

Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa

11 gennaio 2012 (A.A. 11/12)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1

Un nucleo O di spin-parità $\frac{3}{2}^-$ decade spontaneamente, *a riposo*, in due nuclei A e B di spin-parità

$$(J_A)^{P_A} = \frac{1}{2}^-, \quad (J_B)^{P_B} = 0^+. \quad (1)$$

(Nel caso di decadimento α il nucleo B è la particella α .)

- (i) Assumendo che sia il momento angolare che la parità siano conservati, scrivere la funzione d'onda dello stato finale, separando la parte radiale (incognita), e esplicitando la dipendenza orbitale/spin. Determinare la distribuzione angolare della particella α , assumendo che il nucleo O prima di decadere si trovasse nello stato $(J, J_z) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.
- (ii) Determinare le probabilità di trovare il nucleo A in vari stati di spin, i.e., di $s_{A,z} = \pm \frac{1}{2}$, supponendo che l'apparato à la Stern-Gerlach sia posto nella direzione generica (θ, ϕ) .
- (iii) Assumendo sempre che il nucleo originale sia nello stato $(J, J_z) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, determinare le probabilità che il nucleo A sia polarizzato invece nella direzione del suo moto; i.e., trovare la probabilità

$$P(\frac{\mathbf{s}_A \cdot \mathbf{p}}{p} = +\frac{1}{2}). \quad (2)$$

Problema 2

Consideriamo un sistema metastabile, che inizialmente si trova in uno stato descritto dalla funzione d'onda Φ_0 . La probabilità che dopo un intervallo di tempo t il sistema non è decaduto è data da

$$P_0(t) = |\langle \Phi_0 | e^{-iHt/\hbar} | \Phi_0 \rangle|^2. \quad (3)$$

- (i) Dimostrare che per t sufficientemente piccolo la dipendenza da t è quadratica, i.e.,

$$P_0(t) = 1 - ct^2 + \dots, \quad c > 0. \quad (4)$$

- (ii) Suddividendo l'intervallo t piccolo per cui vale la formula (4) qui sopra, ulteriormente in N sottointervalli

$$\Delta = \frac{t}{N}, \quad (5)$$

e considerando il limite

$$N \rightarrow \infty, \quad \Delta \rightarrow 0, \quad t \text{ fisso}, \quad (6)$$

dimostrare che se il sistema viene osservato ripetutamente la probabilità che esso resti nello stato iniziale tende a 1 (detto l'“effetto Zenone quantistico”).

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

J	J	$\dots$
M	M	$\dots$
m_1	m_2	$\dots$
m_1	m_2	$\dots$
Coefficients		

$1/2 \times 1/2$

1	0
+1/2 +1/2	0
-1/2 +1/2	1
-1/2 -1/2	1

$1 \times 1/2$

3/2	3/2	1/2
+1 +1/2	1	+1/2 +1/2
+1 -1/2	1/3	2/3
0 +1/2	2/3 -1/3	3/2 1/2
	0 -1/2	2/3 1/3
	-1 +1/2	1/3 -2/3

2×1

3	2	1
+2 +1	1	+2 +2
+2 0	1/3 2/3	3 2 1
+1 +1	2/3 -1/3	+1 +1 +1

1×1

2	1	0
+1 +1	1	+1 +1
+1 0	1/2 1/2	2 1 0
0 +1	1/2 -1/2	0 0 0

$Y_\ell^m = (-1)^m Y_\ell^{m*}$

0	1	2
0 -1	1/6 1/2 1/3	2 1 0
0 0	2/3 0 -1/3	0 0 0
-1 +1	1/6 -1/2 1/3	-1 -1

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$

$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$

$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$

$Y_2^2 = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$

$3/2 \times 1/2$

2	2	1
+3/2 +1/2	1	+1 +1
+3/2 -1/2	1/4 3/4	2 1
+1/2 +1/2	3/4 -1/4	0 0

$3/2 \times 1$

5/2	5/2	3/2
+3/2 +1	1	+3/2 +3/2
+3/2 0	2/5 3/5	5/2 3/2
+1/2 +1	3/5 -2/5	+1/2 +1/2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

$2 \times 3/2$

7/2	7/2	5/2
+2 +3/2	1	+5/2 +5/2
+2 +1/2	3/7 4/7	7/2 5/2 3/2
+1 +3/2	4/7 -3/7	+3/2 +3/2

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

3	3	2
+3/2 +3/2	1	+2 +2
+3/2 +1/2	1/2 1/2	3 2 1
+1/2 +3/2	1/2 -1/2	+1 +1 +1

2×2

4	4	3
+2 +2	1	+3 +3
+2 +1	1/2 1/2	4 3 2
+1 +2	1/2 -1/2	+2 +2 +2

$3/2 \times 3/2$

SOLUZIONE

Problema 1.

- (i) L'unico valore consistente con la conservazione del momento angolare e della parità è $\ell = 2$. La funzione d'onda dello stato finale prende la forma

$$\begin{aligned}\Psi &= R(r) \left[\sqrt{\frac{4}{5}} Y_{2,2}(\theta, \phi) |\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{5}} Y_{2,1}(\theta, \phi) |\uparrow\rangle \right] \\ &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \left[\sin \theta e^{2i\phi} |\downarrow\rangle + \cos \theta e^{i\phi} |\uparrow\rangle \right] \\ &\sim \Psi_{norm} = \sin \theta e^{i\phi} |\downarrow\rangle + \cos \theta |\uparrow\rangle\end{aligned}\quad (7)$$

La distribuzione angolare della particella α è data da

$$\left[\frac{4}{5} |Y_{2,2}|^2 + \frac{1}{5} |Y_{2,1}|^2 \right] d\Omega = \left[\frac{3}{8\pi} \sin^4 \theta + \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] d\Omega = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta d\Omega. \quad (8)$$

- (ii) Dalla (7) si trova che le probabilità per il vari valori di s_{Az} sono date da

$$P_{\uparrow} = \cos^2 \theta; \quad P_{\downarrow} = \sin^2 \theta; \quad (9)$$

- (iii) Occorre trovare la relazione tra gli stati di spin $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ e gli stati di spin indirizzato a $\pm \hat{p} = \pm(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ assumendo che il nucleo A si osservi nella direzione $(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Come è noto, questi sono dati da

$$|+\rangle = |s_A \cdot \hat{p} = +\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{-i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle; \quad (10)$$

$$|-\rangle = |s_A \cdot \hat{p} = -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{-i\phi/2} \sin \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle - e^{i\phi/2} \cos \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle; \quad (11)$$

La probabilità richiesta è

$$P = |\langle + | \Psi_{norm} \rangle|^2 = (\cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2})^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2}. \quad (12)$$

Problema 2.

- (i) Sviluppando $e^{-iHt/\hbar}$ per t piccolo

$$e^{-iHt/\hbar} = 1 - iHt/\hbar - \frac{t^2}{2} H^2 + \dots \quad (13)$$

per cui

$$\langle \Phi_0 | e^{-iHt/\hbar} | \Phi_0 \rangle = 1 - \frac{it}{\hbar} \langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle - \frac{t^2}{2\hbar^2} \langle \Phi_0 | H^2 | \Phi_0 \rangle + \dots \quad (14)$$

Nel secondo termine,

$$\frac{t^2}{2\hbar^2} \langle \Phi_0 | H^2 | \Phi_0 \rangle = \frac{t^2}{2\hbar^2} \langle \Phi_0 | H \cdot H | \Phi_0 \rangle = \frac{t^2}{2\hbar^2} [|\langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle|^2 + \sum_{n \neq 0} |H_{n0}|^2] \quad (15)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}|\langle \Phi_0 | e^{-iHt/\hbar} | \Phi_0 \rangle|^2 &= 1 + \frac{t^2}{\hbar^2} |\langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle|^2 - \frac{t^2}{\hbar^2} [|\langle \Phi_0 | H | \Phi_0 \rangle|^2 + \sum_{n \neq 0} |H_{n0}|^2] \\ &= 1 - \frac{t^2}{\hbar^2} \sum_{n \neq 0} |H_{n0}|^2\end{aligned}\quad (16)$$

che dimostra la formula(4).

(ii) Dopo N misure ripetute, la probabilità che il sistema si trovi nello stato originale è:

$$P = (1 - c\Delta^2)^N = (1 - c\frac{t^2}{N^2})^N \sim e^{-ct^2/N} \rightarrow 1. \quad (17)$$