Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
2 marzo 2011 (A.A. 10/11)

Tempo a disposizione: 3 ore e mezzo

Problema 1.

Una particella di massa m e con carica elettrica q si muove in una dimensione, sottoposta ad un campo elettrico uniforme e costante $\mathcal{E}$. Scrivere l'equazione di Schrödinger (indipendente dal tempo), e risolverla nella rappresentazione dell'impulso, i.e., per la funzione d'onda $\tilde{\psi}(p)$.

Problema 2.

Un fascio di atomi con spin $\frac{1}{2}$, carica q e con il momento magnetico $\vec{\mu} = \left|\frac{qg}{2mc}\right| \mathbf{s}$, viene fatto attraversare un apparato à la Stern-Gerlach, con il campo magnetico (inomogeneo) nella direzione (Fig.1)

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta).$$

Come è noto, il fascio si divide in due sottofasci a e b.

(i) Le intensità relative tra i due fasci a e b risultano essere $1 : 1$ (che si può verificare, facendo incidere i due fasci su uno schermo fotografico, Fig. 2). Dire se si può concludere, avendo solo questi dati, se lo stato iniziale di spin degli atomi era puro o misto. Rispondete con un Sì (in questo caso, quale?) o un No.

(ii) In un caso o nell'altro (puro o misto), trovare una descrizione possibile dello stato iniziale (o con una funzione d'onda di spin nel caso puro, o con una matrice densità nel caso misto), *compatibile* con i dati sperimentali.

(iii) Viene tolto lo schermo di cui al punto (i) e con un blocco posto davanti al fascio b viene estratto il fascio a che corrisponde allo spin "up" nella direzione di $\mathbf{n}$, Fig. 1. Descrivere lo stato di questi atomi, i.e., trovare la funzione d'onda di spin, $\psi_{\mathbf{n}}$, tale che $\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}\,\psi_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2}\psi_{\mathbf{n}}$.

(iv) Trovare gli angoli di Eulero α, β, γ opportuni per ruotare gli assi delle coordinate di modo che il nuovo asse z positivo coincide con la direzione del versore $\mathbf{n}$.

(v) Calcolare la matrice di rotazione R,

$$R = e^{is_z\gamma}\, e^{is_y\beta}\, e^{is_z\alpha}\,, \tag{1}$$

e di conseguenza determinare

$$R\,|\psi_{\mathbf{n}}\rangle\ . \tag{2}$$

Discutere il risultato.

Problema 3.

Un nucleo in uno stato eccitato di energia E_1, compie una transizione elettromagnetica e decade allo stato fondamentale, E_0, emettendo un fotone. Sia M la massa del nucleo. Se il nucleo fosse infinitamente massivo ($M = \infty$) il fotone emesso avrebbe l'energia e l'impulso

$$E_\gamma = h\nu = E_1 - E_0 = F \; ; \qquad p_\gamma = E_\gamma / c \; . \tag{3}$$

(i) A causa della massa finita ($M < \infty$), il nucleo rinculerà al momento dell'emissione del fotone. Tenendo conto della conservazione dell'impulso e dell'energia, trovare l'energia del fotone E_γ emesso dal nucleo, a riposo.

(ii) Supponiamo, invece, che il nucleo (sempre nello stato interno eccitato E_1) sia legato ad un centro di forza di richiamo descritto dal potenziale armonico,

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \frac{M\Omega^2 \mathbf{r}^2}{2} \; , \tag{4}$$

e che si trovi nello stato fondamentale di (4). Dire quali sono i valori possibili dell'energia del fotone emesso nella transizione interna del nucleo. In particolare, qual'è il valore massimo possibile dell'energia del fotone?

(iii) Assumendo che lo stato del nucleo sia dato, immediatamente dopo l'emissione del fotone (nella direzione di $\hat{z}$), da

$$|\Psi\rangle = e^{-ip_\gamma z/\hbar} \, |0\rangle \; , \tag{5}$$

dove $|0\rangle$ indica lo stato fondamentale dell'oscillatore (4) e p_γ l'impulso del fotone, determinare le intensità relative per i vari valori dell'energia $h\nu = p_\gamma c$ del fotone emesso. In particolare qual'è la probabilità che il fotone emesso abbia l'energia massima di cui al punto (ii)? Discutere perché la formula (5) può essere una buona approssimazione per lo stato del nucleo immediatamente dopo l'emissione del fotone.

Nota: Nei punti (ii) e (iii), trascurate la piccola modifica della massa del nucleo, dovuta all'emissione del fotone.

Formulario

(i) La formula di Weyl,

$$e^X e^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]} \tag{6}$$

è valida per due operatori che hanno un commutatore $[X, Y]$ che è un operatore c-numero.

(ii) La relazione tra x, p e gli operatori di creazione e di annichilazione in un oscillatore unidimensionale:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p \; , \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\, p \; , \tag{7}$$

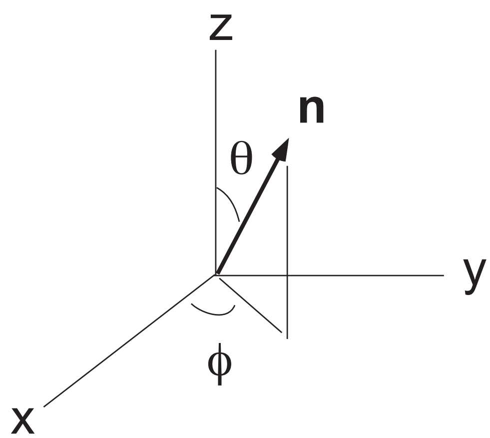

Figure 1:

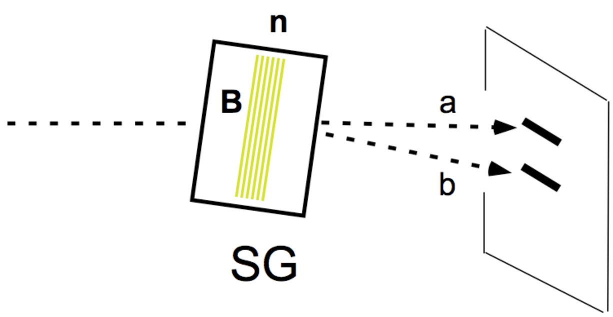

Figure 2:

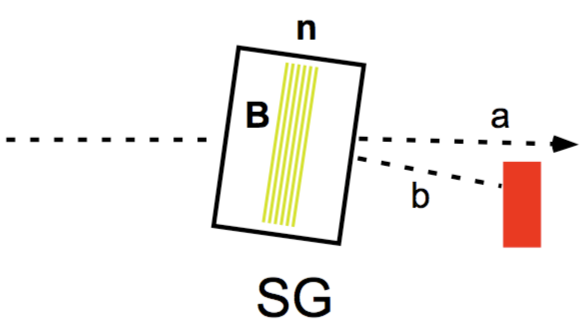

Figure 3:

SOLUZIONE

Problema 1.

Il potenziale è dato da $-q\mathcal{E}x$. L'Hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} - q\mathcal{E}\,x\;. \tag{8}$$

L'equazione di Schrödinger nella rappresentazione dell'impulso è ($\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}$)

$$H\tilde{\psi}(p) = E\,\tilde{\psi}(p), \qquad H = -iq\mathcal{E}\hbar\frac{\partial}{\partial p} + \frac{p^2}{2m}\;. \tag{9}$$

Risolvendo l'equazione

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{i\,p^2}{2mq\mathcal{E}\hbar} - \frac{iE}{q\mathcal{E}\hbar}\right)\tilde{\psi}(p) = 0, \tag{10}$$

si ha

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi q\mathcal{E}\hbar}}\,e^{-i\frac{p^3}{6mq\mathcal{E}\hbar}+i\frac{Ep}{q\mathcal{E}\hbar}} \tag{11}$$

dove è stata usata la normalizzazione,

$$\int dp\,\tilde{\psi}_E(p)^*\tilde{\psi}_{E'}(p) = \delta(E-E'). \tag{12}$$

Problema 2.

(i) No.

(ii) Uno stato puro che dà il detto risultato sperimentale è uno stato di spin in una direzione qualsiasi, nel piano perpendicolare a $\mathbf{n}$. Per esempio, si può prendere lo spin nella direzione $(\theta + \frac{\pi}{2}, \phi)$ (se $0 < \theta < \pi/2$)

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos[(\theta+\frac{\pi}{2})/2] \\ e^{i\phi/2}\sin[(\theta+\frac{\pi}{2})/2] \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}[\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}] \\ e^{i\phi/2}[\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}] \end{pmatrix} \tag{13}$$

Quando lo spinsi trova in $|\psi\rangle$, la probabilità di trovarlo "up" nella direzione di $\mathbf{n}$, i.e., nello stato

$$|\psi_{\mathbf{n}}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\;, \tag{14}$$

è infatti uguale a

$$|\langle\psi_{\mathbf{n}}|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}) + \sin\frac{\theta}{2}(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2})\right]^2 = \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Nel caso di uno stato misto, basta prendere lo stato non-polarizzato, con la matrice densità,

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

in questo caso la relativa intensità del fascio a è

$$\mathrm{Tr}\,[\,\rho\,|\psi_{\mathbf{n}}\rangle\langle\psi_{\mathbf{n}}|\,] = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left[\rho\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\,. \tag{17}$$

(iii)

$$|\psi_{\mathbf{n}}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{18}$$

(iv) Prendendo gli angoli di Eulero come (1) una rotazione attorno all'asse z, (2) una rotazione attorno al nuovo asse y, e successivamente (3) una rotazione attorno al nuovo asse z, gli angoli richiesti sono, in ordine,

$$\phi, \theta, \gamma. \tag{19}$$

Chiaramente una volta portato l'asse z nella direzione $\mathbf{n}$ con le due rotazioni ϕ, θ, l'ultima rotazione (attorno a $\mathbf{n}$) non cambia l'asse $\hat{z} = \mathbf{n}$, perciò il terzo angolo γ è indeterminato.

(v) Prendendo $\gamma = 0$, la matrice di rotazione è data da

$$\begin{aligned} R &= U_y(\theta)\,U_z(\phi) = e^{i\theta\sigma_y/2}e^{i\phi\sigma_z/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{20}$$

quindi

$$R\,|\psi_{\mathbf{n}}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{21}$$

Discussione: Il risultato è quello che ci si aspettava poiché nel nuovo sistema di coordinate $\mathbf{n}$ corrisponde all'asse z e lo spin è nell'autostato di $\sigma \cdot \mathbf{n}$. Un'ulteriore rotazione di angolo γ semplicemente modifica la fase inosservabile della funzione d'onda.

Problema 3.

(i) Un fotone di energia $E_\gamma = p_\gamma c = h\nu$ porta l'impulso $p_\gamma = h\nu/c = h/\lambda$. La conservazione dell'impulso e dell'energia dà

$$F = \frac{p_\gamma^2}{2M} + p_\gamma c, \tag{22}$$

dove abbiamo posto che $P_{Nucleo} = -p_\gamma$. Risolvendo per p_γ, si ha

$$p_\gamma = -Mc + \sqrt{M^2c^2 + 2MF}, \tag{23}$$

$$E_\gamma = p_\gamma c = -Mc^2 + \sqrt{M^2c^4 + 2Mc^2F} \simeq F - \frac{F^2}{2Mc^2} + \ldots. \tag{24}$$

Per dimostrare che $E_\gamma < F$, (scrivendo $c = 1$)

$$F - E_\gamma = F + M - M(1 + \frac{2F}{M})^{1/2}. \tag{25}$$

Visto che

$$(F+M)^2 - [M(1+\frac{2F}{M})^{1/2}]^2 = F^2 > 0, \tag{26}$$

segue che

$$E_\gamma < F, \tag{27}$$

come ci si aspetta dovuto all'effetto del rinculo.

(ii) In questo caso, il nucleo è legato ad un potenziale; l'impulso non si conserva. La conservazione dell'energia continua ad essere valida, ma visto che le energie del nucleo possibili sono

$$\Omega\hbar N, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots, \tag{28}$$

rispetto allo stato iniziale, lo spettro dell'energia del fotone è discreto; esso può avere

$$E_\gamma^{(N)} = F - \Omega\hbar N, \qquad N = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{F}{\Omega\hbar}\right] . \tag{29}$$

l'energia massima che il fotone può avere è esattamente F, in questo caso senza l'effetto del rinculo.

(iii)

$$z = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}\,(a + a^\dagger), \tag{30}$$

perciò

$$e^{ip_\gamma z/\hbar} = \exp\frac{i\,p_\gamma}{\sqrt{2M\Omega\hbar}}\,(a+a^\dagger) = e^{X+Y} = e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}\,e^X e^Y \tag{31}$$

Nell'applicare la formula di Weyl, conviene portare a a destra, poiché si vuole calcolare la probabilità,

$$P_{E_\gamma}^{(N)} = |\langle N|e^{ip_\gamma z/\hbar}|0\rangle|^2 . \tag{32}$$

Identificando

$$X = C\,a^\dagger, \qquad Y = C\,a, \qquad C \equiv \frac{i\,p_\gamma}{\sqrt{2M\Omega\hbar}} \tag{33}$$

si ha

$$\frac{1}{2}[X,Y] = \frac{p_\gamma^2}{4M\Omega\hbar}, \tag{34}$$

quindi

$$e^{ip_\gamma z/\hbar} = e^{X+Y} = e^{-\frac{1}{2}[X,Y]}\,e^X e^Y = e^{-\frac{p_\gamma^2}{4M\Omega\hbar}}\,e^{C\,a^\dagger}\,e^{C\,a}. \tag{35}$$

La probabilità per vari valori di $E_\gamma^{(N)}$ è allora

$$P_{E_\gamma}^{(N)} = e^{-\frac{p_\gamma^2}{2M\Omega\hbar}}\,|\langle N|e^{C\,a^\dagger}e^{C\,a}|0\rangle|^2 = e^{-\frac{p_\gamma^2}{2M\Omega\hbar}}\,|\langle N|e^{C\,a^\dagger}|0\rangle|^2 = e^{-\frac{p_\gamma^2}{2M\Omega\hbar}}\,\frac{|C|^{2N}}{N!} \tag{36}$$

dove

$$|C|^2 = \frac{p_\gamma^2}{2M\Omega\hbar}, \qquad p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{F-\Omega\hbar N}{c} \tag{37}$$

Visto che p_γ e C dipendono da N la distribuzione (36) non è Poissoniana. La probabilità di emissione senza il rinculo ($E_\gamma = E_\gamma^{(0)} = F$) è allora

$$P = e^{-\frac{p_\gamma^2}{2M\Omega\hbar}} = e^{-\frac{F^2}{2Mc^2\Omega\hbar}} . \tag{38}$$

Per quanto riguarda l'ultima domanda, se la funzione d'onda dello stato iniziale (in questo caso, $|0\rangle$) è descritto da una funzione d'onda $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$ nella rappresentazione dell'impulso, lo stato $e^{-ip_\gamma z/\hbar}\,|0\rangle$ è semplicemente lo stato spostato in p_z,

$$e^{-ip_\gamma z/\hbar}|_{z=i\hbar\partial/\partial p}\,\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \tilde{\psi}(p_x, p_y, p_z + p_\gamma)\ . \tag{39}$$

Questo corrisponde al nucleo che ha ricevuto l'impulso, $(0, 0, -p_\gamma)$, appunto, un effetto del rinculo.

Oppure, se lo stato iniziale è descritto nella rappresentazione solita (delle coordinate) come sovrapposizione delle onde piane

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \int d^3p\,\tilde{\psi}(\mathbf{p})\,e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}, \tag{40}$$

$$e^{-ip_\gamma z/\hbar}\psi_0(\mathbf{r}) = \int d^3p\,\tilde{\psi}(\mathbf{p})\,e^{i[p_x x + p_y y + (p_z - p_\gamma)z]\hbar}\ . \tag{41}$$

Quindi si vede che ogni componente dell'impulso si sposta di $(0, 0, -p_\gamma)$.