Appello di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
1 febbraio 2007 (A.A. 06/07)
Tempo a disposizione: 3 ore.

Problema 1

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si trova nello stato, $|\uparrow\rangle_{\mathbf{n}}$, dove

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}\,|\uparrow\rangle_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle_{\mathbf{n}}, \qquad \mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

(i) Quali sono i risultati possibili di s_z in questo stato e quali sarebbero le probabilità relative?

(ii) Quali sono i risultati possibili e quali sono relative probabilità, se si misurasse invece s_x ?

Consideriamo ora un sistema composto da due spin $\frac{1}{2}$, s_A e s_B, che forma uno stato di spin totale zero.

(iii) *Sapendo* che la misura di $\mathbf{s}_A\cdot\mathbf{n}$ ha dato il risultato $\frac{1}{2}$, qual'è la probabilità che la misura di s_{Bz} dia il risultato $\frac{1}{2}$?

Problema 2.

Una particella si muove in un potenziale unidimensionale $V(x)$ generico, non necessariamente simmetrico per $x \to -x$. . $V(x)$ tende a zero rapidamente a $x \to \pm\infty$. La funzione d'onda corrispondente al processo in cui la particella è incidente da $x = -\infty$, chiamiamola $\psi_L(x)$, ha l'andamento asintotico a $x \to -\infty$ (regione *I*) ed a $x \to \infty$ (regione *II*):

$$\psi_L(x) \to e^{ikx} + B\,e^{-ikx} \quad (I); \qquad \psi_L(x) \to C\,e^{ikx} \quad (II), \tag{1}$$

dove l'onda incidente è stata arbitrariamente normalizzata a e^{ikx}.

(i) Dire qual'è la condizione soddisfatta dai coefficienti B e C di modo che la probabilità totale sia conservata.

(ii) Quali sono i coefficienti di riflessione e di trasmissione?

(iii) Il potenziale $V(x)$ deve essere reale: spiegare perché.

Si vogliono studiare i coefficienti di riflessione e di trasmissione per una particella incidente da $x = +\infty$, con lo stesso potenziale.

(iv) Visto che $V(x)$ è reale, il coniugato complesso $\psi_L^*(x)$ soddisfa la stessa equazione di Schrödinger di $\psi_L(x)$, con la stessa energia. Trovare la combinazione lineare ψ_R

$$\psi_R(x) = F\,\psi_L(x) + G\,\psi_L^*(x)$$

tale che $\psi_R(x)$ abbia, nella regione *I*, soltanto la componente dell'onda trasmessa (Fig. 1), determinando le costanti F e G in termini di B e C.

(v) Determinare i coefficienti di riflessione/trasmissione in termini di B e C.

(vi) (*Opzionale*) Se $V(-x) = V(x)$ il sistema è invariante per parità. Trovare i vincoli su B e C che derivano da questa simmetria.

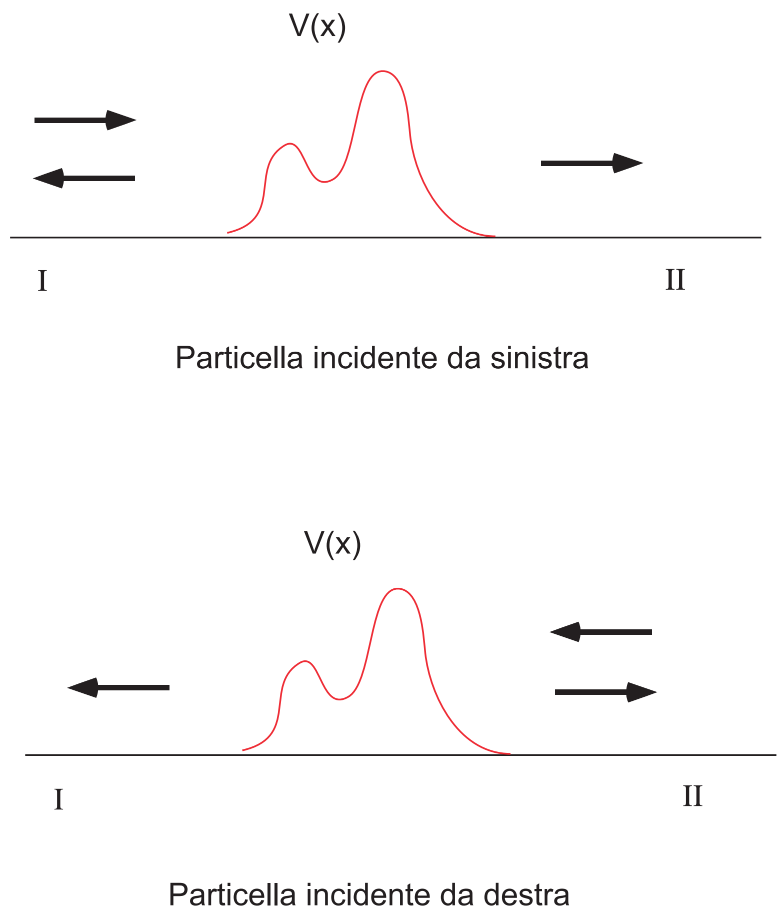

Figura 1: Processi con particella incidente da sinistra (sopra) e da destra (sotto)

Soluzione

Problema 1.

(i) In termini di autostati di s_z, $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$,

$$|\uparrow\rangle_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle + e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle;$$

le probabilità sono $\cos^2\frac{\theta}{2}$ e $\sin^2\frac{\theta}{2}$, rispettivamente, per $s_z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Determiniamo anche

$$|\downarrow\rangle_{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle - e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle,$$

che è ortogonale a $|\uparrow\rangle_{\mathbf{n}}$.

(ii) Lo stato in cui $s_x = \frac{1}{2}$ è

$$|\uparrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La probabilità richiesta è

$$P = |\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} + e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2})|^2 = \frac{1}{2}(1+\cos\phi\,\sin\theta).$$

Infatti, $P = 1$ per $\phi = 0$, $\theta = \pi/2$; $P = 0$ per $\phi = \pi$, $\theta = \pi/2$; $P = 1/2$ per $\phi = \pi/2$, $\theta = \pi/2$.

(iii) Lo stato di singoletto è

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_{A\,\mathbf{n}}|\downarrow\rangle_{B\mathbf{n}} - |\downarrow\rangle_{A\,\mathbf{n}}|\uparrow\rangle_{B\mathbf{n}})$$

per qualsiasi $\mathbf{n}$. Sapendo che A sia nello stato $|\uparrow\rangle_{\mathbf{n}}$ si conclude che B è nello stato, $|\downarrow\rangle_{B\mathbf{n}}$. La probabilità che la misura di s_{Bz} dà $s_{Bz} = \frac{1}{2}$ è perciò

$$\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Problema 2.

(i)

$$|B^2| + |C|^2 = 1.$$

(ii)

$$R = |B^2|, \qquad D = |C|^2.$$

(iii) Deve essere reale perché l'Hamiltoniana sia Hermitiana.

(iv) ψ_L^* ha l'andamento,

$$\psi_L(x)^* \to e^{-ikx} + B^*\,e^{ikx} \quad (x\to-\infty); \qquad \psi_L(x)^* \to C^*\,e^{-ikx} \quad (x\to\infty), \tag{2}$$

per cui la combinazione lineare adatta è (a parte la normalizzazione)

$$B^*\,\psi_L - \psi_L^* \tag{3}$$

che tende nella regione I a

$$(|B|^2-1)\,e^{-ikx} = -|C|^2\,e^{-ikx},$$

che rappresenta l'onda trasmessa, mentre si comporta come

$$B^* C e^{ikx} - C^* e^{-ikx},$$

a $x \to \infty$, che consiste dell'onda incidente e l'onda riflessa. Normalizzando (dividendo la (3) con $-1/C^*$) la funzione d'onda appropriata per il secondo processo in cui la particella è incidente da destra è:

$$\psi_R(x) = \frac{1}{C^*}[\psi_L^* - B^* \psi_L],$$

con l'andamento,

$$\psi_R(x) \to C e^{-ikx} \quad (I), \qquad \psi_R(x) \to e^{-ikx} - B^* \frac{C}{C^*} e^{ikx} \quad (II).$$

I coefficienti di riflessione e trasmissione sono $R = |B^* \frac{C}{C^*}|^2 = |B|^2$, $D = |C|^2$, *i.e.*, sono uguali a quelli trovati prima, per il processo in cui la particella è incidente da sinistra.

(vi) Se la parità è valida, le due soluzioni si scambiano per parità, cioè,

$$B = -B^* \frac{C}{C^*}.$$

Se l'argomento di B e di C sono α e β, rispettivamente,

$$e^{2i\alpha} = -e^{2i\beta}, \qquad e^{i\alpha} = i\, e^{i\beta},$$

i.e., le loro fasi differiscono di $\frac{\pi}{2}$.