Appello di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
8 settembre 2006 (A.A. 05/06)

(Tempo a disposizione: 3 ore.)

Problema 1

Una particella di massa m si muove confinata in una cavità di forma sferica di raggio a, *i.e.*, nel potenziale

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r \geq a. \end{cases} \tag{1}$$

(i) Trovare approssimativamente i primi quattro livelli di energia, e determinare i numeri quantici (n,ℓ), facendo uso dei grafici di funzioni di Bessel sferiche $j_\ell(x)$ $(\ell = 0,1,2,3)$ riportata nella Fig. 1; *N.B.* nel caso di $\ell = 0$ si possono calcolare i livelli esattamente.

(ii) Calcolare la pressione che la particella, nello stato fondamentale, esercita sulla parete della sfera;

(iii) Come si può determinare i livelli di energia, se la particella può muovere solo tra le superficie di due sfere di raggi b e a, *i.e.,* nel potenziale

$$V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \infty, & r \leq b, \\ 0, & b < r < a, \\ \infty & r \geq a \end{cases} \tag{2}$$

? Indicare il metodo, e scrivere l'equazione che determina i livelli di energia. Non è necessario risolverla.

Problema 2.

Una nucleo A di spin 1 e parità $(-)$, a riposo, decade spontaneamente in due nuclei B e C, di spin-parità $(1/2)^+$ e $(1/2)^-$, rispettivamente. Nel processo sono conservati sia il momento angolare totale che la parità.

i) Elencare tutti i possibili valori di (S,ℓ), dove $\mathbf{S} = \mathbf{s}_B + \mathbf{s}_C$; ℓ è il momento angolare orbitale del moto relativo tra B e C;

ii) Esprimere la funzione d'onda dello stato finale in termini di armoniche sferiche, di funzioni di spin di B e C e di funzioni radiali indipendenti (incognite), per $J_z(A) = 1$. Usare le coordinate sferiche (r,θ,ϕ) per la posizione relativa $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$.

iii) Supponiamo di misurare la componente z di spin $\mathbf{s}_B$ e $\mathbf{s}_C$ *contemporaneamente*, con apparecchi à la Stern-Gerlach posti nelle direzioni $(\theta,\phi) = (\pi/4,\pi)$ (per B) e $(3\pi/4,0)$ (per C). (Fig. 2). Scrivere la funzione d'onda di cui al punto ii), esplicitando i valori delle armoniche sferiche a $(\theta,\phi) = (\pi/4,\pi)$. Esprimere le quattro ampiezze di transizione,

$$|J_z(A)\rangle \to |s_z(B), s_z(C)\rangle \tag{3}$$

$$s_z(B) = \pm\frac{1}{2}, \qquad s_z(C) = \pm\frac{1}{2}, \qquad J_z(A) = 1, \tag{4}$$

in termini di certo numero di costanti incognite. Calcolare, sempre per $J_z(A) = 1$, le probabilità condizionate, che lo spin della particella C risulti up o down, *sapendo* che la misura dello spin di B ha dato il risultato $s_z(B) = -1/2$. (*N.B.* Le probabilità condizionate analoghe non possono invece essere calcolate nel caso di $s_z(B) = +1/2$, senza ulteriori informazioni.)

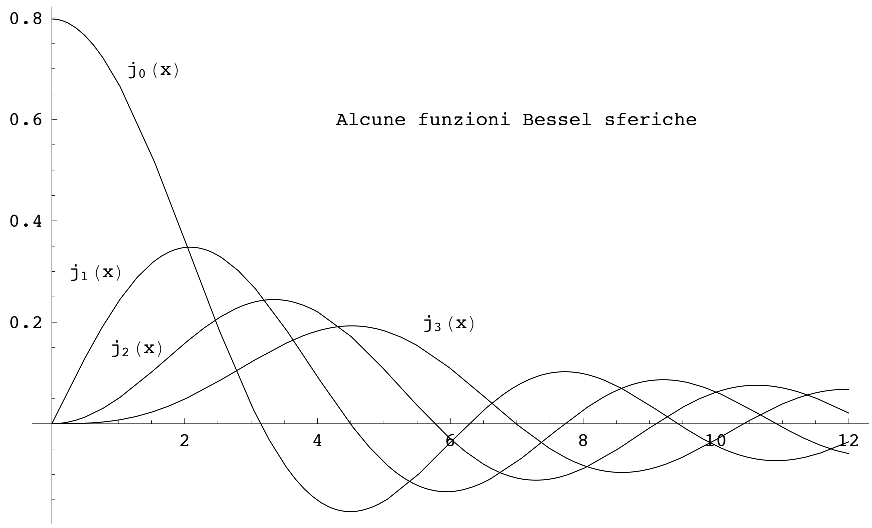

Figura 1:

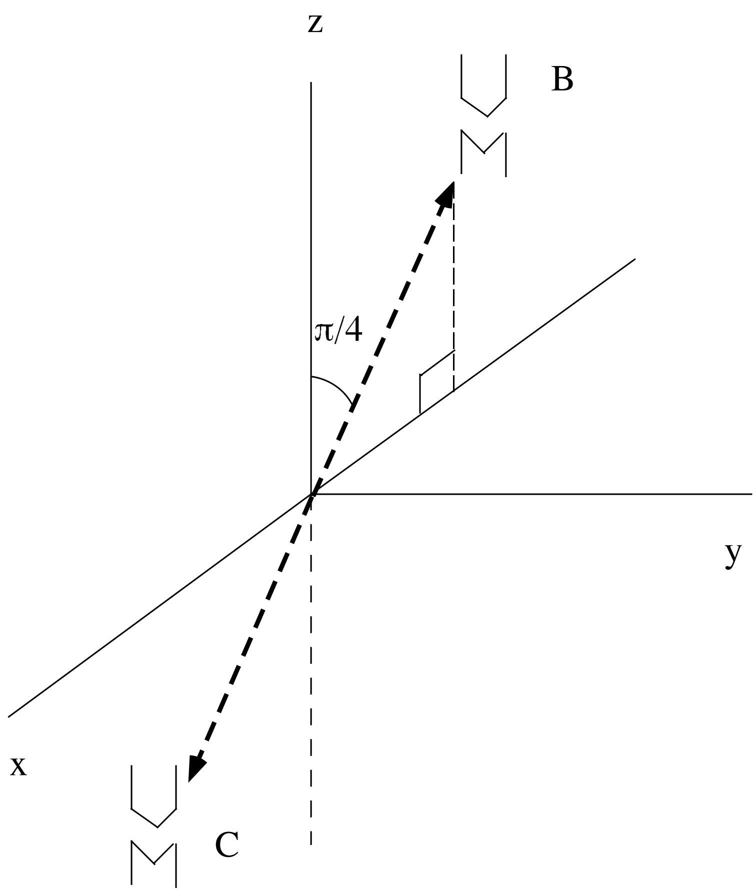

Figura 2:

Soluzione

Problema 1.

(i) L'equazione di Schrdinger radiale è quella libera,

$$R'' + \frac{2}{r}R' + (k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\,]\,R_{k,\ell}(r) = 0, \tag{5}$$

di cui la soluzione generale è della forma

$$R_{k,\ell}(r) = c_1\, j_\ell(kr) + c_2\, n_\ell(kr). \tag{6}$$

La regolarità della funzione d'onda all'origine impone

$$c_2 = 0; \tag{7}$$

la condizione a $r = a$ richiede che sia soddisfatta

$$j_\ell(ka) = 0. \tag{8}$$

I livelli di energia è quindi determinati dagli zeri di $j_\ell(ka)$. Dal grafico vediamo che i primi quattro livelli corrispondono al valore di $k_n a \simeq 3.14, 4.5, 5.75, 6.28$, con il momento angolare orbitale $\ell = 0,1,2,0$, rispettivamente. Oppure $(n,\ell) = (1,0),(2,1),(3,2),(2,0)$, e $E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$. In particolare $j_0(x) = \frac{\sin x}{x} = 0$ per $x = n\pi$, $n = 1,2,\ldots$.

(ii) L'energia dello stato fondamentale è

$$E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}. \tag{9}$$

Supponiamo di comprimere la sfera, $a \to a - \delta a$. L'energia aumenta di

$$E_0(a-\delta a) - E_0(a) = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^3}\,\delta a. \tag{10}$$

Questa quantità è uguale al lavoro richiesto: cioè

$$P \cdot 4\pi a^2 \cdot \delta a = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^3}\,\delta a, \tag{11}$$

da cui

$$P = \frac{\pi\hbar^2}{4ma^5}. \tag{12}$$

(iii) In questo caso la soluzione all'interno è della forma generale, (6). La condizione al contorno a $r = b$ e $r = a$ è

$$c_1\, j_\ell(kb) + c_2\, n_\ell(kb) = 0, \qquad c_1\, j_\ell(ka) + c_2\, n_\ell(ka) = 0. \tag{13}$$

Per avere una soluzione per $c_{1,2}$, k deve essere tale che

$$\det \begin{vmatrix} j_\ell(kb) & n_\ell(kb) \\ j_\ell(ka) & n_\ell(ka) \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Questo dà la condizione di quantizzazione.

Problema 2.

i) Lo spin totale S_{tot} prende valori 1 o 0. Dalla conservazione del momento angolare totale segue che i valori possibili per ℓ sono $\ell = 0, 1, 2$ per $S_{tot} = 1$; per $S_{tot} = 0$ l'unico valore possibile è $\ell = 1$. La conservazione di parità tuttavia permette soltanto i valori $\{S_{tot}, \ell\}, = \{1, 2\}$, e $\{S_{tot}, \ell\} = \{1, 0\}$.

ii) La funzione d'onda dello stato finale richiesta è

$$\begin{aligned} & \psi(1,1) \\ = \quad & R_2(r)\left(\sqrt{\frac{3}{5}}Y_{2,2}(\theta,\phi)\chi(1,-1) - \sqrt{\frac{3}{10}}Y_{2,1}(\theta,\phi)\chi(1,0) + \frac{1}{\sqrt{10}}Y_{2,0}(\theta,\phi)\chi(1,1)\right) \\ + \quad & R_0(r)Y_{0,0}\chi(1,1) \end{aligned} \tag{15}$$

dove

$$\chi(1,1) = |\uparrow\uparrow\rangle, \qquad \chi(1,0) = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}, \qquad \chi(1,-1) = |\downarrow\downarrow\rangle. \tag{16}$$

iii) A $\theta = \pi/4$, $\phi = \pi$ le armoniche sferiche prendono i valori,

$$Y_{2,0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}, \quad Y_{2,\pm1} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{8\pi}}, \quad Y_{2,\pm2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{32\pi}}, \quad Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \tag{17}$$

per cui

$$\begin{aligned} \psi(1,1) \quad = \quad & R_2(r)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{32\pi}}\chi(1,-1) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{16\pi}}\chi(1,0) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{32\pi}}\chi(1,1)\right) + \\ + \quad & R_0(r)\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\chi(1,1) \end{aligned} \tag{18}$$

Possiamo allora scrivere le quattro ampiezze in termini di due incognite

$$T_{\uparrow\uparrow} = C_2 + C_0; \qquad T_{\uparrow\downarrow} = T_{\downarrow\uparrow} = -3C_2; \qquad T_{\downarrow\downarrow} = 3C_2; \tag{19}$$

Le probabilità condizionate richieste sono

$$P_{\downarrow}(\uparrow) = \frac{9|C_2|^2}{9|C_2|^2 + 9|C_2|^2} = \frac{1}{2}; \qquad P_{\downarrow}(\downarrow) = \frac{9|C_2|^2}{9|C_2|^2 + 9|C_2|^2} = \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Le probabilità condizionate analoghe non possono essere calcolate nel caso di $s_z(B) = 1/2$, visto che il rapporto C_2/C_0 non è noto.