Meccanica Quantistica - a.a. 2012/2013

Prova scritta - 05.09.2013

MQI: risolvere il Problema 1 e il Problema 2, 1)-3);
MQII: risolvere, a scelta, o il Problema 1 e il Problema 2, o il Problema 3;
Corso annuale MQ: risolvere, a scelta, o Problemi 1 e 2, oppure, Problemi 1 e 3.

Tempo disponibile: 3 ore

Problema 1

Una particella di massa m si muove in una dimensione, sottoposta ad un potenziale delta (barriera o buca secondo il segno di g),

$$V(y) = g\,\delta(y)\,. \tag{1}$$

Determinare le probabilità che la particella, incidente da $y = -\infty$ con impulso $p = k\hbar$, attraversi la zona del - o venga riflessa dal - potenziale.

Problema 2

Il neutrone è una partiella con carica nulla, spin $1/2$, massa m e momento magnetico $\mu_n = -1.913\,\mu$, dove μ è il magnetone nucleare, $\mu \equiv |e|\hbar/2m_p c$.

1) Si scriva l'equazione di Schrödinger per un neutrone in campo magnetico **B**.

2) Un fascio di neutroni con impulso $p = k\hbar$ si muove lungo l'asse y, i neutroni incidenti sono polarizzati completamente lungo l'asse x. Nel moto il fascio passa attraverso una sottile zona in cui è presente un campo magnetico, che per semplicità è schematizzato come un campo lungo l'asse z, ortogonale al fascio, della forma

$$\mathbf{B} = (0,0,B), \qquad B = b\,\delta(y)\,.$$

Si risolva l'equazione di Schrödinger stazionaria e si calcoli la probabilità P di "spin flip, o più precisamente la probabilità di osservare neutroni a $y > 0$ con polarizzazione -1 lungo l'asse x. Si ricordi che la probabilità in questione è definita come il flusso di particelle che hanno passato la barriera con lo spin s_x invertito diviso per il flusso incidente.

Nei calcoli si ponga per brevità $1.913\,\mu\, b = \frac{\hbar^2}{2m}\beta$.

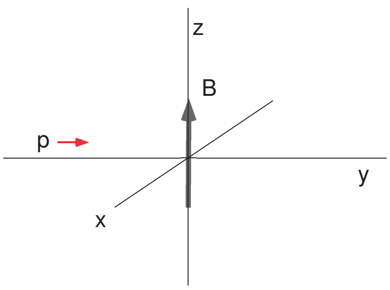

Figura 1:

3) Si calcoli la probabilità che un neutrone venga riflesso, indipendentemente dallo stato finale di spin.

4) Per velocità abbastanza grandi possiamo considerare la traiettoria del neutrone come rettilinea, con velocità, $v = p/m$. In questa approssimazione si formuli il problema dello spin flip in termini di un'Hamiltoniana time-dipendente per la variabile di spin soltanto, i.e., trattando il moto in direzione $\hat{y}$ in maniera classica,

$$y(t) = vt, \tag{2}$$

e si calcoli la probabilità di inversione di spin. Paragonare il risultato con quanto ottenuto nel punto 2.

Problema 3

Nel caso di atomo di idrogeno le interazioni iperfini sono descritte dall'Hamiltoniana,

$$V = A\left\{\frac{8\pi}{3}\mathbf{I}\cdot\mathbf{S}\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}) - [\mathbf{I}\cdot\mathbf{S} - 3(\mathbf{I}\cdot\hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S})]\,\frac{1}{r^3} + \frac{\mathbf{I}\cdot\mathbf{L}}{r^3}\right\},$$

dove

$$A = -\frac{e\hbar}{2mc}\mu_p g g_p \equiv |\mu_B|\,\mu_p g g_p > 0\,; \quad \ell = \hbar\mathbf{L}\,; \quad \mathbf{s} = \hbar\mathbf{S}\,; \quad \mathbf{s}_N = \hbar\mathbf{I}\,;$$

$g \simeq 2.002$, $g_p \simeq 5.586$ sono i fattori giromagnetici dell'elettrone e del protone, μ_B e μ_p sono il magnetone di Bohr e il magnetone nucleare, ℓ, $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_N$ sono il momento angolare orbitale, lo spin dell'elettrone, e lo spin del nucleo (il protone), rispettivamente.

(i) Discutere l'origine fisica di tale interazione.

(ii) Determinare lo splitting dello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno, ΔE, in teoria delle perturbazioni al primo ordine in V

(iii) Calcolare ΔE in termini di α e in unità di 1 a.u. $= \frac{e^2}{r_B}$.

(iv) Discutere l'ordine di grandezza di tale correzione, paragondolo con il generico ordine di grandezza delle correzioni di tipo struttura-fine (spin-orbita).

Potete usare, se è necessario,

$$\psi_{100} = R_{1,0}(r)Y_{0,0}, \qquad R_{1,0}(r) = 2\,a^{-3/2}\,e^{-r/a},$$

$$a = r_B\,(1 + \frac{m_e}{m_P}),$$

r_B è il raggio di Bohr.

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = 7.297\,10^{-3}, \qquad \frac{m_e}{m_p} \simeq 5.446\,10^{-4},$$

Soluzioni

Problema 1

Ponendo

$$\psi = e^{iky} + R e^{-iky}, \quad y < 0, \qquad \psi = T\, e^{iky}, \quad y > 0, \tag{3}$$

e imponendo le condizione di raccordo,

$$1 + R = T\,; \qquad \frac{\hbar^2}{2m} i\,k(T - (1 - R)) = g\,T \tag{4}$$

si hanno

$$T = \frac{1}{1 + \frac{img}{k\hbar^2}}, \qquad R = -\frac{\frac{img}{k\hbar^2}}{1 + \frac{img}{k\hbar^2}}\ . \tag{5}$$

Le probabilità di trasmissione e di riflessione sono:

$$P_T = \frac{1}{1 + \alpha^2}, \qquad P_R = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}, \tag{6}$$

dove

$$\alpha \equiv \frac{mg}{k\hbar^2}. \tag{7}$$

Problema 2

1)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - \mu_n \sigma \cdot \mathbf{B} = E\psi \tag{8}$$

2) L'interazione di spin è diagonale se quantizziamo lungo l'asse z e in questa notazione si ha, per spinori $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$, una Hamiltoniana di interazione

$$H_I = \pm\frac{\hbar^2}{2m}\beta\,\delta(y)$$

quindi la soluzione del problema di Schrödinger è l'usuale soluzione in presenza di un potenziale a δ, trovata al Problema 1. Per lo spinore $|\uparrow\rangle$ le condizioni di raccordo sono

$$1 + R = T\,; \qquad \frac{\hbar^2}{2m} i\,k(T - (1 - R)) = \frac{\hbar^2}{2m}\beta T$$

con soluzione

$$T = \frac{1}{1 + i\frac{\beta}{2k}}\,; \qquad R = -\frac{i\frac{\beta}{2k}}{1 + i\frac{\beta}{2k}} \tag{9}$$

Per la seconda polarizzazione basta cambiare il segno di β, quindi

$$T_{\uparrow,\downarrow} = \frac{1}{1 \pm i\frac{\beta}{2k}}\,; \qquad R_{\pm} = \mp\frac{i\frac{\beta}{2k}}{1 \pm i\frac{\beta}{2k}} \tag{10}$$

Un fascio di neutroni polarizzato longitudinalmente lungo $\hat{x}$ è descritto dalla funzione d'onda

$$e^{iky}|+x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} e^{iky} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)\, e^{iky}, \tag{11}$$

$|\pm x\rangle$ indicano gli spinori polarizzati lungo x. Dopo la zona di campo la funzione d'onda è

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} T_\uparrow \\ T_\downarrow \end{pmatrix} e^{ikx} = \left(\frac{T_\uparrow + T_\downarrow}{2} |+x\rangle + \frac{T_\uparrow - T_\downarrow}{2} |-x\rangle \right) e^{ikx} \tag{12}$$

Confrontando con il flusso incidente le ampiezze e le probabilità di spin-flip ($\mathcal{A}_-, \mathcal{T}_-$) e non spin-flip ($\mathcal{A}_+, \mathcal{T}_+$) sono rispettivamente

$$\mathcal{A}_- = \frac{T_\uparrow - T_\downarrow}{2} = -i \frac{\frac{\beta}{2k}}{1 + \frac{\beta^2}{4k^2}}; \qquad \mathcal{T}_- = |\mathcal{A}_-|^2 = \frac{\beta^2}{4k^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{4k^2} \right)^{-2} \tag{13a}$$

$$\mathcal{A}_+ = \frac{T_\uparrow + T_\downarrow}{2} = -i \frac{1}{1 + \frac{\beta^2}{4k^2}}; \qquad \mathcal{T}_+ = |\mathcal{A}_+|^2 = \left(1 + \frac{\beta^2}{4k^2} \right)^{-2} \tag{13b}$$

3) Con lo stesso ragionamento l'onda riflessa è

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} R_\uparrow \\ R_\downarrow \end{pmatrix} e^{iky} = \left(\frac{R_\uparrow + R_\downarrow}{2} |+x\rangle + \frac{R_\uparrow - R_\downarrow}{2} |-x\rangle \right) e^{iky} \tag{14}$$

e le corrispondenti probabilità sono

$$\mathcal{R}_- = \left| \frac{R_\uparrow - R_\downarrow}{2} \right|^2 = \frac{\beta^2}{4k^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{4k^2} \right)^{-2} \tag{15a}$$

$$\mathcal{R}_+ = \left| \frac{R_\uparrow + R_\downarrow}{2} \right|^2 = \left(\frac{\beta^2}{4k^2} \right)^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{4k^2} \right)^{-2} \tag{15b}$$

La probabilità di riflessione, indipendentemente dallo spin, è

$$\mathcal{R}_+ + \mathcal{R}_- = \frac{\beta^2}{4k^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{4k^2} \right)^{-1}$$

Notiamo che, come deve essere, si ha:

$$\mathcal{T}_+ + \mathcal{T}_- + \mathcal{R}_+ + \mathcal{R}_- = 1$$

4) Per velocità abbastanza grandi possiamo trascurare la riflessione ed assumere per la particella la triettoria classica, $x = vt$. In questa approssimazione lo spin è sottoposto ad una Hamiltoniana dipendente dal tempo

$$V(t) = -\mu_n b \delta(vt) \sigma_z \equiv \frac{\hbar^2}{2m} \beta \delta(vt) \sigma_z$$

Siccome prima e dopo la barriera non c'è campo magnetico, l'ampiezza di transizione si può scrivere

$$a_f = \frac{-i}{\hbar} \int \frac{\hbar^2}{2m} \beta \delta(vt) dt \langle -x|\sigma_z|+x\rangle = -i \frac{\hbar}{2mv} \beta = -i \frac{\beta}{2k}$$

quindi la probabilità di inversione è

$$P = \frac{\beta^2}{4k^2}$$

che coincide con lo sviluppo a grandi velocità di $\mathcal{T}_-$.

Problema 3

(i) Le interazioni sono causate dai momenti magnetici del nucleo e dell'elettrone, le interazioni dipolo-dipolo, i.e., l'energia del momento magnetico dell'elettrone nel campo magnetico del nucleo, o vice versa.

(ii) Le correzioni all'energia $E^{(1)}$ sono date dagli autovalori di V nello stato fondamentale, quattro volte degenere per gli spin dell'elettrone e del nucleo. Visto che $\ell = 0$ l'ultimo termine non contribuisce. Per q riguarda il secondo termine, visto che

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{S} - 3(\mathbf{I}\cdot\hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}) = I_i S_j\,(\delta_{ij} - 3\hat{r}_i\hat{r}_j)\ , \tag{16}$$

esso è un tensonre sferico di rango 2, non contribuisce neppure, per via del teorema di Wigner-Eckart. Contribuisce solo il primo termine che è diagonale nella base di spin totale

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{S}\ . \tag{17}$$

F prende i valori $F = 1$ (tripletto di spin) o $F = 0$ (singoletto). Poiché

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^2 - \mathbf{I}^2 - \mathbf{S}^2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & F = 1, \\ -\frac{3}{4} & F = 0 \end{cases}, \tag{18}$$

la differenza dell'energia negli stati di tripletto e di singoletto è

$$\Delta E = A\frac{8\pi}{3}|\psi_{1,0,0}(0)|^2 = \left[\frac{2}{3}gg_p(1+\frac{m_e}{m_p})^{-3}\right]\frac{m_e}{m_p}\,\alpha^2\,\frac{e^2}{r_B}. \tag{19}$$

Numericamente il risultato è, in unità di $Ry = e^2/2r_B$,

$$\Delta E = \left[\frac{4}{3}gg_p(1+\frac{m_e}{m_p})^{-3}\right]\frac{m_e}{m_p}\,\alpha^2\,\frac{e^2}{2r_B} \simeq 0.00811\,\alpha^2\,\frac{e^2}{2r_B} \simeq 4.317\,10^{-7}\,\frac{e^2}{2r_B}\ . \tag{20}$$

La frequenza della transizione tra i due sottolivelli è

$$\Delta E/h \sim 1420\,\mathrm{MHz}. \tag{21}$$

(iv) Vediamo che il fattore dominante, rispetto alle correzioni spin-orbita, tipicamente dell'ordine di

$$\sim \alpha^2\,\frac{e^2}{r_B} \tag{22}$$

è il rapporto

$$\frac{m_e}{m_p} \sim O(10^{-3}). \tag{23}$$