Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
9 giugno '08 (A.A. 07/08)

Tempo a disposizione: 3 ore.

Problema 1.

Una particella di massa m, carica e e spin $1/2$ è legato in un potenziale armonico,

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}^2 - \mu \cdot \mathbf{B} ,$$

dove

$$\mu = g \, \mathbf{s} = \frac{g}{2} \, \sigma .$$

(i) Considerando prima il caso senza il campo magnetico (i.e., con $B = 0$), calcolare i primi due livelli di energia, il momento angolare orbitale, il momento angolare totale e degenerazione di ciascun livello.

(ii) Si consideri un campo magnetico $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ non nullo, con

$$\mathbf{A} = (-\frac{By}{2}, \frac{Bx}{2}, 0) .$$

Elencare tutti gli operatori conservati, trascurando i termini di ordine $O(B^2)$ assumendo un campo debole.

(iii) Utilizzando il risultato sopra, determinare i livelli energetici corrispondenti ai primi due livelli del punto (i), e relative funzioni d'onda, per un campo debole (trascurando il termine $\propto B^2$ nell'Hamiltoniana, ma altrimenti trattando esattamente il sistema).

Problema 2.

Una particella di spin $S = 1$ decade, a riposo, in due particelle *identiche* di spin $1/2$.

(i) Determinare lo spin totale S_{tot} e il momento angolare L (del moto relativo) dello stato finale. Scrivere la funzione d'onda dello stato finale, in termini di armoniche sferiche e di funzioni d'onda di spin, nei tre casi, $|S, S_z\rangle = |1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$.

(ii) Trovare la funzione d'onda di spin, assumendo che la particella si trovi all'inizio in uno stato

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \, |\mathbf{n}\rangle = |\mathbf{n}\rangle , \tag{1}$$

dove $\mathbf{n}$ è un versore $\mathbf{n} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$.

(iii) Due apparecchi à la Stern-Gerlach posti lungo asse $\pm x$ misurano simultaneamente $(s_{1,z}, s_{2,z})$ delle particelle finali. Qual'è la probabilità relativa di ottenere il risultato $(s_{1,z}, s_{2,z}) = (\uparrow, \uparrow)$ rispetto a quello di ottenere $(s_{1,z}, s_{2,z}) = (\uparrow, \downarrow)$? (Figura 1.)

Sul punto (ii) potete utilizzare la forma esplicita di operatori di spin $S = 1$:

$$S_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \qquad S_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \qquad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

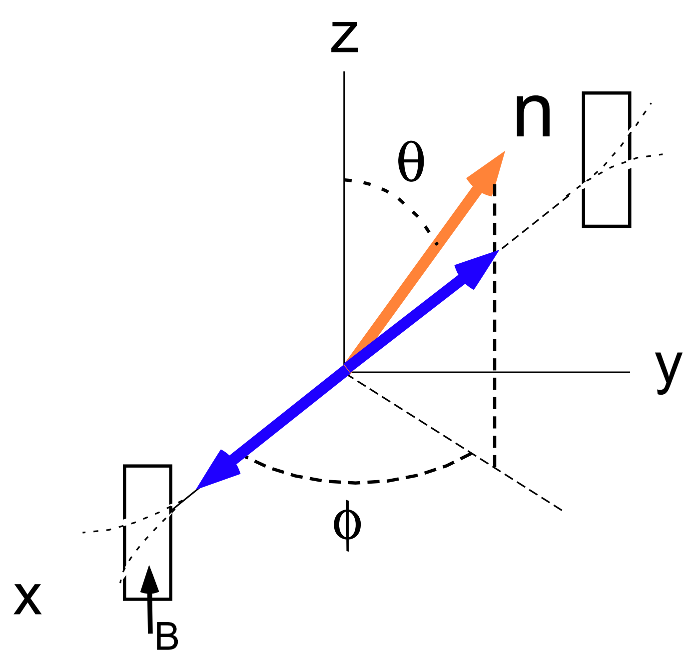

Figura 1:

Soluzione

Problema 1.

(i) Il sistema per $B=0$ è un semplice oscillatore tridimensionale: lo stato fondamentale è:

$$E_0 = \frac{3}{2}\omega\hbar; \qquad L=0, \quad J=\frac{1}{2}\;.$$

Esso è doppiamente degenere. Il primo livello è sei volte degenere:

$$E_1 = \frac{5}{2}\omega\hbar; \qquad L=1, \quad s=\frac{1}{2}, \quad J=\frac{3}{2}, J=\frac{1}{2}.$$

(ii) L'Hamiltoniana è :

$$H = H_{B=0} - \frac{eB\hbar}{2mc}L_z - \frac{gB\hbar}{2}\sigma_z.$$

Gli operatori conservati sono:

$$\mathbf{L}^2, \quad L_z, \quad \mathbf{s}^2, \quad s_z, \quad J_z \tag{2}$$

e parità. J_x, J_y, $\mathbf{J}^2$ non sono conservati.

(iii) Gli autostati dell'Hamilotoniana sono dunque autostati di $H_{B=0}$ che sono autostati di operatori eq. (2). Per $N=0$, $L=0$ e perciò

$$E = \frac{3}{2}\omega\hbar \mp \frac{gB\hbar}{2},$$

per due stati $s_z = J_z = \pm\frac{1}{2}$. Per il primo livello eccitato, $N=1$, gli autostati sono:

L_z	s_z	stato	E
1	1/2	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 1,0,0\rangle + i\lvert 0,1,0\rangle)\lvert\uparrow\rangle$	$\frac{5}{2}\omega\hbar - \frac{eB\hbar}{2mc} - \frac{gB\hbar}{2}$
-1	1/2	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 1,0,0\rangle - i\lvert 0,1,0\rangle)\lvert\uparrow\rangle$	$\frac{5}{2}\omega\hbar + \frac{eB\hbar}{2mc} - \frac{gB\hbar}{2}$
1	$-1/2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 1,0,0\rangle + i\lvert 0,1,0\rangle)\lvert\downarrow\rangle$	$\frac{5}{2}\omega\hbar - \frac{eB\hbar}{2mc} + \frac{gB\hbar}{2}$
-1	$-1/2$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 1,0,0\rangle - i\lvert 0,1,0\rangle)\lvert\downarrow\rangle$	$\frac{5}{2}\omega\hbar + \frac{eB\hbar}{2mc} + \frac{gB\hbar}{2}$
0	1/2	$\lvert 0,0,1\rangle\lvert\uparrow\rangle$	$\frac{5}{2}\omega\hbar - \frac{gB\hbar}{2}$
0	$-1/2$	$\lvert 0,0,1\rangle\lvert\downarrow\rangle$	$\frac{5}{2}\omega\hbar + \frac{gB\hbar}{2}$

Tabella 1:

dove $|1,0,0\rangle = |1\rangle_x\,|0\rangle_y\,|0\rangle_z$, etc., sono prodotti degli autovettori dell'oscillatore armonico unidimensionale.

Problema 2.

(i) $S_{tot} = 1,0$, con funzione d'onda di spin simmetrico e antisimmetrico, rispettivamente. Per la statistica di Fermi-Dirac la funzione d'onda orbitale è antisimmetrica ($L=1,3,\ldots$) o simmetrica ($L=0,2,\ldots$), rispettivamente. Tenendo conto della conservazione di momento angolare totale, per formare il momento angolare iniziale $J=1$, l'unica possibilità è di avere

$$S_{tot} = 1, \qquad L=1.$$

Di conseguenza,

$$\begin{aligned} |1,1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_{tot,z}=1\rangle\, Y_{1,0} - |S_{tot,z}=0\rangle\, Y_{1,1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle\, Y_{1,0} - \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right) Y_{1,1}. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_{tot,z}=1\rangle\, Y_{1,-1} - |S_{tot,z}=-1\rangle\, Y_{1,1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle\, Y_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle\, Y_{1,1}. \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} |1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|S_{tot,z}=0\rangle\, Y_{1,-1} - |S_{tot,z}=-1\rangle\, Y_{1,0}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right) Y_{1,-1} - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle\, Y_{1,0}. \end{aligned} \tag{5}$$

(ii)

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\phi} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\phi} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{-i\phi} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

L'autovettore con autovalore 1 è:

$$|\mathbf{n}\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi} \\ \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin^2\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} \end{pmatrix} = \cos^2\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi}\,|1,1\rangle + \sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,|1,0\rangle + \sin^2\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi}\,|1,-1\rangle\ .$$

Questo stato può essere direttamente costruito come prodotto diretto,

$$|\mathbf{n}\rangle = |\mathbf{n}\rangle_{s_1=1/2} \otimes |\mathbf{n}\rangle_{s_2=1/2}\ ,$$

dove

$$|\mathbf{n}\rangle_{s=1/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2}\cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\ .$$

Utilizzando gli stati, calcolati con le armoniche sferiche a $\theta' = \pi/2, \phi' = 0$, i.e.,

$$Y_{1,0} = 0, \qquad Y_{1,1} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}, \qquad Y_{1,-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}},$$

si ha (rinormalizzando per $\sqrt{\frac{8\pi}{3}}$)

$$|\mathbf{n}\rangle = \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)(\cos\phi - i\sin\phi\cos\theta) + \frac{1}{2}(\uparrow\uparrow + \downarrow\downarrow)\sin\theta$$

La probabilità richiesta è:

$$\frac{P_{\uparrow\uparrow}}{P_{\uparrow\downarrow}} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\phi + \sin^2\phi\cos^2\theta}$$