Prova Scritta di Meccanica Quantistica

Università di Pisa
07 settembre 2017 (A.A. 16/17)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1.

Una particella è legata al potenziale delta unidimensiale, $V(x) = -g\,\delta(x)$, con [1]

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa}\, e^{-\kappa|x|} \,, \qquad \kappa = \frac{mg}{\hbar^2} \,; \qquad E_0 = -\frac{mg^2}{2\hbar^2} \,. \tag{1}$$

All'istante $t = 0$ si accende una perturbazione debole,

$$H' = 2\, f\, x \cos\omega t, \tag{2}$$

dove f è una costante.

(i) Calcolare la probabilità di ionizzazione per un intervallo unitario di tempo (il rate di transizione), in teoria delle perturbazioni al primo ordine. Approssimate lo stato finale con un'onda piana

$$\psi_f(x) = \exp ikx. \tag{3}$$

(ii) Con l'approssimazione (3) la probabilità di transizioni appare non nulla anche per un operatore banale,

$$H'' = g \cos\omega t \,, \tag{4}$$

dove g è un numero. Spiegare dove sta l'errore dell'argomento, e discutere come risolverlo.

Problema 2.

Un atomo di idrogeno

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

si trova in uno stato eccitato $n = 2$.

(i) All'inizio l'atomo è nello stato,

$$|J, J_z; L\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 1\rangle \,, \tag{5}$$

dove L è il momento angolare orbitale, J il momento angolare totale, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$. Scrivere la funzione d'onda completa (radiale, angolare, spin) dello stato. Qual'è la distribuzione angolare dell'elettrone (come funzione di θ, ϕ) a r fisso?

[1] Non è necessario riprodurre il risultato, (1).

(ii) Quale sarebbe la distribuzione angolare dell'elettrone nello stesso stato, se il contatore fosse in grado di vedere (registrare) solo l'elettrone con $s_x = +\frac{1}{2}$?

All'istante $t = 0$ si accende un campo magnetico esterno, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, B è costante. L'Hamiltoniana è data da:

$$H^{(t>0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} - \frac{e\hbar}{2mc}(\mathbf{L} + 2\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} .$$

(iii) Scrivere la funzione d'onda all'istante t ($t > 0$). Studiare come lo stato (5) evolve nel tempo. Determinare la distribuzione angolare dell'elettrone all'istante t, utilizzando il contatore di cui al punto (iii) (che registra soltanto l'elettrone con $s_x = +1/2$).

Formulario

$$dW_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|F_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i - \omega\hbar)\, d\Phi \,, \qquad d\Phi = \frac{dp}{2\pi\hbar} \,. \tag{6}$$

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$V' = f\,x\,[e^{-i\omega t} + h.c.] \tag{7}$$

$$d\Phi = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{m}{p}\,2\,dE = \frac{m}{\pi\hbar p}\,dE \equiv \rho(E)\,dE, \qquad \rho(E) = \frac{m}{\pi\hbar p}. \tag{8}$$

$$\psi_k(x) = e^{ikx}, \tag{9}$$

$$F_{fi} = \langle\psi_k|f\,x|\psi_0\rangle = f\sqrt{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,x\,e^{-ikx}e^{-\kappa|x|} = f\sqrt{\kappa}\frac{-4i\kappa k}{(\kappa^2+k^2)^2}\ ; \tag{10}$$

$$|F_{fi}|^2 = \frac{16 f^2\,k^2\,\kappa^3}{(\kappa^2+k^2)^4} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{2\pi}{\hbar}|F_{fi}|^2\cdot\frac{m}{\pi\hbar p}\Big|_{p=\sqrt{2m(E_0+\omega\hbar)}} \\ &= \frac{2m}{\hbar^3}\,\frac{16 f^2\,k\,\kappa^3}{(\kappa^2+k^2)^4}, \qquad k = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(E_0+\omega\hbar)}}{\hbar}\ . \end{aligned} \tag{12}$$

(ii) Le funzioni d'onda $\psi_f(x) = \exp \pm ikx$ non sono corrette in quanto non sono ortogonali allo stato legato (o più semplicemente, non soddisfano l'equazione di Schrödinger attorno a $x = 0$.) È necessario costruire la corretta funzione d'onda nel continuo, che ha forma

$$\psi_{right} = e^{ikx} + Ae^{-ikx}, \quad x<0, \qquad B\,e^{ikx}, \quad x>0, \tag{13}$$

e analogamente per lo stato "leftmover". Si trovano

$$A = -\frac{1}{1+ik/\kappa}, \qquad B = A+1 = \frac{ik\kappa}{1+ik/\kappa}\ . \tag{14}$$

Si possono verficare che nel caso di potenziale $\sim x^n$ con n intero dispari l'uso delle onde piane $e^{\pm ikx}$ danno il risultato esatto (al primo ordine); nel caso di potenziali pari (come nel caso di potenziale costante) il risultato è errato, per termini dell'ordine di κ^2/k^2 a $k \gg \kappa$.

Problema 2.

(i) Dalla parità segue che $L = 1$. Lo stato in questione (5) è composta da $L = 1$, $s = \frac{1}{2}$, quindi

$$\Psi = R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\frac{1}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle\,]\ . \tag{15}$$

La distribuzione angolare dell'elettrone è:

$$d\Omega\,\frac{1}{8\pi}(|\sin\theta\,e^{i\phi}|^2 + 4|\cos\theta|^2) = d\Omega\,\frac{1}{8\pi}(1+3\,\cos^2\theta)\ . \tag{16}$$

(ii) Riscrivendo lo stato in termini di autostato di s_x:

$$\begin{aligned}\Psi &= R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)\,\tfrac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}}+\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)\,\tfrac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}\,]\\ &= R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)+\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)\,]\,\tfrac{|+\rangle}{\sqrt{2}}+\dots\\ &= R_{2,1}(r)\,\tfrac{1}{\sqrt{8\pi}}\,[-\sin\theta\, e^{i\phi}+2\cos\theta]\,\tfrac{|+\rangle}{\sqrt{2}}+\dots \end{aligned} \tag{17}$$

La distribuzione in questo caso è:

$$d\Omega\,\frac{1}{8\pi}|-\sin\theta\, e^{i\phi}+2\cos\theta|^2 = d\Omega\,\frac{1}{8\pi}(1+3\cos^2\theta-2\sin 2\theta\,\cos\phi)\;.$$

(iv)

$$H^{(t>0)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\frac{e^2}{r}-\frac{e\hbar B}{2mc}\,(L_z+2\,s_z)\;.$$

La funzione d'onda (15) non è autostato di $H^{(t>0)}$, ma ciascuno dei due termini lo è. Considerando soltanto lo spostamento di energia dovuto al termine proporzionale a B,

$$\Delta E = 0, \qquad \text{per} \quad \psi_1 = R_{2,1}(r)\,Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle$$

$$\Delta E = -\frac{e\hbar B}{2mc}\equiv -\varepsilon, \qquad \text{per} \quad \psi_2 = R_{2,1}(r)\,Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle$$

La parte di ψ_2 acquista una fase relativa $e^{i\varepsilon t/\hbar}$, per cui

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= R_{2,1}(r)\,[\,\sqrt{\tfrac{1}{3}}Y_{1,1}(\theta,\phi)|\downarrow\rangle+e^{i\varepsilon t/\hbar}\sqrt{\tfrac{2}{3}}Y_{1,0}(\theta,\phi)|\uparrow\rangle\,]\\ &= R_{2,1}(r)\,\tfrac{1}{\sqrt{8\pi}}\,[-\sin\theta\, e^{i\phi}+2\cos\theta\, e^{i\varepsilon t/\hbar}]\,\tfrac{|+\rangle}{2}+\dots \end{aligned} \tag{18}$$

dove una fase $e^{-iE_2 t/\hbar}$, con $E_2=-e^2/8r_B$, comune ai due termini di Ψ, è stata trascurata.

La distribuzione richiesta si ottiene facendo la sostituzione

$$\phi\to\phi-\varepsilon t/\hbar = \phi-\frac{eBt}{2mc}\;,$$

nella (16), perciò:

$$dP = d\Omega\,\frac{1}{8\pi}\left[1+3\cos^2\theta-2\sin 2\theta\,\cos(\phi-\frac{eBt}{2mc})\right]\;.$$