Prova Scritta di Meccanica Quantistica

Università di Pisa,
8 luglio '14 (A.A. 13/14)

Tempo a disposizione: 3 ore.

Problema 1.

Un semplice modello di Hamiltoniano che descrive il deutone (uno stato legato di un protone e di un neutrone) è:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V_1(r) + \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 V_2(r) + [3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)\mathbf{r}^2] V_3(r) ,$$

dove $\mathbf{r}$ rappresenta la posizione relativa tra i due nucleoni e $V_i(r)$ sono potenziali a simmetria centrale, $\mu \simeq m_p/2$ è la massa ridotta. ($m_p \simeq 938\,\mathrm{MeV}/c^2$).

(i) Trascurando prima il termine con $V_3(r)$, indicare quali sono i buoni numeri quantici (i.e., l'insieme delle variabili conservate e compatibili tra loro), $\{O_i\}$.

(ii) Sempre trascurando $V_3(r)$, assumiamo che $V_{1,2}$ abbia la forma ($0 < \varepsilon \ll 1$)

$$V_1(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \le r \le a, \\ = 0, & r > a\ . \end{cases}; \qquad V_2(r) = \varepsilon V_1(r)\ ,$$

con i parametri V_0, a tali che H ammetta un solo livello discreto. Determinare i numeri quantici (autovalori di $\{O_i\}$) di questo stato.

(iii) Riscrivere il temine con V_3, utilizzando l'operatore $\mathbf{S}$ (spin totale) e $\mathbf{r}$.

(iv) Tenendo conto del termine con V_3, elencare le variabili conservate (e compatibili tra loro), $\{\tilde{O}_i\}$.

(v) Assumendo che il sistema H (ora con il termine V_3, $V_3(r) = \eta V_1(r)$, $\eta \ll \varepsilon \ll 1$) abbia sempre un solo stato legato (il deutone), dire se il deutone possiede il dipolo elettrico e/o il quadrupolo elettrico, e determinare il valore dello spin del deutone.

(vi) L'energia di legame del deutone è circa 2.23 MeV. Determinare, utilizzando l'andamento asintotico della funzione d'onda che segue da H (e non da a), la dimensione del deutone, in *cm*. (cfr. Si consideri la dimensione dell'atomo di idrogeno in un'orbita generica di Bohr.) $\hbar c \simeq 197$ MeV fm, $\hbar \simeq 1.05 \cdot 10^{-27}$ erg sec.

Problema 2

Un atomo di idrogeno nello stato fondamentale è sottoposto, a partire da $t = 0$, in un campo elettrico debole,

$$\mathcal{E} = (0, 0, \mathcal{E}), \qquad \mathcal{E} = g z e^{-bt},$$

dove b, g sono costanti. Si determini, al primo ordine della teoria delle perturbazioni, lo stato eccitato più basso in cui il sistema si potrebbe trovare dopo un lungo intervallo di tempo. Si calcoli relativa probabilità.

Formulario

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_{2,0} = \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1),$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \qquad Y_{2,\pm 1} = \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta\, e^{\pm i\phi},$$

$$Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi},$$

Tabella 1:

(n,ℓ)	$(1,0)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(3,2)$	$(3,0)$
$\int_0^\infty dr\, r^2 R_{n,\ell} R_{1,0}$	1	0	$\frac{16\sqrt{2/3}}{27}$	$\frac{3\sqrt{3/10}}{16}$	0
$\int_0^\infty dr\, r^4 R_{n,\ell} R_{1,0}$	3	$-\frac{512\sqrt{2}}{243}$	$\frac{1280\sqrt{2/3}}{243}$	$\frac{81\sqrt{15/2}}{128}$	$-\frac{81\sqrt{3}}{128}$

Soluzione

Problema 1

(i)

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}),$$

perciò i buoni numeri quantici sono $\mathbf{L}^2, L_3, \mathbf{S}^2, S_3$ e parità $\mathcal{P}$ ($\mathbf{S}$ è lo spin totale).

(ii)

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}) = \begin{cases} +\frac{1}{4} & S = 1, \\ -\frac{3}{4} & S = 0. \end{cases}$$

Dunque la buca è più profonda per $S = 1$ che per $S = 0$. Visto che esiste uno stato legato solo, per ipotesi, lo stato legato deve avere

$$S = 1, \qquad L = 0,$$

i.e., la buca è appena sufficientemente profonda da ammettere uno stato legato per $S = 1$ ma non per $S = 0$. Lo stato fondamentale è tre volte degenere ($S_z = 1, 0, -1$).

(iii)

$$\begin{aligned}
(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) &= \frac{1}{2}\,[(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r} + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})^2 - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})^2 - (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r})^2\,] \\
&= \frac{1}{2}\,[(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{1}{4}(\sigma_1 \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{1}{4}(\sigma_2 \cdot \mathbf{r})^2\,] = \frac{1}{2}\,[(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - \frac{\mathbf{r}^2}{2}\,] \\
3(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2)\,\mathbf{r}^2 &= \frac{1}{2}\,[\,3\,(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})^2 - \mathbf{S}^2\mathbf{r}^2\,] = \frac{S_i S_j}{2}\,[\,3\,r_i r_j - \delta_{ij}\mathbf{r}^2\,] \qquad (1)
\end{aligned}$$

(iv) Le variabili conservate sono

$$\mathbf{J}^2, \qquad J_z, \qquad S, \qquad \mathcal{P}\ ;$$

N.B.: L non è più conservato.

(v) Lo stato ψ è un autostato di questi operatori. Il termine di V_3 ha la struttura (1) che è un tensore sferico di rango 2 rispetto alle variabili orbitali, perciò lo stato del deutone può essere considerato come una combinazione lineare di $L = 0$ e $L = 2$, perciò

$$\langle\psi|e\mathbf{r}|\psi\rangle = 0, \qquad \langle\psi|Q|\psi\rangle \neq 0.$$

L'unico valore di spin totale del deutone J, che è compatibile con il prodotto

$$|S = 1\rangle \otimes (\,|L = 0\rangle + c\,|L = 2\rangle\,)$$

in cui il primo termine è dominante, è $J = 1$.

(vi) La funzione d'onda ha un andamento

$$\sim e^{-\kappa r}$$

dove

$$\kappa = \frac{\sqrt{-2\mu E}}{\hbar},$$

per cui il raggio del deutone è circa

$$r \sim \frac{1}{\kappa} = \frac{\hbar}{\sqrt{-2\mu E}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2 \cdot 2.23\text{MeV}(940/2)\text{MeV}/c^2\,c^2}} = \frac{200\text{MeV fm}}{\sqrt{2.23\,940}\text{MeV}} \simeq 4.\,10^{-13}\,\text{cm}. \qquad (2)$$

Problema 2

Il potenziale è

$$-\frac{eg}{2}\, e^{-bt}\, z^2.$$

In teoria delle perturbazioni, lo stato più basso che può essere eccitato è $n=2$, $\ell=0$, $\psi_{2,0,0}$, visto che il potenziale di perturbazione è $\propto (T_0^1)^2$ che contiene sia T_0^2 che T_0^0 (ma non T_0^1.) La probabilità di eccitazione è data da

$$P = \frac{e^2 g^2}{4\hbar^2} \left| \int_0^\infty dt\, e^{-bt} e^{i\omega_{21} t} \langle 2,0,0|z^2|1,0,0\rangle \right|^2, \qquad \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$$

$$\langle 2,0,0|z^2|1,0,0\rangle = \frac{1}{4\pi}\, 2\pi \int d(\cos\theta)\cos^2\theta \int dr r^4\, R_{2,0} R_{1,0} = \frac{1}{4\pi}\, 2\pi\, \frac{2}{3} \left(-\frac{512\sqrt{2}}{243}\right) = -\frac{2^9\sqrt{2}}{3^6} r_B^2.$$

$$P = \frac{e^2 g^2}{\hbar^2} \frac{1}{b^2+\omega_{21}^2} \frac{2^{17}}{3^{12}} r_B^4 \simeq 0.25 \left(\frac{e\, r_B^2 g}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{b^2+\omega_{21}^2};. \tag{3}$$