Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
10 settembre '08 (A.A. 07/08)

Tempo a disposizione: 3 ore.

Problema

In un modello a shell di nuclei, lo stato di un nucleo è descritto in termini di nucleoni (nucleone = protone o neutrone, ambedue di spin $1/2$) che si muovono indipendentemente in un potenziale efficace comune a simmetria centrale $V(r)$, come nell'approssimazione di elettroni indipendenti per gli atomi. Prendiamo come Hamiltoniana per un singolo nucleone:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(r), \qquad V(r) = \frac{m\omega^2}{2}\mathbf{r}^2 - V_0, \tag{1}$$

$$V_0 = 10\,\mathrm{MeV}, \qquad \omega\hbar = 1\,\mathrm{MeV}, \qquad m_p = m_n = m.$$

L'Hamiltoniana totale è semplicemente

$$H = \sum_{i=1}^{A} H^{(i)},$$

dove $H^{(i)}$ ha la forma della (1) con $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_i$ e $\mathbf{p} \to \mathbf{p}_i$.

(i) Il nucleo di Elio è composto da due protoni e due neutroni ($A = 4$). Calcolare l'energia dello stato fondamentale e del primo stato di eccitazione, *del nucleo*.

(ii) Discutere la degenerazione del primo livello di eccitazione (del nucleo).

(iii) Determinare i possibili valori del momento angolare orbitale totale, lo spin totale e la parità (L, S, $\mathcal{P}$) degli stati del primo livello eccitato (del nucleo dell'Elio).

(iv) Discutere l'effetto delle interazioni Coulombiane sulla degenerazione di cui al punto (ii).

Suggerimento: Sul punto (iv): anche se non è necessario fare il calcolo esplicito, aiuta considerare il valor medio del potenziale Coulombiano

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

dove $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_1$ sono le posizioni dei due protoni, nei vari stati del primo livello eccitato del punto (ii).

Soluzione

Problema 1.

(i) L'energia dello stato fondamentale e del primo stato di ecitazione per il singolo nucleone sono:

$$E^0 = -V_0 + \frac{3}{2}\omega\hbar = -8.5\,\text{MeV}; \tag{2}$$

$$E^1 = -V_0 + \frac{5}{2}\omega\hbar = -7.5\,\text{MeV}. \tag{3}$$

Avendo quattro stati di nucleone

$$|p\uparrow\rangle, \quad |p\downarrow\rangle, \quad |n\uparrow\rangle, \quad |n\downarrow\rangle \tag{4}$$

a disposizione, lo stato fondamentale dell'elio è quello in cui il livello (2) è occupato da quattro nucleoni, con l'energia $-34\,\text{MeV}$. Nel primo stato di eccitazione uno dei quattro nucleoni sarà nel secondo livello (3), con l'energia, $-33\,\text{MeV}$.

(ii) Il primo stato di eccitazione dell'oscillatore armonico tridimensionale è tre volte degenere,

$$|100\rangle, \quad |010\rangle, \quad |001\rangle \tag{5}$$

(o equivalentemente, $(\ell,m) = (1,1), (1,0), (1,-1)$).

1. Il nucleone che sta nel primo livello eccitato può essere un protone o un neutrone (fattore di degenerazione 2).
2. In *ciascun* caso, i due nucleoni dello stesso tipo (due neutroni, per es.) che restano nello stato fondamentale dell'oscillatore, devono essere nello stato di spin-singoletto (uno stato). Gli altri due nucleoni (per es., i due protoni) stanno uno in *uno dei tre* stati eccitati e l'atro nel livello fondamentale – con un fattore di degenerazione 3.
3. In ciascuno di questi casi, i due nucleoni in due orbite diverse, possono avere la funzione d'onda orbitale simmetrica o antisimmetrica

$$(\psi^{(ecc)}(1)\psi^{(fond)}(2) \pm \psi^{(ecc)}(2)\psi^{(fond)}(1))/\sqrt{2}, \tag{6}$$

per lo stato di spin $S_{pp} = 0$ (spin-singoletto) o $S_{pp} = 1$ (tripletto di spin), rispettivamente. Quasto introduce un ulteriore fattore 4.

Il grado di degenerazione totale è dunque:

$$2 \cdot 3 \cdot (3+1) = 24. \tag{7}$$

(iii) La funzione d'onda dell'elio nello stato fondamentale Ψ è semplicemente

$$\psi_{000}(r_1)\,\psi_{000}(r_2)\,\psi_{000}(r_3)\,\psi_{000}(r_4) \tag{8}$$

moltiplicato con la funzione d'onda di spin e di isospin, totalmente antisimmetrica rispetto alla permutazione dei quattro nucleoni. Ogni applicazione di $L_\pm$ o $S_\pm$ annulla lo stato: $\therefore L = 0$; $S = 0$. La partà è $+1$.

Nel primo stato di eccitazione uno dei nucleoni è nel primi livello di eccitazione di oscillatore armonico, con $\ell = 1$. Lo stato di momento angolare orbitale è $0 \otimes 0 \otimes 0 \otimes 1 = 1$. Perciò $L = 1$.

Per quanto riguarda lo spin, i quattro nucleoni possono a priori formare lo spin totale $S=0,\ S=1,$ o $S=2$. Il valore $S=2$ può essere esculso: avremmo in questo caso (per $S_z=2$) quattro nucleoni in stati di spin-isospin

$$|p\uparrow\rangle, \quad |p\uparrow\rangle, \quad |n\uparrow\rangle, \quad |n\uparrow\rangle, \tag{9}$$

ma è impossibile che tre di essi stiano nell'orbita più bassa, (000), senza violare il principio di esclusione di Pauli.

In conclusione, $(L,S)=(1,0)$ o $(L,S)=(1,1)$ e parità -1 nel primo stato di eccitazione del nucleo.

(iv) Consideriamo soltanto i due protoni (i neutroni non subiscono gli effetti Coulombiani). Le interazioni Coulombiane innalzano l'energia del nucleo. L'aumento è più grande in uno stato in cui le funzioni d'onda dei due protoni si sovrappongono di più. Perciò ci si aspetta che l'effetto (positivo) più grande si ha nei 12 stati in cui i due protoni sono nello stato fondamentale della (1).

L'effetto positivo ma in misura minore nei 3 stati in cui i due protoni, in due stati orbitali diversi, formano stati simmetrici orbitali.

Infine, l'effetto è più piccolo (il livello più basso) nel caso in cui i due protoni formano stati orbitali antisimmetrici e stati di spin-tripletto ($3\times 3=9$ stati).

In conclusione, il primo livello, 24 volte degere senza le interazioni Coulombiane, si divide in tre sottolivelli, con degenerazioni 9, 3 e 12, rispettivamente, in ordine ascendente di energia.