Prova Scritta di Meccanica Quantistica II

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
01 febbraio 2012 (A.A. 11/12)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1.

Il nucleo dell'atomo di deuterio è il deutone (un nucleo composto da un protone e un neutrone), con carica $+1$ e con un quadrupolo elettrico non nullo. Dovuto a quest'ultimo il potenziale per l'elettrone contiene un termine perturbativo:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{r} + V', \qquad V' = c\,\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \tag{1}$$

dove c è una costante molto piccola.

(i) Discutere qual'è la grandezza naturale di c, e dire rispetto a quale quantità c è piccolo.

(ii) Esaminare le correzioni all'energia dello stato fondamentale del deuterio, al primo ordine in V'.

(iii) Elencare tutti gli elementi di matrice non nulli di V' tra gli stati nonperturbati di $n = 3$, e dire in quanti sottolivelli si divide il livello $n = 3$, senza fare il calcolo esplicito delle correzioni.

(iv) Calcolare la correzione (non nulla) di energia di uno dei sottolivelli, a scelta.

Problema 2.

Una particella è legata al potenziale delta unidimensiale, $V(x) = -g\,\delta(x)$, con [1]

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa}\, e^{-\kappa|x|}\,, \qquad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2}; \quad E_0 = -\frac{mg^2}{2\hbar^2}\,. \tag{2}$$

All'istante $t = 0$ si accende una perturbazione debole,

$$H' = 2\lambda x \cos\omega t, \tag{3}$$

dove λ è una costante.

(i) Calcolare la probabilità di ionizzazione per un intervallo unitario di tempo (il rate di transizione), in teoria delle perturbazioni al primo ordine. Approssimate lo stato finale con un'onda piana $\psi_f(x) = \exp \pm ikx$ (un'approssimazione che a posteriori risulta esatta per le perturbazioni (3)).

(ii) Con l'approssimazione con $\psi_f(x) = \exp \pm ikx$ si trova che il rate di transitzioni risulta non nullo anche per un operatore banale,

$$H'' = \text{cost.} \cos\omega t. \tag{4}$$

Spiegare in che consiste l'errore, e discutere come correggerlo (non è necessario completare il calcolo "corretto").

[1] Non è necessario riprodurre il risultato, (2).

Formulario

Alcune integrali con funzioni radiali dell'atomo di idrogeno

$$\int_0^\infty dr\, r^{-1} R_{3,\ell}(r) R_{3,\ell'}(r) = c_{\ell,\ell'}\, r_B^{-3}, \tag{5}$$

$r_B \equiv \hbar^2/me^2$ è il raggio di Bohr, e il coefficiente $c_{\ell,\ell'}$ è dato da:

(ℓ,ℓ')	$(2,2)$	$(2,1)$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(1,0)$
$c_{\ell,\ell'}$	$\frac{1}{405}$	$\frac{1}{243\sqrt{5}}$	0	$\frac{1}{81}$	$\frac{4\sqrt{2}}{243}$

Armoniche sferiche

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_{2,0} = \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1),$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\, e^{\pm i\phi},$$

$$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}, \tag{6}$$

Altri integrali utili

$$I = \int_0^1 dx\, f(x)(1-3x^2) \tag{7}$$

$f(x)$	$(1-x^2)^2$	$x^2(1-x^2)$	$(1-3x^2)^2$	x^4	$1-x^2$	x^2	$1-3x^2$
I	$\frac{32}{105}$	$-\frac{4}{105}$	$-\frac{16}{35}$	$-\frac{8}{35}$	$\frac{4}{15}$	$-\frac{4}{15}$	$\frac{4}{5}$

Regola di Fermi

$$dW_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|F_{fi}|^2\,\delta(E_f - E_i - \hbar\omega)\,d\Phi. \tag{8}$$

Densità di stati: per una particella libera unidimensionale, $\psi = e^{ipx/\hbar}$

$$d\Phi = \frac{dp}{2\pi\hbar}\cdot 2 \qquad \text{(il fattore 2 per le due direzioni)} \tag{9}$$

Soluzione

Problema 1.

i) Il quadrupolo elettrico è dovuto alla distribuzione non sfericamente simmetrica della carica elettrica dentro il nucleo: è dell'ordine della dimensione del nucleo stesso,

$$c \sim e^2\, r_{nucleo}^2 \ll e^2\, r_B^2\,, \tag{10}$$

di circa un fattore $10^{-8} \simeq 10^{-10}$ più piccolo rispetto a $e^2\, r_B^2$.

ii) H' è un tensore sferico di rango 2: la correzione al primo ordine

$$\langle 1\,0\,0|H'|1\,0\,0\rangle \tag{11}$$

si anulla a causa del teorema di Wigner-Eckart.

iii) A $n=3$ ci sono stati con $\ell = 2,1,0$. Usando il teorema di Wigner-Eckart, la conservazione di parità, e del fatto che V' commuta con L_z, si ha che gli elementi a priori non nulli sono:

$$\langle 3\,2\,m|H'|3\,2\,m\rangle, \quad (m=2,1,0,-1,-2), \qquad \langle 3\,0\,0|H'|3\,2\,0\rangle, \qquad \langle 3\,2\,0|H'|3\,0\,0\rangle, \tag{12}$$

$$\langle 3\,1\,m|H'|3\,1\,m\rangle, \quad (m=1,0,-1). \tag{13}$$

In verità, gli elementi nondiagonali si annullano perché l'integrale radiale rilevante è nullo. Inoltre

$$\langle 3\,2\,m|H'|3\,2\,m\rangle = \langle 3\,2\,-m|H'|3\,2\,-m\rangle, \qquad \langle 3\,1\,m|H'|3\,1\,m\rangle = \langle 3\,1\,-m|H'|3\,1\,-m\rangle. \tag{14}$$

Le correzioni all'energia sono date, al primo ordine, semplicemente dagli elementi diagonali sopraelencati; il livello si divide in 6 sottolivelli.

iv) Visto che

$$\int \frac{dr}{r} R_{3,2} R_{3,0} = 0, \tag{15}$$

H' è diagonale in questa base. Le correzioni sono date semplicemente da:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,\pm 2)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r} R_{3,2}^2 \int Y_{2,2}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{2,2} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{32\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)(1-z^2)^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{32\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{32}{105} = \frac{4\,c}{2835\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\Delta E_{(3\,2\,\pm 1)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r} R_{3,2}^2 \int Y_{2,1}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{2,1} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)(1-z^2)z^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{15}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{4}{105}\right) = -\frac{2\,c}{2835\,r_B^3}.
\end{aligned} \tag{17}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{(320)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,2}^2\int Y_{2,0}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{2,0} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{5}{16\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)^3 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{405}\cdot\frac{5}{16\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{16}{35}\right) = -\frac{4c}{2835\, r_B^3}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{(31\pm1)} &= \frac{c}{r_B^3}\int \frac{dr}{r}R_{3,1}^2\int Y_{1,1}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{1,1} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)(1-z^2) \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{8\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{4}{15} = \frac{2c}{405\, r_B^3}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{(310)} &= c r_B^3\int dr r R_{3,1}^2\int Y_{1,0}^*(1-3\cos^2\theta)Y_{1,0} \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\int_0^1 dz(1-3z^2)z^2 \\
&= \frac{c}{r_B^3}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{3}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\left(-\frac{4}{15}\right) = -\frac{4c}{405\, r_B^3}.
\end{aligned} \tag{20}
$$

Lo stato $|3,0,0\rangle$ rimane imperturbato. Il livello $n=3$ si divide in sei sottolivelli.

Problema 2.

$$V' = \lambda x[e^{-i\omega t} + h.c.] \tag{21}$$

$$d\Phi = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m}{p}\,2\,dE = \frac{m}{\pi\hbar p}\,dE \equiv \rho(E)\,dE, \qquad \rho(E) = \frac{m}{\pi\hbar p}. \tag{22}$$

$$\psi_k(x) = e^{ikx}, \tag{23}$$

$$F_{fi} = \langle\psi_k|\lambda x|\psi_0\rangle = \lambda\sqrt{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x e^{-ikx}e^{-\kappa|x|} = \lambda\sqrt{\kappa}\frac{-4i\kappa k}{(\kappa^2+k^2)^2}\ ; \tag{24}$$

$$|F_{fi}|^2 = \frac{16\lambda^2 k^2\kappa^3}{(\kappa^2+k^2)^4} \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{2\pi}{\hbar}|F_{fi}|^2\cdot\frac{m}{\pi\hbar p}\Big|_{p=\sqrt{2m(E_0+\omega\hbar)}} \\
&= \frac{2m}{\hbar^3}\frac{16\lambda^2 k\kappa^3}{(\kappa^2+k^2)^4}, \qquad k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E_0+\omega\hbar)}}{\hbar}\ .
\end{aligned} \tag{26}
$$

Le funzioni d'onda $\psi_f(x) = \exp \pm ikx$ non sono corrette in quanto non sono ortogonali allo stato legato (o più semplicemente, non soddisfano l'equazione di Schrödinger attorno a $x = 0$.) È necessario costruire la corretta funzione d'onda nel continuo, che ha forma

$$\psi_{right} = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \quad x < 0, \qquad Be^{ikx}, \quad x > 0, \tag{27}$$

e analogamente per lo stato "leftmover". Si trovano

$$A = -\frac{1}{1 + ik/\kappa}, \qquad B = A + 1 = \frac{ik\kappa}{1 + ik/\kappa} \; . \tag{28}$$

Si possono verficare che nel caso di potenziale $\sim x^n$ con n intero dispari l'uso delle onde piane $e^{\pm ikx}$ danno il risultato esatto (al primo ordine); nel caso di potenziali pari (come nel caso di potenziale costante) il risultato è errato, per termini dell'ordine di κ^2/k^2 a $k \gg \kappa$.