

# Meccanica Quantistica

07 settembre 2016 (A.A. 15/16)

Tempo a disposizione: 3 ore

## Problema

Il deutone può essere considerato, in prima approssimazione, come un (unico) sistema legato  $p - n$  in una buca di potenziale in onda  $S$ . Sia  $-\epsilon$  l'energia di legame. Supporremo nel seguito che il raggio d'azione della forza  $p - n$  sia molto piccolo, e che di conseguenza la funzione d'onda dello stato legato possa essere approssimata dalla sua forma all'esterno della buca di potenziale. Si assumano  $m_p = m_n = m$ .

- 1) Nell'approssimazione detta sopra si scriva la funzione d'onda normalizzata dello stato legato di deutone,  $\psi_0(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_n$ .

Il protone della coppia  $p - n$  riceve per urto un impulso  $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}$  (Fig. 1). L'urto è considerato istantaneo.

- 2) Considerando un operatore  $T_{\mathbf{p}_0}$  che, agendo su un qualsiasi sistema, trasla l'impulso di  $\mathbf{p}_0$ , si scriva la funzione d'onda del deutone immediatamente dopo l'urto.<sup>1</sup>
- 3) Qual è la probabilità di disintegrazione del deutone in questo processo? Discutere i limiti  $|\mathbf{p}_0| \rightarrow 0$  e  $|\mathbf{p}_0| \rightarrow \infty$  della detta probabilità e commentare i risultati.

Sopra abbiamo considerato il deutone approssimativamente come uno stato in onda  $S$ , i.e., con  $L = 0$ .

- 4) Dimostrare che se la funzione d'onda fosse esattamente uno stato con  $L = 0$ , i.e.,  $\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(r)$ , il quadrupolo elettrico del deutone dovrebbe essere nullo:

$$\langle Q \rangle = 0. \quad (1)$$

- 5) In realtà il deutone possiede un quadrupolo elettrico non nullo

$$Q \simeq 0.0027410^{-24} \text{ cm}^2. \quad (2)$$

Questo significa che il potenziale tra il protone e il neutrone non può essere né puramente a simmetria centrale  $V = V_0(r)$ , né un potenziale spin-dipendente della forma,  $V = V_1(r)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + 1)$ . Scrivere la forma più semplice di un potenziale aggiuntivo che potrebbe spiegare il valore non nullo osservato per  $Q$ , eq.(2).

**Nota:** nel calcolo della probabilità al punto 3) potete utilizzare la formula,

$$\int_0^\infty d^3r \frac{e^{-2\alpha r}}{r^2} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} = \frac{4\pi}{q} \left( \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2\alpha}{q} \right). \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>**N.B.**  $T$  agisce solo sul protone. È necessario tenere conto, oltre alla funzione d'onda del moto relativo  $\psi(\mathbf{r})$ , anche della funzione d'onda del C.M. del deutone,  $\Phi(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_p + \mathbf{r}_n}{2}$ , per trovare l'effetto dell'urto su  $\psi(\mathbf{r})$ .

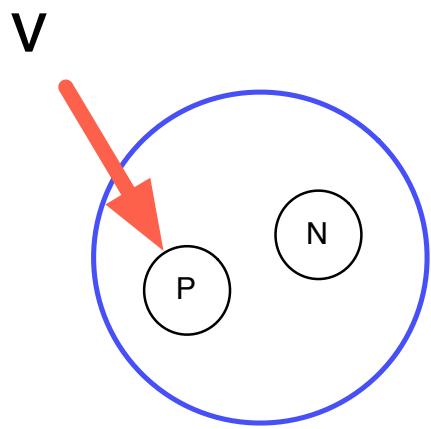


Figura 1: Deutone

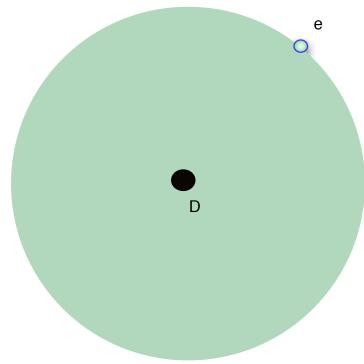


Figura 2: Deuterio

## Soluzione

### Problema

- 1) Per una stato legato in onda  $S$  la funzione d'onda asintotica è, con le notazioni del testo:

$$\psi(x) = A \frac{1}{r} e^{-\alpha r}; \quad \alpha = \sqrt{2\mu\varepsilon/\hbar}$$

$\mu$  è la massa ridotta del sistema. La condizione di normalizzazione impone

$$4\pi A^2 \frac{1}{2\alpha} = 1 \quad (4)$$

- 2) L'operatore che trasla l'impulso di una quantità  $p_1$  è

$$T(p_1) = e^{ip_1 x/\hbar},$$

in analogia con il noto operatore che trasla la posizione  $x$  di  $x_0$ ,

$$\hat{T}(x_0) = e^{-i\hat{p}x_0/\hbar}.$$

La cosa si verifica immediatamente in rappresentazione degli impulsi:

$$e^{ip_1 x/\hbar} \varphi(p) = \exp(-p_1 \frac{\partial}{\partial p}) \varphi(p) = \varphi(p - p_1) \quad (5)$$

Ad esempio se  $\varphi$  è una funzione piccata attorno al valore nullo del suo argomento, lo stato trasformato descrive uno stato con impulso centrato attorno a  $p_1$ .

Oppure, più banalmente, lavorando nella rappresentazione delle coordinate, l'operatore  $T(p_1) = e^{ip_1 x/\hbar}$ , agendo su un autostato dell'impulso con autovalore  $\mathbf{p}$ ,

$$e^{ipx/\hbar}$$

dà luogo ad uno stato

$$e^{ipx/\hbar} \rightarrow T(p_1) e^{ipx/\hbar} = e^{i(p+p_1)x/\hbar},$$

che è un autostato dell'impulso con autovalore  $p + p_1$  !

In generale, una qualsiasi funzione d'onda può essere espressa come combinazione lineare di onde piane (autostati dell'impulso); ogni componente in  $\mathbf{p}$  riceve il suddetto spostamento. Cioè

$$\psi(\mathbf{r}) = \int d^3 p \varphi(p) e^{ipx/\hbar} \quad (6)$$

$$\rightarrow T(p_1)\psi(\mathbf{r}) = \int d^3 p \varphi(p) e^{i(p+p_1)x/\hbar} = \int d^3 p \varphi(p - p_1) e^{ipx/\hbar} \quad (7)$$

che riproduce la (5).

- 3) Lo stato iniziale del sistema è

$$\Psi(R, r) = \exp(iP \cdot R/\hbar) \psi(r) \quad (8)$$

Indichiamo con 1, 2 il protone ed il neutrone.  $R$  è la coordinata del centro di massa e  $P$  l'impulso del centro di massa (si suppongono uguali le masse delle due particelle)

$$\begin{aligned} R &= \frac{r_1 + r_2}{2}; & r &= r_1 - r_2 \\ r_1 &= R + \frac{1}{2}r; & r_2 &= R - \frac{1}{2}r \end{aligned}$$

Per quanto visto al punto 1 la funzione immediatamente dopo l'urto è approssimabile dalla forma

$$\Psi_f = e^{imvr_1/\hbar} e^{iPR/\hbar} \Psi(r) = e^{i(mv+P)R} e^{i\frac{m}{2}vr/\hbar} \Psi(r) \quad (9)$$

In totale il sistema ha acquisito un impulso  $mv$  quindi l'impulso finale dovrebbe essere

$$P_f = P + mv$$

e confrontando con l'espressione precedente si deduce che la funzione d'onda relativa dopo l'urto è

$$\Psi_f = \exp(iq \cdot r) \Psi(r), \quad q \equiv mv/2.$$

La probabilità che il deutone resti nello stato iniziale è:

$$P_0 = \left| \int d^3r \Psi^2(r) e^{iq \cdot r} \right|^2 = \left| \frac{\alpha}{2\pi} \left[ \frac{2\pi^2}{q} - \frac{4\pi}{q} \arctan\left(\frac{2\alpha}{q}\right) \right] \right|^2 \quad (10)$$

e la probabilità di disintegrazione è

$$1 - P_0$$

in quanto il solo stato legato è quello indicato sopra. Un modo alternativo di verificare l'affermazione è di scrivere le funzioni d'onda del continuo normalizzate in un volume  $V$ .

Nel limite  $p_0 \rightarrow 0$  non c'è trasferimento di impulso e quindi per consistenza deve essere  $P_0 \rightarrow 1$ , cioè non succede nulla. In effetti

$$\lim_{q \rightarrow 0} P_0 = \lim_{q \rightarrow 0} \left| \int \Psi^2(r) e^{iq \cdot r} \right|^2 = \left| \int \Psi^2(r) \right|^2 = 1$$

Come controllo possiamo verificare il limite sul risultato (10). Utilizzando

$$\arctan \frac{\beta}{q} \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{q}{\beta}, \quad q \simeq 0,$$

e la condizione di normalizzazione (4), il risultato (10) tende a

$$A^2 \frac{4\pi}{q} \frac{q}{2\alpha} = A^2 \frac{2\pi}{\alpha} = 1$$

Per  $p_0 \rightarrow \infty$ , l'impulso trasferito è grande rispetto all'impulso caratteristico dello stato legato ( $\hbar\alpha$ ) e quindi il protone si comporta come una particella libera: ricevendo un impulso si sposta, e non risente della presenza o meno del neutrone. Quindi in questo limite si deve avere  $P_0 \rightarrow 0$ . La cosa si verifica immediatamente dalla (10) effettuando il limite  $q \rightarrow \infty$ .

#### 4) L'operatore di quadrupolo

$$Q_{ij} = \int d^3x \rho(x) (3x_i x_j - x^2 \delta_{ij}) \quad (11)$$

è un tensore simmetrico a traccia nulla, quindi trasforma come un tensore di rango 2.  $\rho(x)$  è la densità di carica. La definizione (11) indica che l'operatore agisce solo sulle variabili spaziali. Quindi in particolare se  $L$  è un buon numero quantico trasforma come un tensore di rango 2 rispetto ad  $L$ .

Per il teorema di Wigner-Eckart il suo valor medio di un operatore di questo tipo su uno stato con  $L = 0$  è nullo.

- 5) Quanto detto sopra implica che i potenziali  $V_0, V_1$  indicati nel testo non possono generare uno stato che abbia un momento di quadrupolo. Usando le identità delle matrici di Pauli:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{1}{2} ((\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)^2 - 2) = 2S^2 - 1$$

quindi una combinazione di  $V_0, V_1$  assegna semplicemente un potenziale centrale diverso agli stati di singoletto e tripletto di spin, gli unici possibili visto che protone e neutrone hanno spin 1/2.

Per avere un termine di quadrupolo è necessario che  $L$  non commuti con l'Hamiltoniana. Il termine più semplice a disposizione è una interazione simile a quella di dipolo magnetico

$$V_3 = A(r)(3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})(3\sigma_i^{(1)} \sigma_j^{(2)} - (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) \delta_{ij})$$

che si può riscrivere anche come

$$V_3 = A(r) (3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}) - r^2(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)) .$$

Una ipotetica interazione lineare nelle coordinate (relative) del tipo

$$V_P = B(r)x \cdot (a\boldsymbol{\sigma}_1 + b\boldsymbol{\sigma}_2)$$

è vietata perchè viola la parità, mentre le interazioni forti conservano la parità.