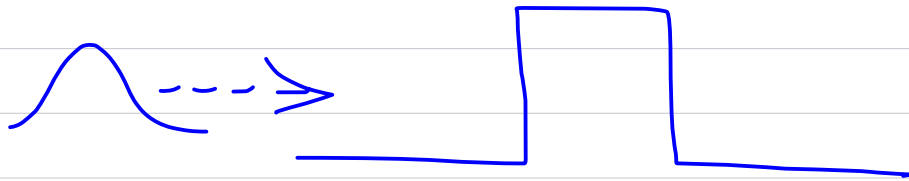


Processo di diffusione e pacchetti d'onda.



$\Leftrightarrow$ Approccio con l'eq. Schr statica.?

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi$$

$$\psi_k(x) \sim e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$\sim E e^{ikx}$$

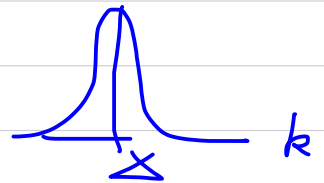
$$x \rightarrow +\infty$$

$\rightarrow$ calcolo $B, E \Rightarrow D, R.$

$\widetilde{k(E)}$ esattamente nota $\Leftrightarrow e^{ikx}$ ($x \rightarrow \infty$)

$$\psi_k(x) \rightarrow \varphi(x,t) = \int dk f(k) \psi_k(x) e^{-i \frac{k^2 \hbar t}{2m}}$$

$$\text{con } f(k) \approx c \cdot e^{-\frac{(k-k_0)^2}{\Delta}}$$



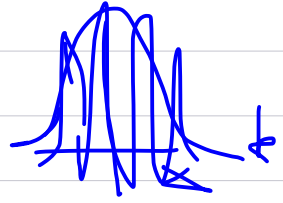
(i) $t \rightarrow -\infty$

$$\text{Sol.} \sim \int dk f(k) (e^{ikx} + B e^{-ikx}) e^{-i \frac{k^2 \hbar t}{2m}}$$

Fase stazionaria

1° termine $e^{-ikx - i \frac{k^2 \hbar t}{2m}}$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial k}(\text{esponente}) = 0$



$$x - \frac{\hbar k t}{m} = 0$$

$$(x - vt = 0)$$

$$x \approx \frac{\hbar k t}{m}$$



2° termine $-x - \frac{\hbar k t}{m} \approx 0, x \approx -\frac{\hbar k t}{m}$

NO

($e^{ikx} + B e^{-ikx}$ sol. valida $x \ll 0$)

Sol. valida a $x > 0$

$$e^{ikx - i \frac{k^2 \hbar t}{2m}}$$

fase staz. $\rightarrow x \approx \frac{\hbar k t}{m}$

$$x > 0$$

$$t \rightarrow -\infty$$

NO

In conclusione, a $t \rightarrow -\infty$

solo il pacchetto a $x \approx \frac{\hbar k t}{m} t$

che viaggia verso $x \nearrow$

$t \rightarrow \infty$,

nella stessa maniera troviamo



con $|\psi_R|^2 \sim |B|^2$

$|\psi_{tr}|^2 \sim |E|^2$

$$\Rightarrow \mathcal{R} = |B|^2; \quad \mathcal{D} = |E|^2.$$

Cenni sulla struttura matematica della MQ

Rappresentazioni di x , di p , e generali.

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int dx' \delta(x-x') \psi(x') \\ &= \int dx' \psi_x^*(x') \psi(x') \equiv \langle x | \psi \rangle \\ &= \text{rapp. d. } x\end{aligned}$$

Lo stesso stato ψ può essere rapp. da

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \int dx' \psi_p^*(x') \psi(x') = \psi_p(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} e^{ipx/\hbar} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \int dx' e^{-ipx'/\hbar} \psi(x') \equiv \langle p | \psi \rangle\end{aligned}$$

= trasformata di Fourier di $\psi(x)$,

= Rapp. degli impulsi di ψ .

In una base generale, $\{\psi_n(x)\}$:

$$\langle n | \psi \rangle = \int dx' \psi_n^*(x') \psi(x')$$

$$\Rightarrow c_n \quad \left(\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) \right)$$

Infatti

$$|4\rangle = \sum_n c_n |n\rangle$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \Leftrightarrow \psi(x)$$

$$\sum |c_n|^2 < \infty \Leftrightarrow \int dx |\psi(x)|^2 < \infty$$
$$l_2 \Leftrightarrow L_2$$

meccanica
matriciale

mecc. ondulatoria
di Schrödinger

morale:

lo stato $\sim |4\rangle$.

Le funz. d'onda $\psi(x) = \langle x | 4 \rangle$ è una
delle possibili rappor. (delle coordinate).

Dizionario

stato rapp. x rapp. p rapp. $|n\rangle$

$$|n\rangle \quad \psi_n(x) \quad \tilde{\psi}_n(p) \quad c_n = \delta_{m,n}$$

$$|x_0\rangle \quad \delta(x-x_0) \quad \tilde{\psi}_n(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i x_0 p / \hbar} \quad \langle n | x \rangle = \psi_n^*(x_0)$$

$$|p_0\rangle \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i p_0 x / \hbar} \quad \delta(p-p_0) \quad \langle n | p \rangle = \tilde{\psi}_n(p_0)$$

operatori

$$\begin{array}{llll} \hat{x} & x & i\hbar \frac{\partial}{\partial p} & x_{nm} = \langle n | x | m \rangle \\ \hat{p} & -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} & \hat{p} = p & p_{nm} = \langle n | p | m \rangle \end{array}$$

operatori nello spazio di vettori di stato astratto

$$[X, P] = i\hbar \mathbb{1}$$

$$\langle x | X \dots = x \langle x | \dots$$

$$\langle x | P \dots = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x | \dots$$

N.B.

$$\langle x | P \dots = \int dp \langle x | p \rangle \langle p | P \dots$$

$$= \int dp \frac{e^{i p x / \hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} p \langle p | \dots$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \int dp \frac{e^{i p x / \hbar}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \langle p | \dots$$

$$= \dots \int dp \langle x | p \rangle \langle p | \dots$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \langle x | \dots$$

ok.

Analogamente,

$$\langle p | \hat{P} \dots = p \langle p | \dots$$

$$\langle p | \hat{X} \dots = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \langle p | \dots$$

✓

Spazio d-Hilbert astratto.

- "Finer points of QM" notes
 - Reed, Simon "Functional Analysis"
 - Kohnogorov - Fomin.
 - Akhiezer - Glazman.

$$|\psi\rangle \in \mathcal{H}, \quad \varphi \in \mathcal{H}.$$

(i) $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale.

$$\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H} \Rightarrow c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 \in \mathcal{H}, \quad \begin{pmatrix} c_1, c_2 \\ \in \mathbb{C} \end{pmatrix}$$

$\{\psi_i\}$ linear. ind. se e solo se $\rightarrow$ N.B. $0 = \psi - \psi$
 $\sum c_i \psi_i = 0$ implica $c_1 = c_2 = \dots = 0$.

(ii) $\varphi, \psi \in \mathcal{H} \Rightarrow$

$$\langle \varphi | \psi \rangle \in \mathbb{C}, \text{ t. de } \langle \varphi | \psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle^*$$

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0. = 0 \text{ se e solo se } |\psi\rangle = 0.$$

$$\text{Norma di } \psi \Rightarrow \|\psi\| = \langle \psi | \psi \rangle^{1/2}$$

$\Rightarrow$ Def. distanza tra due punti:

$$\psi, \varphi \Rightarrow d_{\psi, \varphi} = \langle \psi - \varphi | \psi - \varphi \rangle^{1/2} = \|\psi - \varphi\|$$

($\mathcal{H}$ è uno spazio metrico)

$\Rightarrow$ Def. Convergenza di una successione

Crit. Cauchy:

Se $\forall \epsilon > 0, \exists n, m > N$, t. che

$$\|\psi_n - \psi_m\| < \epsilon, \text{ allora}$$

$$\{\psi_n\} \text{ converge - } \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi$$

(3) $\mathcal{H}$ è completo. Se $\{\psi_n\}$ converge, $\lim_n \psi_n \in \mathcal{H}$

(0, 1) No. $[0, 1] \text{ S\u00ec.}$

(4) $\mathcal{H}$ è separabile.

Esiste una base numerabile $\{\varphi_n\}$, denso dappertutto. Cioè

$$\forall \varphi, \quad \varphi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n \varphi_n$$

c.g. $R = [0, 1] \Leftarrow Q = \{m/n\}$ forma una base numerabile e denso dappertutto.

Operatori in $\mathcal{H}$

$$A: \varphi \rightarrow A\varphi$$

operatore lineare

$$A(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha A\varphi + \beta A\psi$$

Def) NORMA d'un operatore:

$$\text{Se } \|A\varphi\| < C \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}$$

$$\|A\| = \min C = \sup_{\varphi \neq 0} \|A\varphi\| / \|\varphi\|$$

$\|A\| < \infty \Rightarrow$ Un operatore è limitato

$\|A\| = \infty \Rightarrow$ " è illimitato

Per operatori limitati tutte le propr. di matrici di dimensione finita si applicano,

Hermitiane

In M.Q. siamo destinati a lavorare con operatori illimitati.

$$[Q, P] = i\hbar \mathbb{I}.$$

$$PQ^n - Q^n P = -in\hbar Q^{n-1}$$

$$\Rightarrow n\hbar \|Q^{n-1}\| < 2\|PQ^n\|$$

$$< 2\|P\|\|Q\|\|Q\|^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \|A+B\| &\leq \|A\| + \|B\| \\ \|AB\| &\leq \|A\|\|B\| \end{aligned}$$

$$\therefore \|P\|\|Q\| > n\hbar$$

$$\therefore \|P\|\|Q\| = \infty$$

e.g. H.O. $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$

$$H\psi_n = E_n\psi_n, \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\|H\psi_n\| / \|\psi_n\| = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

H è illimitato.

Domini di operatori A ,

$$\psi \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}, \text{ se } A\psi \in \mathcal{H}.$$

Operatori Hermitiani (simmetrici) e
operatori autoaggiunti

Dato $\psi \in \mathcal{H}$, se esiste $\chi \in \mathcal{H}$, t. che

$$\langle A\phi | \psi \rangle = \langle \phi | \chi \rangle, \quad \forall \phi \in D(A),$$

allora $|\chi\rangle = A^\dagger |\psi\rangle$ ($D\phi \cdot |\psi\rangle \in D(A^\dagger)$).

A è Hermitiano se

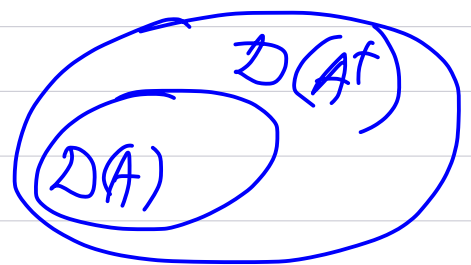
$$A^\dagger |\psi\rangle = A |\psi\rangle, \quad \forall |\psi\rangle \in D(A) \subset D(A^\dagger)$$

Se, in più, $D(A^\dagger) = D(A)$

A è autoaggiunto

Per un operatore $A=A^\dagger$.

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle^*$$



Spettro di un operatore a.a. = $\{\lambda_n, 1\}$

Spettro discreto

$$\lambda_n: (A - \lambda_n) \psi_n = 0, \|\psi_n\| = 1$$

Spettro continuo $\lambda \in \sigma$

Se esiste $\{\psi_n\}$, $\|\psi_n\| = 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$
tale che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|A \psi_N - \lambda \psi_N\| = 0, \|\psi_N\| = 1.$$

e.g. $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

$$\psi_p^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{\pi} N^{1/2}} e^{ipx/\hbar} e^{-x^2/2N^2}, \quad \|\psi_p^{(N)}\| = 1$$

$$\|\hat{p} \psi_p^{(N)} - p \psi_N\| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad -\infty < p < \infty$$

$$\therefore \text{L.H.S.} = \left\| \frac{1}{\sqrt{\pi} N^{1/2}} \frac{x}{N^2} e^{ipx/\hbar} e^{-x^2/2N^2} \right\|$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} N^5} \underbrace{\int dx x^2 e^{-x^2/N^2}}_{N^3} \right)^{1/2}$$

$$= \text{const.} \frac{1}{N} \rightarrow 0.$$

OK



Operator $\hat{X}$

$$\psi_{x_0}^{(N)}(x) = \left(\frac{2N}{\pi}\right)^{1/4} e^{-N(x-x_0)^2}, \quad \|\psi_{x_0}^{(N)}\| = 1.$$

$$\text{and } \|(x-x_0)\psi_{x_0}^{(N)}\| \rightarrow 0.$$

$$\therefore = \left(N^{1/2} \int dx (x-x_0)^2 e^{-2N(x-x_0)^2} \right)^{1/2}$$

$$\sqrt{2N}(x-x_0) = z$$

$$= \left(\text{const.} \cdot \frac{1}{N} \right)^{1/2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Df. Spetro di un operatore, σ , d. A

Df. Insieme risolvente d. A (a.a.)
 $= \rho$

Df. Risolvente d. A

$$= (\lambda I - A)^{-1}$$

$\lambda \in \rho \subset \mathbb{R}$ se

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty \quad \text{(operatore limitato)}$$

$\sigma = \mathbb{R} \setminus \rho$ Complemento d. ρ

N.B. ρ è aperto.

$\Rightarrow$ σ è chiuso.

e.g. Particella libera. $H = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow E \geq 0$

$$\exists \lambda \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\| < \infty \Rightarrow \| \psi \|$$

$$\therefore \underbrace{(A - \lambda I)}_1 \psi = 0 \rightarrow \psi = 0$$

$$\|(I-A)\varphi\| < c \|\varphi\|$$

$$(I-A)\varphi_\lambda = 0$$

$$(I-A)^T(I-A)\varphi_\lambda$$

$$m_a \quad \|(I-A)^T(I-A)\varphi_\lambda\|$$

$$< c \|(I-A)\varphi_\lambda\| = 0$$

$$\|\varphi_\lambda\| < 0 \quad \text{No.}$$

Ogni operatore A (a.c.) $\rightarrow \{\lambda_n\}, \{P_n\}$

$$P(\lambda) = \int^\lambda d\lambda' |\lambda'\rangle \langle \lambda'|$$

$$P_n \equiv |n\rangle \langle n|$$

Teo. spettrale

$$P(\lambda) = \int^\lambda d\lambda' \left[|\lambda'\rangle \langle \lambda'| + \sum_n \delta(\lambda - \lambda_n) |n\rangle \langle n| \right]$$

$$P(\infty) = \int^\infty dP(\lambda) = 1$$

$$|\psi\rangle = \int dP(\lambda) |\psi\rangle =$$

$$= \int d\lambda' |\lambda'\rangle \langle \lambda' | \psi \rangle + \sum_n |\psi\rangle \langle n | \psi \rangle$$

$$A = \int \lambda \cdot dP(\lambda) = \int \lambda dP_c(\lambda) + \sum_n \lambda_n P_n$$

$$f(A) = \int f(\lambda) dP(\lambda) = \int f(\lambda) dP_c(\lambda) + \sum_n f(\lambda_n) P_n.$$

N.B. $\log A$

La misura di A su $|\psi\rangle$

$$P_n = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|n\rangle\langle n|\psi\rangle = \langle\psi|P_n|\psi\rangle$$

$$P(d\lambda) = |\langle\lambda|\psi\rangle|^2 d\lambda = \langle\psi|\underbrace{\lambda}\times\underbrace{\lambda|\psi\rangle}_{d\lambda} \\ = \langle\psi|dP(\lambda)|\psi\rangle$$

$$\text{Prob. tot} = \langle\psi|(\sum_n P_n + \int dP(\lambda))|\psi\rangle \\ = \langle\psi|\psi\rangle = 1.$$

Unitarietà.

Trasformazioni Unitarie

$$U, \quad U^\dagger U = 1.$$

$$\forall \psi, \forall \phi, |\psi\rangle$$
$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle; \quad 0 \rightarrow U0U^\dagger = 0;$$

$$\langle \phi | 0 | \psi \rangle \rightarrow \langle \tilde{\phi} | \tilde{0} | \tilde{\psi} \rangle$$

$$= \langle \phi | U^\dagger \cdot U0U^\dagger \cdot U | \psi \rangle = \langle \phi | 0 | \psi \rangle.$$

Tutti gli elementi di matrice sono invarianti.

$\Rightarrow$ In MQ, gli stati e gli operatori sono definiti a meno di una trasformaz. Unitaria.

e.g.
$$U = e^{i\hat{p}x_0/\hbar}$$

$$|\psi\rangle \rightarrow U|\psi\rangle$$

N.B. Non è richiesto

$$[U, H] = 0 \quad (\Leftrightarrow \text{Simmetria})$$

cf M.C. Cambio variabile $\Leftrightarrow$ se Inv. H : Simmetria

Schema di Heisenberg. (cfr. Schema di Schrödinger)

Operatori di evoluz. temporale

$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ è un operatore unitario.

$$| \psi(0) \rangle \rightarrow | \psi(t) \rangle_S = e^{-iHt/\hbar} | \psi(0) \rangle.$$

$$\Rightarrow | \psi(t) \rangle_H \equiv U(t) | \psi(t) \rangle_S = | \psi(0) \rangle_S$$

$$\begin{aligned} \hat{O} &\Rightarrow O_H(t) = U(t) \hat{O} U^\dagger(t) \\ &= e^{iHt/\hbar} \hat{O} e^{-iHt/\hbar} \end{aligned}$$

Evoluzione temporale del sistema è ora portata da operatori.

$$x \rightarrow X_H(t) = e^{iHt/\hbar} x e^{-iHt/\hbar}$$

$$p \rightarrow P_H(t) = e^{iHt/\hbar} p e^{-iHt/\hbar}.$$

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle_S &= \langle \psi | O_H(t) | \psi \rangle_H \\ &= \langle \psi(0) | U_H(t) | \psi(0) \rangle \end{aligned}$$

NB $\boxed{[X_H(t), p_H(t)] = i\hbar \mathbb{1}}$ Com.
 ~~fund.~~

$\forall: a$ ~~non~~

$$[X_H(t), X_H(t)] \neq 0, [p_H(t), p_H(t)] \neq 0$$

i general.

$$f(\hat{p}, \hat{q}) = \sum_n (a_n p^n + b_n q^n)$$

$$f_H(\hat{p}, \hat{q}) = U \sum_n (a_n p^n + b_n q^n) U^\dagger =$$

$$\sum_n a_n (U p U^{-1})^n + b_n (U q U^{-1})^n$$

$$= f(p_H, q_H).$$

$$H_H = e^{iHt/\hbar} H e^{-iHt/\hbar} = H \quad \text{ma}$$

e.g. $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$

$$\Rightarrow H_H(t) = \frac{1}{2m} p_H^2(t) + \frac{m\omega^2}{2} X_H^2(t)$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} X_H = i\hbar \frac{2}{dt} \left(e^{iHt/\hbar} x e^{-iHt/\hbar} \right)$$

$$= [X_H(t), H_H(t)]$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} P_H(t) = [P_H(t), H],$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} O_H(t) = [O_H(t), H] + e^{iHt/\hbar} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O \right) e^{-iHt/\hbar}$$

N.B. In M.C.,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} O_H(t).$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(p, q) &= \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \{f, H\}_{P.P.} + \frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

$$\{q_i, p_j\}_{P.P.} = \delta_{ij}.$$

In general,

$$\{A, B\}_{P.P.} \Rightarrow [A, B] / i\hbar$$

M.C. M.Q.

$\Rightarrow$ Eq. of Heisenberg

Applicazioni:

(i) Caso libero. $H = \frac{p^2}{2m}$

Calcolare $x_H(t)$, $p_H(t)$

Calcolare $\langle \psi(t) | x^2 | \psi(t) \rangle$?

($\psi_0(x) \equiv \psi(x, 0)$ nota.)

(ii) Oscillatore armonico.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

$$i\hbar \dot{x}_H = [x_H, H] = i\hbar \frac{p_H}{m} \therefore \dot{x}_H = \frac{p_H}{m} \quad (*)$$

$$i\hbar \dot{p}_H = [p_H, H] = -m\omega^2 x_H(t) \quad i\hbar$$

$$\dot{p}_H = -m\omega^2 x_H(t) \quad (**)$$

$$(**)(*) \quad \ddot{x}_H = \frac{1}{m}(-m\omega^2)x_H = -\omega^2 x_H$$

$$\therefore x_H(t) = \cos \omega t \cdot x + \sin \omega t \cdot A$$

$$\dot{x}_H(0) = \omega A \equiv p/m$$

$$\therefore A = \frac{p}{m\omega}$$

$$x_H(t) = x \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t$$

Analogously,

$$\dot{P}_H(t) = -m\omega^2 \dot{x}_H = -\omega^2 P_H(t)$$

$$P_H(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$P_H(0) = p = A \quad A \equiv \hat{p}$$

$$\dot{P}_H(0) = -m\omega^2 x(0) = -m\omega^2 x.$$

$$= B\omega \quad \therefore B = -m\omega x$$

$$\begin{cases} \dot{P}_H(t) = p \cos \omega t - m\omega x \sin \omega t \\ x_H(t) = x \cos \omega t - \frac{p}{m\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

