, 1958; L. P. Pitaevskij, 1961; E. P. Gross, 1961*).

Consideriamo un gas debolmente non perfetto alla temperatura dello zero assoluto. In questo gas quasi tutte le particelle si trovano allo stato condensato. Ciò vuol dire in termini degli operatori ψ che la parte « sopra condensato » dell'operatore ($\hat{\Psi}'$) è piccola rispetto alla sua media, cioè rispetto alla funzione d'onda condensata Ξ . Se questa piccola parte è completamente trascurata, la funzione Ξ verificherà la stessa equazione di Schrödinger (7,8) che sussiste per

l'operatore completo $\hat{\Psi}$. Tenuto conto delle sole interazioni a due a due, essa ha la forma (per particelle senza spin)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, \mathbf{r}) = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu \right) \Xi(t, \mathbf{r}) + \Xi(t, \mathbf{r}) \int |\Xi(t, \mathbf{r}')|^2 U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3x'. \quad (30,1)$$

Supponendo la funzione $\Xi(t, \mathbf{r}')$ poco variabile alle distanze interatomiche, possiamo portarla (sostituendo con $\Xi(t, \mathbf{r})$) fuori dal segno dell'integrale che si riduce a $\int U(\mathbf{r}) d^3x \equiv U_0$. Sostituendo

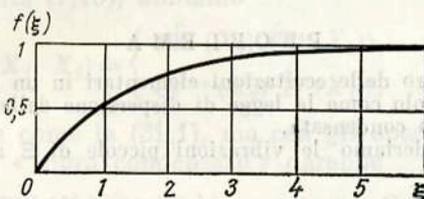


Fig. 4

anche il valore $\mu = nU_0$ (vedi la (25,6); n è la densità imperturbata del numero di particelle nel gas), otteniamo l'equazione

$$i\hbar \frac{\partial \Xi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Xi + U_0 \{ \Xi |\Xi|^2 - n\Xi \}. \quad (30,2)$$

Nello stato stazionario Ξ è indipendente dal tempo¹⁾. Alla linea di vortice rettilinea corrisponde una soluzione della forma

$$\Xi = \sqrt{n} e^{i\varphi} f\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0n}}, \quad (30,3)$$

dove r e φ sono rispettivamente la distanza dall'asse del rotore e l'angolo polare attorno ad esso. La fase di questa funzione corrisponde al valore della circuitazione (29,7). Il quadrato $|\Xi|^2$ è la densità del numero di particelle nel condensato; nell'approssimazione considerata essa coincide con la densità totale del gas. Per $r \rightarrow \infty$ quest'ultima deve tendere a un dato valore n , e la funzione f , rispettivamente, a 1.

Introducendo la variabile adimensionale $\xi = r/r_0$, otteniamo per la funzione $f(\xi)$ l'equazione

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df}{d\xi} \right) - \frac{f}{\xi^2} + f - f^3 = 0. \quad (30,4)$$

¹⁾ Ricordiamo che l'equazione (30,1) corrisponde già all'operatore hamiltoniano $\hat{H}' = \hat{H} - \hat{N}\mu$

La fig. 4 rappresenta la soluzione ricavata dalla (30,4) per integrazione numerica. Per $\xi \rightarrow 0$ essa si annulla proporzionalmente a ξ , e per $\xi \rightarrow \infty$ tende a 1 in base alla legge $f = 1 - 1/2\xi^2$.

Il parametro r_0 determina l'ordine di grandezza del raggio del « midollo » del rotore. Introducendo al posto di U_0 la lunghezza di diffusione, in base a $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ (vedi la (6,2)), troviamo che

$$r_0 \sim n^{-1/3} \eta^{-1/2} \gg n^{-1/3},$$

dove $\eta = an^{1/3}$ è il parametro gassoso. Quindi, questo raggio è effettivamente grande rispetto alle distanze interatomiche, se il parametro η è sufficientemente piccolo.

P R O B L E M A

Trovare lo spettro delle eccitazioni elementari in un gas di Bose quasi-perfetto, considerandolo come la legge di dispersione delle piccole vibrazioni della funzione d'onda condensata.

Soluzione. Consideriamo le vibrazioni piccole di Ξ attorno alla media costante \sqrt{n} :

$$\Xi = \sqrt{n} + A e^{i(kr - \omega t)} + B^* e^{-i(kr - \omega t)},$$

dove A, B^* sono ampiezze complesse piccole. Sostituendo questa espressione nell'equazione (30,2), linearizzandola e separando i termini con fattori esponenziali distinti, otteniamo il sistema in due equazioni

$$\begin{aligned} \hbar\omega A &= \frac{p^2}{2m} A + nU_0 (A + B), \\ -\hbar\omega B &= \frac{p^2}{2m} B + nU_0 (A + B) \end{aligned}$$

($p = \hbar k$). Di qui, uguagliando a zero il determinante del sistema, ricaviamo

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{p^2}{2m} \right)^2 + \frac{p^2}{m} nU_0,$$

che coincide con la (25,10).

§ 31. Funzioni di Green del liquido di Bose ¹⁾

Il formalismo matematico delle funzioni di Green per il liquido di Bose è sotto molti aspetti analogo a quello per il sistema di Fermi. Senza ripetere tutti i ragionamenti, daremo qui soprattutto le definizioni e le formule fondamentali sottolineando frattanto le distinzioni dovute sia a una diversa statistica delle particelle sia all'esistenza del condensato ²⁾. Come nei paragrafi precedenti del presente capitolo, le particelle del liquido sono supposte senza spin.

¹⁾ Nei §§ 31-33 e 35 viene utilizzato il sistema di unità in cui $\hbar = 1$.

²⁾ L'applicazione del formalismo matematico delle funzioni di Green ai sistemi di Bose con condensato appartiene a S.T. Beljaev (1958).