Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

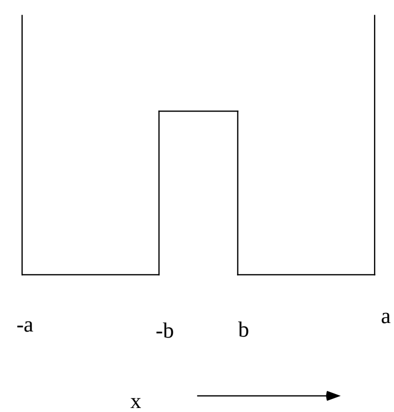
Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
10 gennaio '08 (A.A. 07/08)

Tempo a disposizione: 3 ore.
Problemi 1 e 2 per il recupero Compitino I;
Problemi 2 e 3 per il recupero Compitino II.
Per Appello I, risolvere Prob. 1 (i), Prob. 2 (ii), (iii), e Prob. 3.

Problema 1.

Una particella di massa m è vincolata a muoversi sul segmento $-a < x < a$ (il potenziale è infinito per $|x| > a$). All'interno di questo segmento il potenziale è ($V_0 > 0$):

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & -a < x < -b, \\ V_0\,, & -b < x < -b, \\ 0\,, & b < x < a, \end{cases} \tag{1}$$



(i) Determinare il valore di V_0 di modo che la funzione d'onda dello stato fondamentale sia costante e non nulla per $-b \leq x \leq b$. Qual'è l'energia dello stato fondamentale in questo caso?

(ii) Per tale valore di V_0 trovare l'equazione che determina implicitamente l'energia del primo stato eccitato. Trovare la soluzione di tale equazione approssimativamente, nel caso $a \gg b$.

(iii) Esiste, invece, un valore di V_0 tale che la funzione d'onda del *primo stato eccitato* sia una funzione lineare di x, i.e., $\psi_{II} \propto x$? Trovare l'equazione che determina implicitamente E in questo caso, e dimostrare che tale V_0 soddisfa alla relazione:

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{8m(a-b)^2} < V_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{2m(a-b)^2}$$

Suggerimento: utilizzate l'argomento della parità, per semplificare l'analisi.

Problema 2.

Un sistema composto di due particelle A e B, ambedue di spin $\frac{1}{2}$, è descritto dalla funzione d'onda ($\alpha =$ reale):

$$\Psi = \cos\alpha\,|\uparrow\downarrow\rangle + \sin\alpha\,|\downarrow\uparrow\rangle, \tag{2}$$

dove

$$|\uparrow\downarrow\rangle \equiv |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle\,, \qquad |\downarrow\uparrow\rangle \equiv |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\,.$$

(i) Esprimere lo stato (2) in termini di autostati di spin totale $\mathbf{S}_{tot}^2$, dove $\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$. Qual'è la probabilità che la misura di $\mathbf{S}_{tot}^2$ dia il risultato 0?

(ii) Supponiamo che le particelle A e B si trovino a distanza tale che non possano interagire tra di loro. Determinare la matrice densità ρ per un osservatore in grado di misurare solo il primo spin. [1]

(iii) Calcolare la quantità [2] :

$$E = -\mathrm{Tr}\,(\rho\,\log\rho).$$

Trovare i minimi ed i massimi di $E(\alpha)$ rispetto alla variazione di α, e discutere il significato di questi casi speciali.

Problema 3.

Un oscillatore tridimensionale (con carica elettrica q) è sottoposto ad un campo esterno elettrico statico e omogeneo (costante), $\mathbf{E}$:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{r}^2 - q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}\,.$$

(i) Elencare gli operatori che commutano con l'Hamiltoniana, i.e., gli operatori di simmetria.

(ii) Determinare il valor medio dell'operatore $\mathbf{r}$ in uno stato generico ψ all'istante t,

$$\langle\psi(t)|\mathbf{r}|\psi(t)\rangle\,,$$

come funzione di t, in termini dei valori medii definiti al tempo iniziale, $t = 0$, utilizzando lo schema di Heisenberg.

[1] In altre parole, trovare la matrice ρ tale che il valore d'aspettazione di un operatore f che dipende solo dallo spin di A, nello stato Ψ, sia uguale a:

$$\langle\Psi|f|\Psi\rangle = \mathrm{Tr}\,(\rho\,\mathbf{f})\,, \qquad \mathbf{f}_{ij} = \langle i|f|j\rangle, \quad |i\rangle = |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\,.$$

[2] In generale, una funzione $F(A)$ di un operatore o di una matrice A, è definita come $F(A) = \sum_i F(a_i)|i\rangle\langle i|$, dove $|i\rangle$ è l'i-simo autovettore dell'operatore A, con autovalore a_i. Si noti tuttavia che per un operatore diagonale $A = \mathrm{diag}\,\{a_1, a_2, \ldots\}$, essa si riduce a $F(A) = \mathrm{diag}\,\{F(a_1), F(a_2), \ldots\}$.

Soluzione

Problema 1.

(i) La funzione d'onda dello stato fondamentale deve essere pari, essa ha forma

$$\psi_I(x) = A\,\sin(k(x+a)), \qquad \frac{k^2\hbar^2}{2m} = E, \qquad -a < x < -b, \tag{3}$$

$$\psi_{II}(x) = C\,\cos(k'x), \qquad \frac{k'^2\hbar^2}{2m} = E - V_0, \qquad -b \le x \le b, \tag{4}$$

$$\psi_{III}(x) = \psi_I(-x) = -A\,\sin(k(x-a)), \qquad b < x < a. \tag{5}$$

basta imporre la condizione di continuità a $x = -b$. La costanza di ψ_{II} significa

$$\psi_{II} = C \neq 0, \quad k' = 0, \qquad \therefore \quad V_0 = E. \tag{6}$$

Dalla continuità della funzione d'onda a $x = -b$ si ha

$$A\sin(k(-b+a)) = C, \qquad \cos(k(-b+a)) = 0; \tag{7}$$

Si trova dunque

$$k(a-b) = \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Per lo stato fondamentale, dunque,

$$k = \frac{\pi}{2\,(a-b)}, \qquad E = \frac{k^2\hbar^2}{2m} = \frac{\pi^2\hbar^2}{8\,m\,(a-b)^2}, \tag{9}$$

e di conseguenza,

$$V_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8\,m\,(a-b)^2} > 0. \tag{10}$$

La funzione d'onda normalizzata è

$$\psi_I(x) = A\sin(k(x+a)), \qquad \psi_{II}(x) = A, \qquad \psi_{III}(x) = -A\sin(k(x-a)), \tag{11}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{a+b}}. \tag{12}$$

(ii) La funzione d'onda del primo stato eccitato è dispari, ha la forma,

$$\psi_I(x) = A\,\sin(k(x+a)), \qquad \frac{k^2\hbar^2}{2m} = E, \qquad -a < x < -b, \tag{13}$$

$$\psi_{II}(x) = B\,\sin(k'x), \qquad \frac{k'^2\hbar^2}{2m} = E - V_0, \qquad -b \le x \le b, \tag{14}$$

$$\psi_{III}(x) = -\psi_I(-x) = A\,\sin(k(x-a)), \qquad b < x < a. \tag{15}$$

Imponendo la continuità a $x = -b$, si ha l'equazione

$$\frac{1}{k}\tan k(a-b) = -\frac{1}{k'}\tan k'b\,.$$

Per $b \ll a$, il secondo membro è

$$-\frac{1}{k'}\tan k'b \simeq -b\,.$$

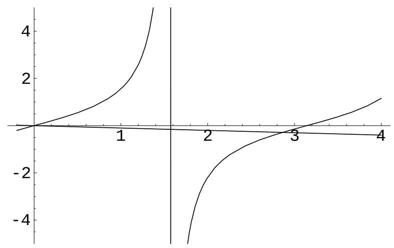


Figura 1:

per cui l'equazione da risolvere è approssimativamente:

$$\tan k(a-b) = -b\,k\,. \tag{16}$$

cioè:

$$k(a-b) \sim \pi\,,$$

vedi Fig. 1. Ponendo

$$k = \frac{\pi}{a-b} - \Delta\,;,$$

si trova che

$$\Delta \simeq \frac{b\pi}{a\,(a-b)}\,,$$

$$k = \frac{\pi}{a-b}(1-\frac{b}{a}),$$

Per l'energia del primo stato eccitato, troviamo dunque

$$E_1 \simeq \frac{\pi^2\hbar^2}{2m(a-b)^2}\,(1-\frac{2b}{a})\,.$$

(iii) La funzione d'onda del primo stato eccitato è dispari, ha la forma,

$$\psi_I(x) = A\,\sin k(x+a), \qquad \frac{k^2\hbar^2}{2m} = E, \qquad -a < x < -b, \tag{17}$$

$$\psi_{II}(x) = Dx, \qquad \frac{k'^2\hbar^2}{2m} = E - V_0, \qquad -b \le x \le b, \tag{18}$$

$$\psi_{III}(x) = -\psi_I(-x) = A\,\sin k(x-a), \qquad b < x < a. \tag{19}$$

Perché $\psi_{II}(x) = Dx$ sia una soluzione nella regione $-b < x < b$, è necessario che $k' = 0$, cioè, $E = V_0$. La condizione di continuità a $x = -b$ è:

$$\tan(a-b)k = -b\,k\,.$$

Questa è simile all'equazione approssimativa trovata al punto (ii), (16), ma questa volta è esatta per generici valori di a, b. Graficamente vediamo che comunque

$$\frac{\pi}{2} < (a-b)\,k < \pi\,.$$

Visto che $E = V_0$ per questo stato, otteniamo per V

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{8\,m\,(a-b)^2} < V_0 < \frac{\pi^2\hbar^2}{2\,m\,(a-b)^2}$$

Problema 2.

(i)

$$|\Psi\rangle = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}} |0,0\rangle \,.$$

$$P_{S_{tot}=0} = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{2} = \frac{1}{2}(1 - \sin 2\alpha) \,.$$

(ii)

$$\langle\Psi|f|\Psi\rangle = f_{11}\cos^2\alpha + f_{22}\sin^2\alpha$$

per cui

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos^2\alpha & 0 \\ 0 & \sin^2\alpha \end{pmatrix} \,.$$

(iii)

$$E = -\cos^2\alpha\log\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\log\sin^2\alpha \,.$$

La sua derivata è (vedi Fig. (2)):

$$\frac{\partial E}{\partial\alpha} = 2\cos\alpha\sin\alpha\,\log\left(\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) \,.$$

Le radici di

$$\frac{\partial E}{\partial\alpha} = 0$$

sono

$$\alpha = 0, \quad \pi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{4}, \quad \pm\frac{3\pi}{4},$$

dove

$$E(0) = E(\pi) = E(\frac{\pi}{2}) = E(\frac{3\pi}{2}) = 0\,; \tag{20}$$

$$E(\pm\frac{\pi}{4}) = E(\pm\frac{3\pi}{4}) = \log 2 \,. \tag{21}$$

Il primo caso (Eq. (20)), $\Psi = |\uparrow\downarrow\rangle$ oppure $\Psi = |\downarrow\uparrow\rangle$, corrisponde ad una funzione d'onda fattorizzata; l'osservatore che misura lo spin 1, ha una funzione d'onda (stato puro).

Vice versa, nel secondo caso (Eq. (21)), con $E = \log 2$, si ha una massima correlazione tra il primo spin (accessibile) e il secondo spin (non accessibile). Per l'osservatore di A, si tratta di uno stato misto. Si ha un massimo entanglement (correlazione quantistica)[3].

Problema 3.

(i) Definendo

$$\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r} - \frac{q\,\mathbf{E}}{m\,\omega^2}, \qquad \mathbf{p}' = \mathbf{p},$$

l'Hamiltoniana si riscrive come

$$H = \frac{\mathbf{p}'^2}{2m} + \frac{m\,\omega^2}{2}\mathbf{r}'^2 - \frac{q^2\,\mathbf{E}^2}{2\,m\,\omega^2} \ :$$

[3] E è nota come "entropia di entanglement." Essa rappresenta il grado di correlazion tra le due parti, e quindi per l'osservatore di un sottosistema, il grado di ignoranza.

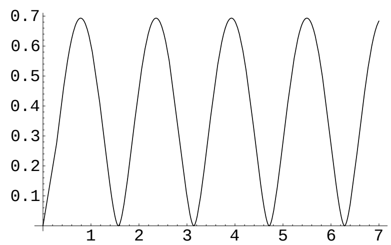


Figura 2:

il sistema è equivalente ad un oscillatore tridimensionale isotropo. Gli operatori di momento angolare,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}' \times \mathbf{p}'$$

ovviamente commutano con H, sono conservati.

(In realtà l'Hamiltoniana è invariante per transformazioni $U(3)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \to U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

dove U è una matrice unitaria 3×3, tale che

$$U^\dagger = U^{-1}, \qquad U^\dagger U = \mathbf{1}.$$

Quindi i nove generatori del gruppo $U(3)$ sono tutti operatori conservati.)

Anche la parità

$$\mathbf{r}' \to \Pi\, \mathbf{r}'\, \Pi^{-1} = -\mathbf{r}', \qquad \mathbf{p} \to \Pi\, \mathbf{p}\, \Pi^{-1} = -\mathbf{p},$$

commuta con l'Hamiltoniana.

(iii) Conviene prima scrivere come

$$\langle \psi(t)|\mathbf{r}|\psi(t)\rangle = \langle \psi(t)|\mathbf{r}'|\psi(t)\rangle + \frac{q\mathbf{E}}{m\omega^2} ,$$

e andare allo schema di Heisenberg nelle nuove coordinate,

$$\langle \psi(t)|\mathbf{r}'|\psi(t)\rangle = {}_H\langle \psi|\mathbf{r}'_H(t)|\psi\rangle_H .$$

L'equazione di Heisenberg è:

$$m\dot{\mathbf{r}}'_H = \mathbf{p}_H; \qquad \dot{\mathbf{p}}_H = -m\omega^2\, \mathbf{r}'_H . \tag{22}$$

con la soluzione:

$$\mathbf{r}'_H(t) = \mathbf{r}'_H(0)\, \cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\, \mathbf{p}_H(0)\, \sin\omega t = \mathbf{r}'\, \cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\, \mathbf{p}\, \sin\omega t . \tag{23}$$

Perciò:

$$\langle \psi(t)|\mathbf{r}'|\psi(t)\rangle = \langle \mathbf{r}'\rangle\, \cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\, \langle \mathbf{p}\rangle\, \sin\omega t .$$

In termini di $\langle \mathbf{r}\rangle$, si ha

$$\langle \psi(t)|\mathbf{r}|\psi(t)\rangle = [\, \langle \mathbf{r}\rangle - \frac{q\mathbf{E}}{m\omega^2}\,]\, \cos\omega t + \frac{1}{m\omega}\, \langle \mathbf{p}\rangle\, \sin\omega t + \frac{q\mathbf{E}}{m\omega^2} .$$