Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N
Università degli Studi di Pisa
3 luglio 2007 (A.A. 06/07)

(*tre ore a disposizione*)

Problema 1.

Un sistema a due livelli, è dotato di spin $\frac{1}{2}$. Uno stato generico è espresso come combinazione lineare dei quattro stati indipendenti,

$$\psi = \sum c_{n,s_z} |n, s_z\rangle, \qquad n = 0, 1, \quad s_z = \pm\frac{1}{2}, \tag{1}$$

mentre l'Hamiltoniana è data da

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_1 \end{pmatrix}, \qquad E_0 < E_1, \tag{2}$$

dove l'operatore $\mathbb{1}$ agisce sullo spin. Nella seconda espressione l'Hamiltoniana è scritta come matrice 4×4 che agisce su

$$\begin{pmatrix} |0,\uparrow\rangle \\ |0,\downarrow\rangle \\ |1,\uparrow\rangle \\ |1,\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

All'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\,2\,|\,0\uparrow\rangle + |\,1\downarrow\rangle). \tag{3}$$

(i) Calcolare la probabilità dei possibili risultati della misura di s_x, e in corrispondenza ad ogni risultato, scrivere lo stato del sistema dopo la misura. (*5 punti*)

(ii) Esistono osservabili il cui valore medio sullo stato $\psi(t)$ dipende dal tempo? In caso di risposta negativa darne giustificazione; nel caso affermativo dare un esempio. (*5 punti*)

(iii) Determinare lo spettro dell'energia quando l'Hamiltoniana è data da

$$H + H', \qquad H' = \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes s_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove H è l'operatore della (2) e λ è reale. (*5 punti*)

Problema 2.

Un nucleo (A) di spin-parità $\frac{3}{2}^+$ in un autostato di S_z, decade a riposo in due nuclei B (di spin $\frac{1}{2}$) e C (di spin 0). Il momento angolare totale è conservato nel decadimento.

(i) Dire quali sono i possibili valori del momento angolare orbitale, ℓ. (*4 punti*)

(ii) Se in più sappiamo che le parità intrinseche di B e C sono +1 per ambedue, quale tra i valori di ℓ è possibile? (*4 punti*)

(iii) La misura della distribuzione angolare del nucleo B ha dato un risultato consistente con

$$\propto \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi. \tag{4}$$

Scrivendo questa distribuzione come

$$\sum_m a_m \, |Y_{\ell,m}(\theta, \phi)|^2 \, \sin\theta \, d\theta d\phi \tag{5}$$

determinare i coefficienti a_m per vari m ($m \geq 0$) dove ℓ si riferisce al valore di cui al punto (ii). (*4 punti*)

(iv) Dal risultato del punto iii) determinare l'autovalore S_z (o gli autovalori possibili) dello stato iniziale del nucleo A. (*3 punti*)

Soluzione

Problema 1.

i) Indicando gli autostati di s_x con autovalori $\pm\frac{1}{2}$, con $|\rightarrow\rangle$, $|\leftarrow\rangle$, si ha la relazione

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle); \qquad |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle). \tag{6}$$

Lo stato a $t = 0$ è dunque,

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{10}}[\,2\,(|0,\rightarrow\rangle + |0,\leftarrow\rangle) + (|1,\rightarrow\rangle - |1,\leftarrow\rangle)]. \tag{7}$$

La misura di s_x dà i risultati $\pm\frac{1}{2}$, con relative probabilità,

$$||\frac{1}{\sqrt{10}}[\,2\,|0,\rightarrow\rangle + |1,\rightarrow\rangle]\,||^2 = \frac{1}{2}, \qquad ||\frac{1}{\sqrt{10}}[\,2\,|0,\rightarrow\rangle - |1,\rightarrow\rangle]\,||^2 = \frac{1}{2} \tag{8}$$

e nei due casi, lascia lo stato nell'autostato corrispondente,

$$\psi_{s_x=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}[\,2\,|0,\rightarrow\rangle + |1,\rightarrow\rangle] = \frac{1}{\sqrt{10}}[\,2\,|0,\uparrow\rangle + 2\,|0,\downarrow\rangle + |1,\uparrow\rangle + |1,\downarrow\rangle], \tag{9}$$

oppure

$$\psi_{s_x=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}[\,2\,|0,\leftarrow\rangle - |1,\leftarrow\rangle] = \frac{1}{\sqrt{10}}[\,2\,|0,\uparrow\rangle - 2\,|0,\downarrow\rangle - |1,\uparrow\rangle + |1,\downarrow\rangle]. \tag{10}$$

ii) La funzione d'onda a tempo t è:

$$\psi(t) = \frac{e^{-iE_0t/\hbar}}{\sqrt{5}}(2|\,0\uparrow\rangle + e^{-i\omega t}|\,1\downarrow\rangle), \qquad \omega = \frac{E_1 - E_0}{\hbar}. \tag{11}$$

Per avere una dipendenza non banale di $\langle\psi(t)|O|\psi(t)\rangle$ da t, basta che l'operatore O abbia un elemento non diagonale non nullo sia nello spazio di energia che nello spin, per es.

$$O = C\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes s_x, \qquad \langle\psi(t)|O|\psi(t)\rangle = \frac{4C}{5}\cos\omega t. \tag{12}$$

iii)

$$H + H' = \begin{pmatrix} E_0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & E_0 & \frac{\lambda}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{2} & E_1 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 0 & 0 & E_1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Per trovare lo spettro, basta diagonalizzare la sottomatrice (1 4) (oppure (2 3)):

$$H_{14} = \begin{pmatrix} E_0 & \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\lambda}{2} & E_1 \end{pmatrix} \ . \tag{14}$$

Diagonalizzandola si ottengono gli autovalori

$$\frac{1}{2}[\, E_1 + E_0 \pm \sqrt{(E_1 - E_0)^2 + \lambda^2}\,] \ . \tag{15}$$

La diagonalizzazione della sottomatrice (2 3) dà lo stesso risultato. Ognuno dei due livelli è doppiamente degenere.

Problema 2.

i)

$S_{tot} = \frac{1}{2}$, per cui $\ell = 1$ o $\ell = 2$.

ii)

$\ell = 2$.

iii) Visto che

$$\begin{aligned}
&Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
&Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1), \\
&Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \quad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\cos\theta\,\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \\
&Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi},
\end{aligned} \tag{16}$$

la condizione è

$$\frac{a_0}{6}(1 - 3\cos^2\theta)^2 + a_1\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{a_2}{4}\sin^4\theta = \sin^2\theta. \tag{17}$$

Per determinare a_i basta considerare alcuni valori di θ, per es., $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi/4$, che danno

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 4. \tag{18}$$

Chiaramente i coefficienti

$$a_0 = 0, \quad a_{-1} = 1, \quad a_{-2} = 4. \tag{19}$$

danno la stessa distribuzione.

iv) Se $S_z = \frac{3}{2}$, lo stato finale è

$$\psi = \sqrt{\frac{4}{5}} Y_{2,2} |\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{5}} Y_{2,1} |\uparrow\rangle; \tag{20}$$

mentre la funzione d'onda è

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{5}} Y_{2,1} |\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}} Y_{2,0} |\uparrow\rangle; \tag{21}$$

nel caso $S_z = \frac{1}{2}$. La distribuzione angolare è, nei rispettivi casi,

$$\propto \; 4|Y_{2,2}|^2 + |Y_{2,1}|^2, \qquad S_z = \frac{3}{2} \tag{22}$$

$$\propto \; 3|Y_{2,1}|^2 + 2|Y_{2,0}|^2, \qquad S_z = \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Dal risultato di iii) si trova

$$S_z = \pm\frac{3}{2}. \tag{24}$$