# Prova Scritta di Meccanica Quantistica

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università di Pisa

*08 giugno 2012 (A.A. 11/12)*

Tempo a disposizione: 3 ore (3.5 per (B)). Risolvere:

Problemi 3 e 4 per il Compitino 2 del corso annuale MQ (A);

Problemi 1, 2 + [3 o 4 a scelta] per la prova scritta completa del corso annuale MQ (B);

Problemi 1 e 2 per la prova scritta di MQI, vecchio ordinamento (C);,

Problemi 3 e 4 per la prova scritta di MQII, vecchio ordinamento (D).

*Indicate chiaramente per quale dei (A)-(D) avete optato.*

## Problema 1.

Una particella di massa $m$, spin $\frac{1}{2}$ si muove in una retta. L'Hamiltoniana è data da:

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + g\, s_z\, \hat{p} + h\, s_x\ , \tag{1}$$

dove $g \geq 0$, $h \geq 0$ sono costanti.

Per $g = h = 0$ la particella è libera, con il noto spettro, $E(p) = p^2/2m \geq 0$, $-\infty < p < \infty$. Ogni livello $E > 0$ è quattro volte degenere (per $p = \pm|p|$ e per $s_z = \pm\frac{1}{2}$); il livello con $E = 0\,(p = 0)$ è doppiamente degenere solo per lo spin.

**(i)** Considerate prima il caso di $h = 0$, $g \neq 0$: determinare lo spettro (dell'energia) e fare uno schizzo di $E(p)$ in questo caso. Discutere la degenerazione.

**(ii)** Considerando invece il caso di $g = 0$, $h \neq 0$, determinare lo spettro e fare uno schizzo di $E(p)$. Discutere la degenerazione.

**(iii)** $h \neq 0$; $g \neq 0$: Studiare lo spettro, fare uno schizzo di $E(p)$ e determinare l'energia dello stato fondamentale. Nel limite $p \to +\infty$, lo stato di energia più bassa corrisponde a $s_z = +\frac{1}{2}$ o $s_z = -\frac{1}{2}$?

*Suggerimento*: considerare l'operatore (o gli operatori) che commuta con $H$.

## Problema 2.

Un nucleo A di spin-parità $J^P = 2^-$ inizialmente si trova nello stato $|J, M\rangle = |2, 2\rangle$. Esso decade ad un tratto, a riposo, in due nuclei B e C ambedue di spin-parità $(\frac{1}{2})^+$. Sia la parità che il momento angolare totale sono conservate nel decadimento.

**(i)** Dire quali valori del momento angolare orbitale $L$ (del moto relativo nello stato finale) sono possibili. Scrivere la funzione d'onda dello stato dei due nuclei nello stato finale, in termini delle armoniche sferiche, di funzioni d'onda di spin e delle funzioni radiali incognite.

**(ii)** *Una misura* dello spin $s_{Bz}$ ha dato il risultato, $-\frac{1}{2}$. Che cosa si può dedurre (*) sui valori del momento angolare orbitale $L$?

**(iii)** Si misurano contemporaneamente $s_{Bz}$ e $s_{Cz}$ con due apparati à la Stern-Gerlach, posti in direzioni $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi)$. I risultati di ripetute misure indicano che le probabilità relative siano tali che

$$P_{\uparrow\uparrow} \gg P_{\downarrow\downarrow} \; . \tag{2}$$

Che cosa implica questo fatto sullo stato di momento angolare orbitale $L$ (*) nello stato finale?

* Per es., "il termine $L = 0$ è dominante", "il termine $L = 40$ è presente", oppure "i termini $L = 1$, $L = 2$, $L = 3$ sono paragonabili", etc.

*N.B.* Potete usare i coefficienti di Clebsch-Gordan e le armoniche sferiche forniti separatamente.

## Problema 3.

Un oscillatore armonico tridimensionale isotropo

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{r}^2, \tag{3}$$

che si trova inizialmente nello stato fondamentale, subisce una perturbazione

$$V = f\,\delta(z - vt) \tag{4}$$

dove $f, v$ sono costanti.

**(i)** Calcolare la probabilità $P_1$ al primo ordine in $f$ che l'oscillatore si trovi in un primo stato eccitato a $t \to \infty$.

**(ii)** Discutere il limite adiabatico e il limite di perturbazione istantanea, utilizzando il risultato del punto (i). Come si comporta $P_1$ come funzione di $v$?

**(iii)** Più in generale, i.e., senza limitare al primo stato eccitato, ma sempre al primo ordine di perturbazione in $f$, dire quali stati del momento angolare orbitale $\{\ell, m = \ell_z\}$ vengono eccitati.

**(iv)** Trovare la probabilità $P_N$ che l'oscillatore si trovi nell'$N$-simo stato eccitato a $t \to \infty$. (Suggerimento: utilizzate il formalismo di operatori $a, a^\dagger$ per l'oscillatore armonico lineare, insieme a certe formule note per un operatore del tipo, $U(\beta) = e^{\beta a^\dagger - \beta^* a}$. )

*Per tenere pulite le formule, ponete $m = \omega = \hbar = 1$ dappertutto, lasciando solo i parametri $f$ e $v$.*

## Problema 4.

L'atomo di magnesio (il numero atomico $Z = 12$) nello stato fondamentale è descritto dalla configurazione elettronica

$$1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s^2\ . \tag{5}$$

Il primo stato eccitato è:

$$1s^2\, 2s^2\, 2p^6\, 3s\, 3p\ . \tag{6}$$

**(i)** Specificare il termine spettrale dello stato fondamentale, (5).

**(ii)** Senza tenere conto delle interazioni spin-orbita, quale sarebbe la degenerazione dello stato (6)?

**(iii)** Tenendo conto delle interazioni spin-orbita, dire in quanti sottolivelli si divide il livello (6), e con quale degenerazione ciascuno.

**(iv)** Quante righe si osserveranno nella transizione (6) $\to$ (5)?

**(v)** L'atomo è sottoposto ad un campo magnetico esterno uniforme e debole*. Quante righe di transizione di dipolo (6) $\to$ (5) ci aspettiamo di ossservare? Considerate l'effetto Zeeman (assunto più piccolo* delle tipiche correzioni spin-orbita) per i due elettroni separatamente e li sommate semplicemente.

```
?ClebschGordan
```

ClebschGordan[{$j_1$, $m_1$}, {$j_2$, $m_2$}, {$j$, $m$}] gives the Clebsch-Gordan coefficient for the decomposition of $|j, m\rangle$ in terms of $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$. ≫

```
ClebschGordan[{3, 2}, {1, 0}, {2, 2}]
```

$$-\sqrt{\frac{5}{21}}$$

```
ClebschGordan[{3, 1}, {1, 1}, {2, 2}]
```

$$\frac{1}{\sqrt{21}}$$

```
ClebschGordan[{3, 3}, {1, -1}, {2, 2}]
```

$$\sqrt{\frac{5}{7}}$$

```
ClebschGordan[{2, 2}, {1, 0}, {2, 2}]
```

$$\sqrt{\frac{2}{3}}$$

```
ClebschGordan[{2, 1}, {1, 1}, {2, 2}]
```

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

```
ClebschGordan[{1, 1}, {1, 1}, {2, 2}]
```

1

```
?SphericalHarmonicY
```

SphericalHarmonicY[$l$, $m$, $\theta$, $\phi$] gives the spherical harmonic $Y_l^m(\theta, \phi)$. ≫

**SphericalHarmonicY[1, 1, θ, ϕ]**

$$-\frac{1}{2} e^{i \phi} \sqrt{\frac{3}{2 \pi}} \operatorname{Sin}[\theta]$$

**SphericalHarmonicY[1, 0, θ, ϕ]**

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \operatorname{Cos}[\theta]$$

**SphericalHarmonicY[2, 2, θ, ϕ]**

$$\frac{1}{4} e^{2 i \phi} \sqrt{\frac{15}{2 \pi}} \operatorname{Sin}[\theta]^2$$

**SphericalHarmonicY[2, 1, θ, ϕ]**

$$-\frac{1}{2} e^{i \phi} \sqrt{\frac{15}{2 \pi}} \operatorname{Cos}[\theta] \operatorname{Sin}[\theta]$$

**SphericalHarmonicY[2, 0, θ, ϕ]**

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left(-1 + 3 \operatorname{Cos}[\theta]^2\right)$$

**SphericalHarmonicY[3, 3, θ, ϕ]**

$$-\frac{1}{8} e^{3 i \phi} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \operatorname{Sin}[\theta]^3$$

**SphericalHarmonicY[3, 2, θ, ϕ]**

$$\frac{1}{4} e^{2 i \phi} \sqrt{\frac{105}{2 \pi}} \operatorname{Cos}[\theta] \operatorname{Sin}[\theta]^2$$

**SphericalHarmonicY[3, 1, θ, ϕ]**

$$-\frac{1}{8} e^{i \phi} \sqrt{\frac{21}{\pi}} \left(-1 + 5 \operatorname{Cos}[\theta]^2\right) \operatorname{Sin}[\theta]$$

**SphericalHarmonicY[3, 0, θ, ϕ]**

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \left(-3 \operatorname{Cos}[\theta] + 5 \operatorname{Cos}[\theta]^3\right)$$

## Soluzione

## Problema 1.

**(i)** Per $h=0$ possiamo considerare gli stati di $s_z=\pm\frac{1}{2}$ separatamente. Per $s_z=\frac{1}{2}$

$$H_\uparrow = \frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{g}{2}\,\hat{p} = \frac{(\hat{p}+\frac{mg}{2})^2}{2m}-\frac{mg^2}{8}. \tag{7}$$

Gli autostati sono

$$e^{ipx/\hbar} \tag{8}$$

con autovalori

$$E_\uparrow(p) = \frac{(p+\frac{mg}{2})^2}{2m}-\frac{mg^2}{8}\geq -\frac{mg^2}{8}. \tag{9}$$

Ogni stato con $E(p)>-\frac{mg}{8}$ è doppiamente degenere; lo stato di $E(p)=-\frac{mg^2}{8}$ $(p=-\frac{mg^2}{2})$ è singolo.

Analogamente per lo stato di spin giù, $s_z=-\frac{1}{2}$,

$$E_\downarrow(p) = \frac{(p-\frac{mg}{2})^2}{2m}-\frac{mg^2}{8}\geq -\frac{mg^2}{8}. \tag{10}$$

Ogni stato con $E(p)>-\frac{mg}{8}$ è doppiamente degenere; lo stato di $E(p)=\frac{mg^2}{8}$ $(p=-\frac{mg}{2})$ è singolo. (vedi Fig. )

Considerando insieme gli stati di $s_z=\pm\frac{1}{2}$ concludiamoc che il grado di generazioneè:

$$D=2,\quad E=-\frac{mg^2}{8};\qquad D=4,\quad E>-\frac{mg^2}{8}. \tag{11}$$

**(ii)** Per $g=0$, $h>0$, gli autostati di $E$ corrispondono agli autostati di $s_x$ con $s_x=\pm\frac{1}{2}$. Lo spettro è

$$E_{s_x=\pm 1/2} = \frac{p^2}{2m}\pm\frac{h}{2}, \tag{12}$$

$$D=1,\quad E=-\frac{h}{2};\qquad D=2,\quad -\frac{h}{2}<E<\frac{h}{2},\qquad D=3,\quad E=\frac{h}{2};\qquad D=4,\quad E>\frac{h}{2}; \tag{13}$$

(vedi Fig. 2)

**(iii)** Anche nel caso $g\neq 0$, $h\neq 0$, $\hat{p}$ continua a comutare con $H$

$$[\hat{p},H]=0 \tag{14}$$

perciò possiamo prendere

$$\Phi = \chi(p)e^{ipx/\hbar}. \tag{15}$$

$\chi(p)$ soddisfa l'equazione agli autovalori

$$\begin{pmatrix} \frac{p^2}{2m}+\frac{gp}{2} & \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{p^2}{2m}-\frac{gp}{2} \end{pmatrix}\chi = E\chi. \tag{16}$$

Gli autovalori dell'energia sono

$$E_{\pm}(p) = \frac{p^2}{2m} \pm \frac{1}{2}\sqrt{g^2 p^2 + h^2}\,. \tag{17}$$

Si noti che le due curve $E_{\pm}(p)$ non si incrociano mai: $E_+(p) > E_-(p)$, $\forall p$. Vedi Fig. 3 Il grado di degenerazione:

$$D = 2, \quad E = E_{min}; \qquad D = 4, \quad E_{min} < E < -\frac{h}{2}; \qquad D = 3, \quad E = -\frac{h}{2}; \tag{18}$$

$$D = 2, \quad -\frac{h}{2} < E < \frac{h}{2}; \qquad D = 3, \quad E = \frac{h}{2}; \qquad D = 4, \quad E > \frac{h}{2}; \tag{19}$$

dove

$$E_{min} = -\frac{1}{2mg^2}\left(\frac{m^2 g^4}{4} + h^2\right) < -\frac{h}{2} \tag{20}$$

è l'energia dello stato fondamentale, doppiamente degenere.

Dalla (16) o direttamente dalla (1) si vede che a $p \to +\infty$ lo stato di energia più bassa corrisponde a $s_z = -\frac{1}{2}$. A $p \to -\infty$ invece lo stato con $E_-(p)$ corrisponde a $s_z = +\frac{1}{2}$. Vice versa per lo stato più alto, $E_+$.

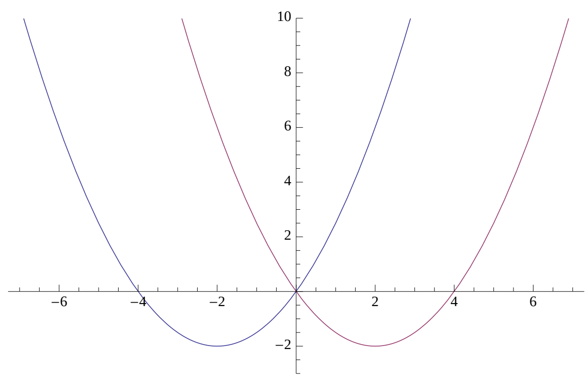


Figura 1:

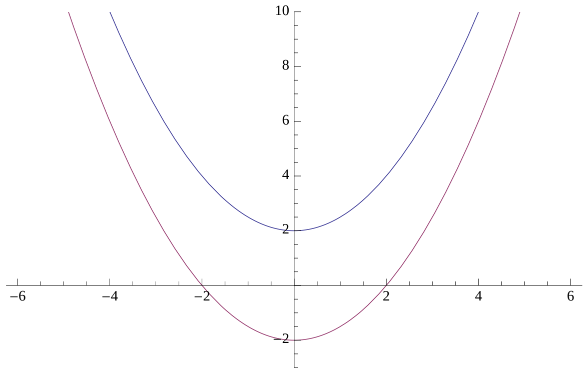


Figura 2:

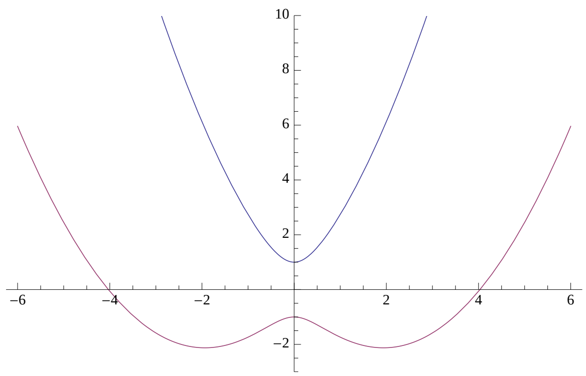


Figura 3:

## Problema 2.

**(i)** Lo spin totale di B e C può essere o $S=1$ o $S=0$. La conservazione del momento angolare implica che per $S=1$ i valori possibili del momento angolare orbitale sono $L=1,2,3$ mentre per $S=0$ l'unico valore possibile è $L=2$. Tenendo conto della parità, si conclude che i valori possibili di $S,L$ sono $S=1$, $L=1$ o $L=3$. La fuzione d'onda avrà la forma

$$\Psi = R_1\, Y_{1,1}\,|\uparrow\uparrow\rangle + R_3\,\left[\frac{1}{\sqrt{21}}\,Y_{3,1}\,|\uparrow\uparrow\rangle - \sqrt{\frac{5}{21}}\,Y_{3,2}\,|\tfrac{\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}\rangle + \sqrt{\frac{5}{7}}\,Y_{3,3}\,|\downarrow\downarrow\rangle\right]\,. \qquad (21)$$

**(ii)** Una misura di $s_{Bz}=-\frac{1}{2}$ significa che il termine $R_3$ è presente, i.e., $R_3\neq 0$, ma non dice nulla su $R_1$.

**(iii)** Nella direzione $(\theta,\phi)=(\frac{\pi}{2},0)$, $\sin\theta=1$, $\cos\theta=0$ per cui

$$Y_{1,1}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}},\qquad Y_{3,1}=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}},\qquad Y_{3,2}=0,\qquad Y_{3,3}=-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}}. \qquad (22)$$

La funzione d'onda prende la forma

$$-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\,R_1\,|\uparrow\uparrow\rangle + R_3\,\left[\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\,|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{5}{8\sqrt{\pi}}\,|\downarrow\downarrow\rangle\right]\,. \qquad (23)$$

Nella componente di $L = 3$ i due termini $|\uparrow\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\downarrow\rangle$ sono tali da dare la probabilità $P_{\downarrow\downarrow}$ molto più grande rispetto a $P_{\uparrow\uparrow}$. Perciò il fatto sperimentale $P_{\uparrow\uparrow} \gg P_{\downarrow\downarrow}$ significa che

$$|R_1| \gg |R_3|, \tag{24}$$

i.e., la componente $L = 1$ è dominante.

## Problema 3.

**(i)** Soltanto l'oscillatore in direzione $z$ viene eccitato; la probabilità di eccitare al primo stato $N = 1$ è

$$\begin{aligned} P &= \tfrac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt\, V_{ki}\, e^{i\omega_{ki}t}\right|^2 = \tfrac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} dt\, \langle 0,0,1|f\,\delta(z-vt)|0,0,0\rangle\, e^{i\omega_{ki}t}\right|^2 \\ &= \tfrac{f^2}{\hbar^2}\left|\int dt\, dz\, \psi_1^*(z)\delta(z-vt)\psi_0(z)\, e^{i\omega_{ki}t}\right|^2 \end{aligned} \tag{25}$$

Gli integrali su $t$ e $z$ possono essere eseguiti in un ordine o l'altro, utilizzando la funzione delta. Integrando in $t$ prima, e ponendo $\hbar = m = \omega = 1$ si ha

$$\begin{aligned} P &= f^2 C_1^2 C_0^2 \left|\int dz\, 2\,\tfrac{1}{v}\, z\, e^{-z^2}\, e^{iz/v}\right|^2 = \tfrac{f^2}{2v^4} e^{-1/2v^2} \\ &= \tfrac{\omega f^2}{2mv^4\hbar}\, e^{-\omega\hbar/2mv^2} \end{aligned} \tag{26}$$

dove nell'ultima riga sono stati rimessi le costanti dimensionali.

**(ii)** Nel limite adiabatico, $v \to 0$, $P$ tende a zero dovuto al fattore esponenziale. Nel limite opposto di variazione rapida, $v \to \infty$, $P$ tende a zero come $1/v^4$.

**(iii)** Per vedere quali stati di momento angolare vengono eccitati, conviene integrare prima in $t$. Si arriva all'ampiezza di transizione

$$\tfrac{f}{v}\,\langle 0,0,N|e^{izN/v}|0,0,0\rangle. \tag{27}$$

Visto che

$$z = r\cos\theta, \tag{28}$$

$e^{izN/v}$ contiene tutte le potenze di $\cos\theta \propto T_{1,0}$; d'altronde non c'è la dipendenza da $\phi$ nell'operatore. Chiaramente tutti i momenti angolari

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

sono eccitati, con $m = 0$.

**(iv)** La probabilità di eccitazione dell'$N$-simo stato $|0,0,N\rangle$ è

$$P = \tfrac{f^2}{v^2}|\langle N|e^{iNz/v}|0\rangle|^2 = \tfrac{f^2}{v^2 N!}|\langle 0|a^N\, e^{iN(a+a^\dagger)/\sqrt{2}v}|0\rangle|^2 \tag{30}$$

Utilizzando le formule note per $U(\beta) = e^{\beta a^\dagger - \beta^* a}$ come

$$a\,U(\beta) = U(\beta)(a+\beta); \qquad U(\beta) = e^{-|\beta|^2/2} e^{\beta a^\dagger} e^{-\beta^* a}\,, \tag{31}$$

dove $\beta \equiv iN/\sqrt{2}v$, si trova che

$$P_N = \tfrac{f^2}{v^2}\tfrac{1}{N!}(\tfrac{N^2}{2v^2})^N e^{-N^2/2v^2} \tag{32}$$

che coincide con quanto trovato al punto (i) per $N = 1$.

## Problema 4.

**(i)**

$$^1S_0\ . \tag{33}$$

**(ii)** L'elettrone nello strato $3p$ ha sei possibili stati; l'elettrone nello strato $3s$ due. Lo stato eccitato è dunque $6 \times 2 = 12$ volte degenere.

**(iii)** L'energia dell'elettrone nello strato $3p$ si divide in due sottolivelli $j_1 = \frac{3}{2}$ e $j_1 = \frac{1}{2}$, con quattro e due stati, rispettivamente. L'energia dell'elettrone $3s$ non subisce l'effetto spin-orbita (due stati). Il livello dello stato (6) dunque si divide in due, il sottolivello alto con il grado di degenerazione $4 \times 2 = 8$, quello di sotto in $2 \times 2 = 4$ stati degeneri.

**(iv)** Due.

**(v)** Il fattore di Landé per l'elettrone è, in tre casi,

$$g_j = \tfrac{4}{3}, \qquad \ell = 1, \quad j = \tfrac{3}{2}; \tag{34}$$

$$g_j = \tfrac{2}{3}, \qquad \ell = 1, \quad j = \tfrac{1}{2}; \tag{35}$$

$$g_j = 2, \qquad \ell = 0, \quad j = \tfrac{1}{2}; \tag{36}$$

quindi non ci sono degenerazioni accidentali. Il primo stato ecccitato, divisi in due livelli da spin-orbita, si divide ulteriormente. Visto che l'elettrone nello strato $3p$ si divide in 6 livelli (4 di $j_1 = \frac{3}{2}$ e 2 di $j_1 = \frac{1}{2}$) e l'elettrone nello strato $3s$ in due, la loro somma (l'energia del primo stato (6)) si divide in 12 possibili valori di energie diverse.

Due di loro tuttavia corrispondono a $J_{tot\,z} = 2$ e $J_{tot\,z} = -2$; questi stati non possono decadere allo stato fondamentale con $L = S = J = 0$.

Restano dieci righe.