Appello di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
9 febbraio 2006 (A.A. 05/06)

(Tempo a disposizione: 3 ore.)

Problema 1

Una particella di spin 1, nello stato $|S,S_z\rangle = |1,0\rangle$, decade, a riposo, in due particelle A e B, ambedue di spin $\frac{1}{2}$, in onda S ($\ell = 0$). Si misurano le componenti di spin A e B contemp oraneamente, con due apparecchi à la Stern-Gerlach, posti in direzione opposta, ma con l'orientamento dei magneti scelto indipendentemente per A e per B.

(i) Scrivere la funzione d'onda dello stato finale, in termini di funzioni d'onda di spin delle due particelle A e B;

(ii) Sapendo che la misura di $s_{A,z}$ ha dato il risultato $+\frac{1}{2}$, determinare i valori possibili di $s_{B,x}$ e le relative probabilità;

(iii) Sapendo che la misura di $s_{A,n}$, dove

$$s_{A,n} = \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta). \tag{1}$$

ha dato il risultato $+\frac{1}{2}$, determinare i valori possibili di $s_{B,z}$ e le relative probabilità.

(iv) Se il risultato della misura di $s_{A,n}$ non fosse noto all'osservatore di B, quale sarebbe la predizione per $s_{B,z}$?

Suggerimento per il punto [(iii)]: determinate prima gli autostati di $\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$, dove

$$\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}|1\rangle = \frac{1}{2}|1\rangle, \qquad \mathbf{s}_A \cdot \mathbf{n}|2\rangle = -\frac{1}{2}|2\rangle,$$

in termini di $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$ (gli autostati di s_{Az}). Invertendo queste relazioni, esprimete $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$, in termini di $|1\rangle, |2\rangle$, e sostituite queste nel risultato del punto [(i)].

Problema 2.

Una particella si muove in tre dimensioni, in un potenziale a simmetria centrale,

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{C}{r^2}, \qquad C > 0. \tag{2}$$

(i) Scrivere l'equazione di Schrödinger radiale per il momento angolare orbitale ℓ';

L'equazione radiale al punto [(i)], diventa *formalmente* identica all'equazione radiale per l'atomo di idrogeno (per ℓ), se identifica in quest'ultimo,

$$\ell(\ell+1) = \ell'(\ell'+1) + \frac{2mC}{\hbar^2}. \tag{3}$$

(ii) Trovare ℓ (soluzione positiva della (3)) in termini di ℓ'.

(iii) Sapendo che l'equazione radiale per l'atomo di idrogeno per "ℓ" ha la soluzione normalizzabile per i valori di energia tale che

$$\lambda - \ell - k - 1 = 0, \qquad \lambda = \sqrt{\frac{\hbar^2}{-2mE}}, \qquad (\frac{me^2}{\hbar^2} = 1), \tag{4}$$

dove k è un numero intero non negativo, trovare i livelli energetici del sistema (2).

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,|\!\uparrow\rangle\,|\!\downarrow\rangle + |\!\downarrow\rangle\,|\!\uparrow\rangle\,].$$

(ii)

$$\psi_B = |\!\downarrow\rangle.$$

La probabilità di trovare in questo stato i due risultati $s_{B,x} = \pm\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2}$ ciascuno.

(iii)

$$|1\rangle = e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,|\!\uparrow\rangle + e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,|\!\downarrow\rangle, \qquad |2\rangle = e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,|\!\uparrow\rangle - e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,|\!\downarrow\rangle.$$

Invertendo,

$$|\!\uparrow\rangle = e^{i\phi/2}\,[\cos\frac{\theta}{2}\,|1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|2\rangle\,], \qquad |\!\downarrow\rangle = e^{-i\phi/2}\,[\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\,|2\rangle\,].$$

Lo stato iniziale è allora

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,[\,e^{i\phi/2}\,(\cos\frac{\theta}{2}\,|1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|2\rangle\,)\,|\!\downarrow\rangle + e^{-i\phi/2}\,(\sin\frac{\theta}{2}\,|1\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\,|2\rangle\,)\,|\!\uparrow\rangle\,] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle\,[\,e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,|\!\downarrow\rangle + e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,|\!\uparrow\rangle\,] + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|2\rangle\,[\,e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,|\!\downarrow\rangle - e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,|\!\uparrow\rangle\,]. \end{aligned}$$

Avendo osservato lo spin A nello stato $|1\rangle$, la funzione d'onda dello spin B è

$$e^{i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,|\!\downarrow\rangle + e^{-i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,|\!\uparrow\rangle.$$

Le probablilità di trovare B in due stati di spin sono:

$$P_{\uparrow} = \sin^2\frac{\theta}{2}; \qquad P_{\downarrow} = \cos^2\frac{\theta}{2}.$$

(iv) Senza la conoscenza della misura di s_n, si ha

$$P_{\uparrow} = P_{\downarrow} = \frac{1}{2},$$

dalla funzione d'onda $|\Psi\rangle$ di [(i)].

Problema 2.

(i)

$$\frac{d^2}{dr^2}R + \frac{2}{r}\frac{d}{dr}R - \frac{\ell'(\ell'+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}(E + \frac{e^2}{r} - \frac{C}{r^2})R = 0. \tag{5}$$

Si vede che l'aggiunta del termine $\propto C$ è equivalente ad una modifica di ℓ', (3).

(ii)

$$\ell = \frac{1}{2}\,[-1 + \sqrt{(2\ell'+1)^2 + \frac{8mC}{\hbar^2}}\,]$$

(iii)

$$E_{k,\ell'} = -\frac{\hbar^2}{2m\left(k+\frac{1}{2}[1+\sqrt{(2\ell'+1)^2+\frac{8mC}{\hbar^2}}\,]\right)^2}$$

Ripristinando le costanti dimensionali ($\frac{me^2}{\hbar^2}=1$),

$$E_{k,\ell'} = -\frac{me^4}{2\hbar^2\left(k+\frac{1}{2}[1+\sqrt{(2\ell'+1)^2+\frac{8mC}{\hbar^2}}\,]\right)^2}, \qquad k=0,1,2,\ldots.$$

Per $C=0$, il risultato è

$$E_{k,\ell'} = -\frac{me^4}{2\hbar^2\,(k+\ell'+1)^2}$$

e coincide con il risultato noto se si identifica

$$n = k+\ell'+1, \qquad n=1,2,\ldots.$$

Per C piccolo, i livelli energetici sono dati approssimativamente da

$$E_{k,\ell'} \simeq -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}\left(1-\frac{4mC}{n(2\ell'+1)\hbar^2}\right).$$

La degenerazione $\propto n^2$ dell'atomo di idrogeno viene eliminata, e tutti i livelli si innalzano un poco. L'incremento dell'energia è più p grande per gli stati di momenti angolari orbitali più bassi, come ci si aspetta dalla forma del potenziale aggiuntivo.