Appello di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
11 gennaio 2007 (A.A. 06/07)

Tempo a disposizione: 3 ore.
Problemi 1 e 2 per il recupero Compitino I; problemi 2 e 3 per il recupero Compitino II.
Per Appello I, risolvere Prob. 1 (ii) e (iii); Prob. 2 (i) - (iv) e Prob. 3 (i) - (iii).

Problema 1

Un oscillatore armonico unidimensionale

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\kappa x^2 \tag{1}$$

nello stato fondamentale, $|0\rangle$, perde ad un tratto $(t = 0)$ $\frac{3}{4}$ della sua massa, mentre la costante di richiamo κ resta invariata:

$$H_1 = \frac{2p^2}{m} + \frac{1}{2}\kappa x^2 \tag{2}$$

(i) Trovare la probabilità (P_0) che il sistema si trovi nello stato fondamentale del nuovo oscillatore H_1, immediatamente dopo il cambiamento della massa;

(ii) Introdurre la rappresentazione degli operatori di creazione e di distruzione, a, $a^\dagger$ per H_0 e b, $b^\dagger$ per H_1. Trovare la relazione tra $(b, b^\dagger)$ e $(a, a^\dagger)$. Verificare, come controllo del calcolo, che questa relazione sia compatibile con il fatto che $[a, a^\dagger] = 1$ e $[b, b^\dagger] = 1$

(iii) Scrivendo lo stato fondamentale dell'oscillatore originale, $|0\rangle$, in termini di autostati di H_1,

$$|0\rangle = \sum_n c_n |n\rangle_1,$$

e riscrivendo la condizione $a|0\rangle = 0$, in termini di b e $b^\dagger$, trovare la relazione di ricorrenza per c_n. Non è necessario risolverla.

(iv) Utilizzando alcune di queste relazioni, nonché il risultato del punto (i), trovare la probabilità (P_1, P_2) che il systema si trovi nei primi due stati eccitati del nuovo oscillatore H_1, immediatamente dopo il cambiamento della massa. (Nel caso in cui si risolve questo problema, senza aver risolto il punto (i), è sufficiente determinare le probabilità relative, P_1/P_0 e P_2/P_0.)

Problema 2.

Si consideri una particella di spin $\frac{1}{2}$. L'operatore di spin è data da

$$s_i = \frac{1}{2}\sigma_i,$$

dove σ_i, $i = x, y, z$ sono le matrici di Pauli.

(i) Dire quali sono gli autovalori di σ_x e di σ_y; determinare relativi autostati ($|\uparrow\rangle_x$, $|\downarrow\rangle_x$; $|\uparrow\rangle_y$, $|\downarrow\rangle_y$) , in termini degli autostati di σ_z, $|\uparrow\rangle_z$ o $|\downarrow\rangle_z$.

(ii) Invertendo le relazioni trovate in sopra, esprimere gli stati di s_z definiti, $|\uparrow\rangle_z$ o $|\downarrow\rangle_z$, in termini di $|\uparrow\rangle_x$ e $|\downarrow\rangle_x$, nonché in termini di $|\uparrow\rangle_y$ e $|\downarrow\rangle_y$.

Una particella di spin incognito decade a riposo in tre particelle, tutte di spin $\frac{1}{2}$. Assumete che i momenti angolari orbitali siano nulli: si devono tenere conto solo di spin. Supponiamo che lo stato sia descritto da

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_z|\uparrow\rangle_z|\uparrow\rangle_z - |\downarrow\rangle_z|\downarrow\rangle_z|\downarrow\rangle_z\right). \tag{3}$$

(iii) Lo stato (3) è un autostato di $\mathbf{S}_{tot}^2$? ($\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$) Se lo è, con quale autovalore? È un autostato di $S_{tot\,z}$? Se lo è, con quale autovalore?

(iv) Dire se lo stato (3) è un autostato dell'operatore

$$\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x} \qquad (\equiv \sigma_{1x}\otimes\sigma_{2x}\otimes\sigma_{3x})$$

e se lo è, dire qual'è l'autovalore.

(v) Dire se lo stato (3) è un autostato dell'operatore

$$\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y} \qquad (\equiv \sigma_{1x}\otimes\sigma_{2y}\otimes\sigma_{3y})$$

e se lo è, dire qual'è l'autovalore;

Problema 3.

Un atomo di idrogeno è "perturbato" da un termine

$$H = H_0 + H' \qquad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}, \quad H' = \lambda\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{r},$$

dove $\mathbf{s}$ è l'operatore di spin dell'elettrone.

(i) In presenza di H' quali degli operatori $\mathbf{s}^2$, $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{J}^2$, J_i sono conservati? La parità? [1] $\mathbf{J}$ è il momento angolare totale, $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$.

(ii) Dimostrare che nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno ψ_{100} (autostato di H_0) vale

$$\langle 100;\chi'|H'|100;\chi\rangle = 0.$$

dove χ, χ' sono autovalori $\pm 1/2$ di s_z.

(iii) Consideriamo gli stati di $n = 2$, $|2,\ell,m;\chi\rangle$, con $\ell = 1$. Dimostrare, utilizzando i risultati del punto (1), che vale

$$\langle 2,1,1;-\frac{1}{2}|H'|100;\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}\,\langle 2,1,0;\frac{1}{2}|H'|100;\frac{1}{2}\rangle = 0, \tag{4}$$

senza fare il calcolo degli elementi di matrice.

(iv) [*Opzionale*] Verificare la (4), facendo esplicito calcolo dei due elementi di matrice che ci appaiono.

[1] L'operatore di spin si comporta nella stessa maniera di un operatore di momento angolare orbitale, sotto parità.

Soluzione

Problema 1.

(i) Lo stato fondamentale di H_0 e quello di H_1 sono rispettivamente

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar}; \qquad \psi_0^{'} = \left(\frac{m^{'}\omega^{'}}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m^{'}\omega^{'} x^2/2\hbar};$$

La frequenza angolare dell'oscillatore prima e dopo il cambiamento della massa è,

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}, \qquad \omega^{'} = \sqrt{\frac{\kappa}{m^{'}}}, \qquad m^{'} = \frac{1}{4}m. \qquad m\omega = \sqrt{m\kappa}, \qquad m^{'}\omega^{'} = \sqrt{m^{'}\kappa} = \frac{\sqrt{m\kappa}}{2} = \frac{m\omega}{2}.$$

La detta probabilità è data da ($A \equiv \frac{m\omega}{\hbar}$)

$$|\langle\psi_0^{'}|\psi_0\rangle|^2 = \sqrt{\frac{A}{\pi}}\sqrt{\frac{A}{2\pi}}\,|\int dx\, e^{-Ax^2/2}\, e^{-Ax^2/4}|^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{A}{\pi}\frac{4\pi}{3A} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \simeq 0.9428$$

(ii) Paragonando la relazione tra x, p e $a, a^\dagger$ con quella tra x, p e $b, b^\dagger$ si trova

$$\frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} = b + b^\dagger; \qquad a - a^\dagger = \frac{b - b^\dagger}{\sqrt{2}},$$

da cui

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3b + b^\dagger), \qquad a^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{2}}(b + 3b^\dagger);$$
$$b = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3a - a^\dagger), \qquad b^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{2}}(3a^\dagger - a);$$

Per consistenza,

$$[b, b^\dagger] = \frac{1}{8}(9 - 1) = 1,$$

se si utilizza $[a, a^\dagger] = 1$.

(iii)

$$(3b + b^\dagger)\sum c_n |n\rangle_1 = 0$$

Utilizzando i noti elementi di matrice di b e di $b^\dagger$,

$$\sum c_n\,[3\sqrt{n}\,|n-1\rangle_1 + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle_1] = 0,$$

e proiettando questa relazione sullo stato $|n\rangle_1$ si trova la relazione di ricorrenza

$$3\sqrt{n+1}\,c_{n+1} + \sqrt{n}\,c_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Segue che $c_1 = c_3 = \ldots = 0$, e soltanto i coefficienti pari sono non nulli. Si può comprendere che i coefficienti dispari si annullano tutti, dal fatto che la funzione d'onda a $t = 0$ è pari.

(iv) Risulta dalla relazione di ricorrenza che

$$c_2 = -\frac{1}{3\sqrt{2}}c_0.$$

La probabilità che il sistema si trovi nel primo stato eccitato è zero; mentre quella per il secondo stato eccitato è:

$$P_2 = \frac{1}{18}P_0 = \frac{1}{18}\frac{4}{3\sqrt{2}} \simeq 0.05238$$

Problema 2.

(i) Gli autovalori di σ_x, σ_y sono ± 1, con autovettori

$$|\uparrow\rangle_x = |\sigma_x = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad |\downarrow\rangle_x = |\sigma_x = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$|\uparrow\rangle_y = |\sigma_y = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \qquad |\downarrow\rangle_y = |\sigma_y = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

Oppure con la notazione di spin "up" e "down",

$$|\uparrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_z + |\downarrow\rangle_z) \qquad |\downarrow\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_z - |\downarrow\rangle_z),$$

$$|\uparrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_z + i|\downarrow\rangle_z); \qquad |\downarrow\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_z - i|\downarrow\rangle_z),$$

(ii)

$$|\uparrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x); \qquad |\downarrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_x - |\downarrow\rangle_x);$$

$$|\uparrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_y + |\downarrow\rangle_y); \qquad |\downarrow\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}i}(|\uparrow\rangle_y - |\downarrow\rangle_y);$$

(iii) Visto che $S_{tot\,z} = \pm\frac{3}{2}$, $|\psi\rangle$ è un autostato di $\mathbf{S}^2_{tot}$ con autovalore $\frac{15}{4}$ (cioè, $S_{tot} = \frac{3}{2}$); mentre ovviamente non è un autostato di $S_{tot\,z}$.

(iv) Per vedere l'effetto dell'operatore $\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}$ sullo stato $|\psi\rangle$ scrivo quest'ultimo in termini di autostati di σ_{1x}, σ_{2x}, σ_{3x} :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{4}[(|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x)(|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x)(|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x) - (|\uparrow\rangle_x - |\downarrow\rangle_x)(|\uparrow\rangle_x - |\downarrow\rangle_x)(|\uparrow\rangle_x - |\downarrow\rangle_x)] \\ &= \frac{1}{2}[|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle] \end{aligned} \tag{5}$$

Ciascun termine è un autostato dell'operatore $\sigma_{1x}\sigma_{2x}\sigma_{3x}$ con autovalore -1: lo stesso vale per $|\psi\rangle$.

(v) Per vedere l'effetto dell'operatore $\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}$ sullo stato $|\psi\rangle$ scrivo quest'ultimo in termini di autostati di σ_{1x}, σ_{2y}, σ_{3y} :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{4}[(|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x)(|\uparrow\rangle_y + |\downarrow\rangle_y)(|\uparrow\rangle_y + |\downarrow\rangle_y) + (|\uparrow\rangle_x - |\downarrow\rangle_x)(|\uparrow\rangle_y - |\downarrow\rangle_y)(|\uparrow\rangle_y - |\downarrow\rangle_y)] \\ &= \frac{1}{2}[|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle] \end{aligned} \tag{6}$$

Ciascun termine è un autostato dell'operatore $\sigma_{1x}\sigma_{2y}\sigma_{3y}$ con autovalore $+1$: lo stesso vale per $|\psi\rangle$.

Nota: lo stato $|\psi\rangle$ è stato considerato da Mermin (Am. J. Phys. 58 (1990) 731), per produrre una versione più forte dell'argomento di Bell sulla questione che riguarda le teorie con variabili nascoste.

Problema 3.

(i) $\mathbf{s}^2$, $\mathbf{J}^2$ e J_i sono conservate. $\mathbf{L}^2$ non è conservato. $\mathbf{s}^2$ commuta con H' perché $\mathbf{s}^2$ commuta con ogni sua componente. Per vedere che $\mathbf{J}^2$ e J_i commutano con H',

$$[J_z, s_x x + s_y y + s_z z] = [s_z + L_z, s_x x + s_y y] = i s_y x - i s_x y + i s_x y - i s_y x = 0.$$

La parità non è conservata.

(ii) $\langle 100; \chi^{'} | H' | 100; \chi \rangle$ si annulla per parità. (L'integrando è dispari.)

(iii) Visto che $H^{'}$ commuta con $\mathbf{J}^2$, e con J_z, lo stato $H'|100\,\frac{1}{2}\rangle$ ha gli stessi numeri quantici di $|100\,\frac{1}{2}\rangle$, cioè, $(J, J_z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Tra gli stati di $n = 2$, $\ell = 1$ la combinazione

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\,|2,1,1;-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|2,1,0;\frac{1}{2}\rangle$$

è uno stato di spin totale $J = \frac{3}{2}$: esso è ortogonale ad ogni stato di spin $(J, J_z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

N.B L'affermazione generale di questo tipo di ragionamento è il contenuto del teorema di Wigner-Eckart.

(iv)

$$\langle 2,1,1;-\frac{1}{2}|H^{'}|100;\frac{1}{2}\rangle = \lambda\,\langle 2,1,1;-\frac{1}{2}|s_x x + s_y y|100;\frac{1}{2}\rangle.$$

$$\langle 2,1,0;\frac{1}{2}|H^{'}|100;\frac{1}{2}\rangle = \lambda\,\langle 2,1,1;\frac{1}{2}|s_z z|100;\frac{1}{2}\rangle.$$

$$s_x x + s_y y = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & x-iy \\ x+iy & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_z z = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & -z \end{pmatrix},$$

perrciò ($r_B = 1$)

$$\langle 2,1,1;-\frac{1}{2}|H^{'}|100;\frac{1}{2}\rangle = \frac{\lambda}{2}\langle 2,1,1|x+iy|100\rangle = \frac{\lambda}{2}\int dr\,r^3\,R_{2,1}R_{1,0}\int d\cos\theta\,d\phi\,Y^*_{1,1}\sin\theta\,e^{i\phi}\,Y_{0,0},$$

$$\langle 2,1,0;\frac{1}{2}|H^{'}|100;\frac{1}{2}\rangle = \frac{\lambda}{2}\langle 2,1,0|z|100\rangle = \frac{\lambda}{2}\int dr\,r^3\,R_{2,1}R_{1,0}\int d\cos\theta\,d\phi\,Y^*_{1,0}\cos\theta\,Y_{0,0}.$$

Gl integrali sono elementari. Visto che si deve dimostrare la relazione (4), la parte radiale (comune) è irrelevante. Gli integrali angolari danno in due casi

$$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,2\pi\int d\cos\theta\,\sin^2\theta = -\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,2\pi\int d\cos\theta\,\cos^2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$