Appello di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
13 gennaio 2005 (A.A. 04/05)

N.B. Chi desidera recuperare il Compitino I del 15 nov. deve risolvere il Problema 1. Il tempo disponibile è 2.5 ore. Chi desidera il recupero solo del Compitino II del 21 dic. deve risolvere il Problema 2. Il tempo disponibile: 2.5 ore. Per Appello I, il tempo disponibile è di 4 ore.

Problema 1. Una coppia di sistemi unidimensionali che hanno gli spettri identici tranne lo stato fondamentale, può essere costruita come segue. Introdurremo due operatori

$$A = \frac{i\,p}{\sqrt{2m}} + W(x), \qquad A^\dagger = -\frac{i\,p}{\sqrt{2m}} + W(x), \tag{1}$$

dove p è l'operatore dell'impulso, $W(x)$ è una funzione reale. Le Hamiltoniane dei due sistemi sono allora date da

$$H^{(1)} = A^\dagger A = \frac{p^2}{2m} + V^{(1)}(x), \qquad H^{(2)} = A A^\dagger = \frac{p^2}{2m} + V^{(2)}(x), \tag{2}$$

dove

$$V^{(1)}(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x), \qquad V^{(2)}(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \tag{3}$$

(i) Supponiamo che $|W(x)| \to \infty$ a $x \to \pm\infty$. Si dimostri che gli autostati di energia soddisfano

$$E_n^{(1)} \geq 0; \quad E_n^{(2)} \geq 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

(ii) Trovare le condizioni su $W(x)$ tale che il sistema $H^{(1)}$ abbia uno stato fondamentale di energia esattamente nulla, $\psi_1^{(1)}(x)$. Dimostrare che in questo caso lo stato fondamentale del sistema $H^{(2)}$ ha l'energia positiva. Dimostrare che la funzione $W(x)$ è data in termini di $\psi_1^{(1)}(x)$ da:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_1^{(1)\prime}(x)}{\psi_1^{(1)}(x)}. \tag{5}$$

(iii) Dimostrare, sempre sotto la stessa ipotesi, che

$$E_1^{(1)} = 0; \qquad E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots : \tag{6}$$

in altre parole, che tutti i livelli energetici sono identici nei due sistemi, tranne lo stato fondamentale di $H^{(1)}$. (Fig. 1)

(iv) Prendiamo come $H^{(1)}$ la buca unidimensionale di altezza infinita,

$$H^{(1)} = \frac{p^2}{2m} + V^{(1)}(x), \qquad V^{(1)}(x) = \begin{cases} \infty & x < 0,\ x > a, \\ -\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, & 0 \leq x \leq a, \end{cases} \tag{7}$$

dove il potenziale costante nell'intervallo $0 \leq x \leq a$ è scelto negativo (anziché 0) di modo che l'energia dello stato fondamentale sia esatamente nulla. Lo spettro del sistema è infatti semplicemente

$$E_n^{(1)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n^2 - 1), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

Facendo uso delle (3),(5), e (7), trovare il potenziale $V^{(2)}(x)$ del sistema compagno che ha lo spettro $E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}$, e farne uno schizzo.

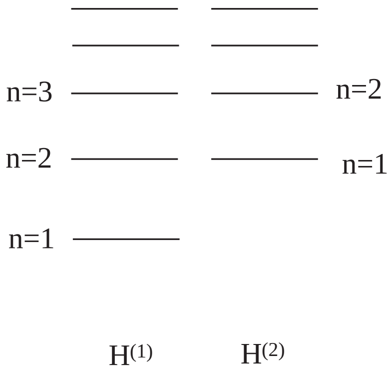

Figura 1:

Problema 2. Un atomo di idrogeno è in uno stato di $n=2$.

(i) Dire quali sono l'energia e la degenerazione degli stati di $n=2$, tenendo conto anche dello spin dell'elettrone (ma non del protone);

(ii) Supponiamo che l'Hamiltoniana sia modificata da un termine aggiuntivo del tipo "spin-orbita"

$$H' = A\mathbf{L}\cdot\mathbf{s}, \tag{9}$$

dove A è una costante. Calcolare i livelli energetici, le degenerazioni e i numeri quantici conservati, corrispondenti agli stati del punto (i).

(iii) Supponiamo, invece, che l'atomo sia sottoposto ad un campo magnetico esterno debole, omogeneo e statico, $\mathbf{B} = (0,0,B)$. È noto che l'Hamiltoniana in questo caso è approssimativamente

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{e\hbar}{2mc}(\mathbf{L}+2\mathbf{s})\cdot\mathbf{B} \tag{10}$$

(effetto Zeeman). In quanti sottolivelli si divide il livello $n=2$? Quali sono le energie, i numeri quantici e la degenerazione di ciascuno dei sottolivelli?

(iv) Supponiamo che l'atomo di idrogeno, senza il campo esterno, e senza l'interazione (9), si trovi inizialmente nello stato, $n=2$, $(J,J_z) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ e di parità negativa.[1] All'istante $t=0$, si accende il campo magnetico di cui al punto (iii). Dire quali sono i valori possibili di (J,J_z) all'istante t e calcolare relative probabilità.

Nota sui Punteggi

I punti saranno distribuiti come: 3,5,4,3 rispettivamente per le domande (i)-(iv) del Problema 1; 4,4,4,3 per le domande (i)-(iv) del Problema 2.

[1] Considerare la parità instrinseca dell'elettrone positiva.

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$E_n^{(1)} = \langle n|H^{(1)}|n\rangle = \langle n|A^\dagger A|n\rangle = ||A|n\rangle||^2 \geq 0. \tag{11}$$

Dimostrazione analoga per $E_n^{(2)}$.

(ii) Da (i) segue che per l'esistenza di uno stato di $E = 0$ è necessario e sufficiente che sia soddisfatta

$$A\psi_1^{(1)}(x) = 0, \qquad [\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x)]\,\psi_1^{(1)}(x) = 0 \tag{12}$$

da una funzione $\psi_1^{(1)}(x)$ normalizzabile. Visto che

$$\psi_1^{(1)}(x) = e^{-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^x dx W(x)}\,\psi_1^{(1)}(0) \tag{13}$$

la condizione che essa sia normalizzabile è:

$$\int_0^x dx W(x) \to +\infty, \qquad x \to \pm\infty, \tag{14}$$

di modo che

$$e^{-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^x dx W(x)} < O(\frac{1}{|x|}), \qquad x \to \pm\infty. \tag{15}$$

Se questa condizione è soddisfatta, la soluzione dell'equazione per il sistema (2)

$$A^\dagger\psi_1^{(2)}(x) = 0, \tag{16}$$

$$\psi_1^{(2)}(x) = e^{+\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\int_0^x dx W(x)}\,\psi_1^{(2)}(0) \tag{17}$$

non può certo essere normalizzabile. La relazione (5) è ovvia vista la (12).

(iii) Dati gli autosati di $H^{(1)}$,

$$H^{(1)}\,\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\,\psi_n^{(1)}, \tag{18}$$

si ha

$$H^{(2)}A\,\psi_n^{(1)} = AA^\dagger A\psi_n^{(1)} = AH^{(1)}\,\psi_n^{(1)} = E_n A\psi_n^{(1)}, \tag{19}$$

tranne per $n = 1$ (per il quale $A\,\psi_n^{(1)} = 0$). Perciò

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}}A\psi_{n+1}^{(1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

$$E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{21}$$

(iv) La funzione d'onda dello stato fondamentale della buca è

$$\psi_1^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a} \tag{22}$$

Dalla (5) si trova che

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\pi}{a}\cot\frac{\pi x}{a}. \tag{23}$$

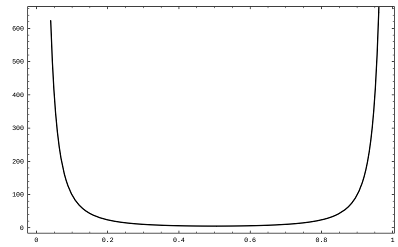

Figura 2:

$$W(x)^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\cot^2\frac{\pi x}{a}; \qquad W'(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\pi^2}{a^2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{a}}. \tag{24}$$

Per consistenza,

$$V^{(1)}(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\left[\cot^2\frac{\pi x}{a} - \frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{a}}\right] = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}, \tag{25}$$

come ci si aspetta. Il potenziale richiesto $V^{(2)}$ è invece non banale:

$$V^{(2)}(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}\frac{1+\cos^2\frac{\pi x}{a}}{1-\cos^2\frac{\pi x}{a}}, \qquad 0 \le x \le a, \tag{26}$$

$$V^{(2)}(x) = \infty, \qquad x < 0, \; x > a. \tag{27}$$

Problema 2.

(i)

$$E_2 = -\frac{e^2}{8r_B}, \qquad d = 2\cdot 4 = 8. \tag{28}$$

$L = 1, 0$. In termini di stati di momento angolare totale, $J = \frac{3}{2}$, (quattro stati), e due doppietti di $J = \frac{1}{2}$.

(ii)

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{s} = \frac{\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2}{2}. \tag{29}$$

$\mathbf{J}$, L^2, s^2 commutano con H. Le degenerazione di ogni livello è dovuta a J_z.
I quattro stati di $(J,L,s) = (\frac{3}{2},1,\frac{1}{2})$ ha l'energia $E_2 + \frac{A}{2}$;
i due stati di $(J,L,s) = (\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$ ha l'energia $E_2 - A$;
i due stati di $(J,L,s) = (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})$ ha l'energia E_2.

(iii)

$$\Delta H = -\frac{e\hbar}{2mc}(L_z + 2s_z)B. \tag{30}$$

Perciò in questo caso, i numeri quantici buoni sono $\mathbf{L}^2$, L_z, $\mathbf{s}^2$ e s_z. Il livello $n = 2$ si divide in cinque sottolivelli. Le energie sono
$E = E_2 + 2\frac{e\hbar B}{2mc}$ (singolo), [$L = 1, L_z = -1, s_z = -\frac{1}{2}$];
$E = E_2 + \frac{e\hbar B}{2mc}$ (doppio), [$L = 1, L_z = 0, s_z = -\frac{1}{2}$] e [$L = 0, L_z = 0, s_z = -\frac{1}{2}$];
$E = E_2$ (doppio), [$L = 1, L_z = 1, s_z = -\frac{1}{2}$] e [$L = 1, L_z = -1, s_z = \frac{1}{2}$];
$E = E_2 - \frac{e\hbar B}{2mc}$ (doppio), [$L = 1, L_z = 0, s_z = \frac{1}{2}$] e [$L = 0, L_z = 0, s_z = \frac{1}{2}$];
$E = E_2 - 2\frac{e\hbar B}{2mc}$ (singolo), [$L = 1, L_z = 1, s_z = \frac{1}{2}$].

L	L_z	s_z	ΔE (in unità di $\frac{e\hbar B}{2mc}$)
1	1	$+\frac{1}{2}$	-2
1	1	$-\frac{1}{2}$	0
1	0	$+\frac{1}{2}$	-1
1	0	$-\frac{1}{2}$	$+1$
1	-1	$+\frac{1}{2}$	0
1	-1	$-\frac{1}{2}$	$+2$
0	0	$+\frac{1}{2}$	-1
0	0	$-\frac{1}{2}$	$+1$

Tabella 1:

(iv)

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,1\rangle\,|\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\,|\uparrow\rangle \\ &\to \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,1\rangle\,|\downarrow\rangle - e^{-i\Delta E t/\hbar}\sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,0\rangle\,|\uparrow\rangle, \end{aligned} \tag{31}$$

dove nella seconda riga abbiamo trascurato la fase globale, $e^{-iE_2 t/\hbar}$, e

$$\Delta E = -\frac{e\hbar B}{2mc} \tag{32}$$

dal punto (iii). Riesprimendo (31) in termini di stati di momento angolare totale, si ha

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{2}{3}}\,[\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\,] - e^{\frac{ieBt}{2mc}}\sqrt{\frac{1}{3}}\,[\sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle\,] \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\,(1-e^{\frac{ieBt}{2mc}})\,|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle + (\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,e^{\frac{ieBt}{2mc}})\,|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle. \end{aligned} \tag{33}$$

$$P_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \left|\frac{\sqrt{2}}{3}\,(1-e^{\frac{ieBt}{2mc}})\right|^2 = \frac{8}{9}\,\sin^2\frac{eBt}{4mc}; \tag{34}$$

$$P_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \left|(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\,e^{\frac{ieBt}{2mc}})\right|^2 = \frac{1}{9}\,(5+4\cos\frac{eBt}{2mc}) = 1-\frac{8}{9}\,\sin^2\frac{eBt}{4mc}. \tag{35}$$