Prova Scritta di MQI / Compitino di MQ

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
01 febbaio 2012 (A.A. 11/12)

Tempo a disposizione: 3 ore

Indicate se optate per il Compitino MQ o per la Prova scritta MQI

Problema 1.

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale "a gradino",

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ V_0 & x > 0, \qquad V_0 > 0, \end{cases} \tag{1}$$

incidente da $x = -\infty$. Determinare i coefficienti di riflessione e di trasmissione come funzione dell'energia incidente. Come cambiano le risposte se la particella è incidente da $x = +\infty$?

Problema 2.

Un fascio di particella di spin $1/2$ attraversa un apparato à la Stern-Gerlach. Quando il campo magnetico è in direzione $\hat{z}$ le intensità relative dei due sottofasci dietro l'apparato SG risultano 0.8 e 0.2. Per concretezza supponiamo che queste corrispondano alle probabilità $P_{(s_z=1/2)}$ e $P_{(s_z=-1/2)}$ rispettivamente. Analogamente quando l'apparato è ruotato di modo che si misura s_x le intensità relative (per $s_x = 1/2$ e $s_x = -1/2$) sono 0.6 e 0.4; con il campo nella direzione $\hat{y}$, si hanno le intensità relative 0.5 e 0.5.

(i) La forma generale della matrice densità ρ è data da:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix} , \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1 \,. \tag{2}$$

Esprimere la probabilità $P_{(s_z=1/2)}$,

$$P_{(s_z=1/2)} = \mathrm{Tr}\,(\rho\,\Pi_{s_z=1/2}) \tag{3}$$

in termini dei parametri di Stokes ξ_i. Nella formula precedente $\Pi_{s_z=1/2}$ è l'operatore di proiezione sullo stato di $|s_z = 1/2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Esprimere, analogamente, $P_{(s_x=1/2)}$ e $P_{(s_y=1/2)}$ in termini di ξ_i.

(iii) Usando i risultati dei punti (i), (ii) e utilizzando i dati ipotizzati nel problema, dire se il fascio incidente corrisponde ad uno stato puro.

(iv) Supponiamo che le probabilità $P_{(s_x=1/2)}$, $P_{(s_y=1/2)}$, $P_{(s_z=1/2)}$ non siano note. Trovare il massimo valore che

$$P_{(s_x=1/2)} + P_{(s_y=1/2)} + P_{(s_z=1/2)} \tag{4}$$

possa prendere *a priori* in uno stato misto generico.

Problema 3.

Consideriamo un atomo idrogenoide con numero atomico Z. Inizialmente il sistema è nello stato fondamentale $n = 1$, $\ell = 0$ ($Z = 1$ per l'atomo di idrogeno):

$$\psi_{n=1,\ell=0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{r_B} \right)^{3/2} e^{-Zr/r_B}, \tag{5}$$

dove r_B è il raggio di Bohr, $r_B \equiv \hbar^2/me^2$.

(i) Dire qual'è l'energia dello stato fondamentale.

Supponiamo che, a causa di una reazione nucleare, la carica Z del nucleo aumenti improvvisamente di una unità.

(ii) Calcolare la probabilità che il sistema si trovi nello stato fondamentale del risultante idrogenoide, di carica $Z+1$. Dare il valore numerico di questa probabilità per $Z = 3$.

(iii) Assumendo che tale misura (i.e., per determinare in quale autostato il sistema si trovi) *non* sia fatta, trovare il valor medio $\overline{T}$ dell'energia cinetica, e $\overline{V}$ dell'energia potenziale e quindi il valor medio $\overline{E}$ dell'energia totale *dopo* la conversione nucleare $Z \to Z+1$. Confrontare $\overline{E}$ col livello fondamentale dell'idrogenoide iniziale e di quello finale.

SOLUZIONE

Problema 1.

Supponiamo $E > V_0$ prima.

$$\psi = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \qquad x < 0, \tag{6}$$

$$\psi = Be^{ik'x}, \qquad x < 0, \tag{7}$$

dove $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $k' = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$.

$$1 + A = B, \qquad ik(1-A) = ik'B \tag{8}$$

quindi

$$A = \frac{k-k'}{k+k'}, \qquad B = \frac{2k}{k+k'} \ . \tag{9}$$

$$J_{inc} = \frac{k\hbar}{m}, \qquad J_{rif} = \frac{k\hbar}{m}|A|^2, \qquad J_{tras} = \frac{k'\hbar}{m}|B|^2. \tag{10}$$

$$R = \frac{J_{rif}}{J_{inc}} = \frac{(k-k')^2}{(k+k')^2}, \qquad D = \frac{J_{tras}}{J_{inc}} = \frac{4kk'}{(k+k')^2}, \tag{11}$$

con

$$R + D = 1. \tag{12}$$

Per $E < V_0$ l'onda che penetra sotto il potenziale è reale, $J_{tras} = 0$, quindi

$$R = 1, \qquad D = 0. \tag{13}$$

Nel caso la particellaè incidente da $x = +\infty$, $E > V_0$ necessariamente, e

$$\psi = e^{-ik'x} + Ae^{ik'x}, \qquad x > 0, \tag{14}$$

$$\psi = Be^{-ikx}, \qquad x < 0, \tag{15}$$

$$1 + A = B, \qquad ik'(1-A) = ikB \tag{16}$$

quindi

$$A = \frac{k'-k}{k'+k}, \qquad B = \frac{2k'}{k+k'} \ . \tag{17}$$

$$J_{inc} = \frac{k'\hbar}{m}, \qquad J_{rif} = \frac{k'\hbar}{m}|A|^2, \qquad J_{tras} = \frac{k\hbar}{m}|B|^2. \tag{18}$$

$$R = \frac{J_{rif}}{J_{inc}} = \frac{(k-k')^2}{(k+k')^2}, \qquad D = \frac{J_{tras}}{J_{inc}} = \frac{4kk'}{(k+k')^2}, \tag{19}$$

con

$$R + D = 1. \tag{20}$$

Risulta che i coefficienti di riflessione e di trasmissione sono uguali in due problemi.

Problema 2.

(i)

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$P_{(s_z=1/2)} = \mathrm{Tr}\,(\rho\,\Pi_{s_z=1/2}) = \frac{1}{2}(1+\xi_3)\ . \tag{22}$$

(ii)

$$P_{(s_x=1/2)} = \frac{1}{2}(1+\xi_1)\ , \qquad P_{(s_y=1/2)} = \frac{1}{2}(1+\xi_2)\ . \tag{23}$$

(ii)

$$(1+\xi_3)/2 = 0.8, \qquad \xi_3 = 0.6, \tag{24}$$

$$(1+\xi_1)/2 = 0.6, \qquad \xi_1 = 0.2, \tag{25}$$

$$(1+\xi_2)/2 = 0.5, \qquad \xi_2 = 0, \tag{26}$$

La matrice densità è data da

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}\ . \tag{27}$$

Visto che

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.1 \\ 0,1 & 0.05 \end{pmatrix} \neq \rho \tag{28}$$

(oppure semplicemente osservando che $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 < 1$), si ha che il fascio è solo parzialmente polarizzato (stato non puro)).

(iii) Il problema è trovare il massimo di

$$P_{(s_x=1/2)} + P_{(s_y=1/2)} + P_{(s_z=1/2)} = \frac{1}{2}(3+\xi_1+\xi_2+\xi_3), \tag{29}$$

sotto la condizione, $\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 < 1$. Possiamo prendere

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = 1, \tag{30}$$

e

$$X = \xi_1+\xi_2+\xi_3 = \xi_1+\xi_2+\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}\ . \tag{31}$$

Per fisso ξ_2 questo prende il massimo per ξ_1 tale che

$$1 - \frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2-\xi_2^2}} = 0, \qquad \therefore \quad \xi_1 = \frac{\sqrt{1-\xi_2^2}}{\sqrt{2}}, \tag{32}$$

dove

$$X = 2\xi_1 + \xi_2 = \sqrt{2}\sqrt{1-\xi_2^2} + \xi_2. \tag{33}$$

Massimizzando ora quest'ultimo rispetto a ξ_2, si ha

$$\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \therefore \quad \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{34}$$

e infine $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ anche.

$$X_{Max} = \sqrt{3}, \tag{35}$$

e

$$Max\{P_{(s_x=1/2)} + P_{(s_y=1/2)} + P_{(s_z=1/2)}\} = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3}) \simeq 2.366. \tag{36}$$

Problema 3.

i)
$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z_i}{r_B} \right)^{3/2} e^{-Z_i r/r_B}, \tag{37}$$

con $Z_1 = Z$, $Z_2 = Z + 1$.

$$\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle = \frac{4\pi}{\pi} \left(\frac{Z_1 Z_2}{r_B^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} dr\, r^2 e^{-(Z_1+Z_2)\,r/r_B} = 8 \frac{(Z_1 Z_2)^{3/2}}{(Z_1+Z_2)^3}. \tag{38}$$

$$W_{12} = |\langle \psi_2 | \psi_1 \rangle|^2 = 64 \frac{(Z_1 Z_2)^3}{(Z_1+Z_2)^6} = \left\{ \frac{4Z(Z+1)}{(2Z+1)^2} \right\}^3 < 1. \tag{39}$$

$$W_{12}|_{Z=3} = \frac{48^3}{49^3} \simeq 0.94 \tag{40}$$

per $Z = 3$.

ii)
$$\bar{V}|_{dopo} = -Z_2 e^2 \langle \frac{1}{r} \rangle = -\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_B} = -\frac{Z(Z+1)e^2}{r_B}; \tag{41}$$

$$\bar{T} = -\frac{1}{2} \bar{V}|_{prima} = \frac{Z_1^2 e^2}{2\,r_B} = \frac{Z^2 e^2}{2\,r_B}; \tag{42}$$

$$\bar{E} = \bar{T} + \bar{V} = -\frac{Z^2 + 2Z}{2} \frac{e^2}{r_B}; \tag{43}$$

Si nota che

$$-\frac{(Z+1)^2}{2} \frac{e^2}{r_B} < \bar{E} < -\frac{Z^2}{2} \frac{e^2}{r_B} \tag{44}$$