

Meccanica Quantistica

11 gennaio 2017 (A.A. 16/17)

Tempo a disposizione: 3 ore

Per il recupero del Compitino I risolvere il Problemi 1 e il Problemi 2 ;
Per lo scritto regolare risolvere il Problema 2 e il Problema 3.

Problema 1

Una particella di massa m si muove in due dimensioni, sottoposta al potenziale,

$$V(x, y) = -f\delta(x) - g\delta(y), \quad f > g > 0. \quad (1)$$

Discutere lo spettro dell'energia. Per lo spettro discreto, trovare l'energia (o le energie) e la(e) funzione(i) d'onda relativa(e). Per lo spettro continuo classificare le soluzioni secondo il tipo (se la particella è localizzata o meno in una o nell'altra direzione), dando per ciascun tipo di soluzione lo spettro dell'energia relativo e la degenerazione del livello energetico.

Problema 2

Un oscillatore armonico di massa m (e di carica q), la frequenza angolare ω , e sottoposto ad un campo elettrico esterno costante \mathcal{E}

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - q\mathcal{E}x, \quad (2)$$

si trova nel suo stato fondamentale.

(i) Dire quali sono l'energia e la funzione d'onda di questo stato.

A $t = 0$ viene spento istantaneamente il campo elettrico. La funzione d'onda resta quella al punto (i).

(ii) Qual'è la probabilità di trovare il sistema nello stato fondamentale del nuovo Hamiltoniano (con $\mathcal{E} = 0$), a $t = 0_+$?

(iii) Come variano col tempo $t > 0$ le probabilità di trovare il sistema nei vari autostati n del nuovo Hamiltoniano?

(iv) Discutere come varia il valor medio della posizione dell'oscillatore, $\langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle$, con il tempo a $t > 0$.

Problema 3

Una particella con spin $\frac{1}{2}$ e con momento magnetico μ si muove soggetta ad un campo magnetico \mathbf{B} diretto lungo l'asse z uniforme e costante:

$$\mathbf{B} = (0, 0, B_0).$$

- 1) Scrivere l'Hamiltoniana, H_0 , tenendo conto solo del grado di libertà di spin.
- 2) Quali sono gli autovalori e gli autostati relativi di H_0 ?

La particella si trova all'inizio nello stato $s_z = -1/2$.

La particella si muove di moto rettilineo con velocità costante V_0 lungo l'asse x , i.e.,

$$x = x(t) = V_0 t . \quad (3)$$

N.B. Il moto della particella in direzione x è trattato qui classicamente.

Nell'intorno della coordinata $x = 0$, c'è un campo magnetico aggiuntivo e debole,

$$\tilde{\mathbf{B}} = (0, B_1 e^{-|x|/a} \cos \omega t, 0); \quad B_1 \ll B_0 . \quad (4)$$

Questa zona è indicata nel seguito come “apparato sperimentale”.

- 3) Scrivere la forma del potenziale perturbativo $V(t)$ che la particella viene sottoposta durante l'attraversamento dell'apparato.
- 4) Si calcoli in teoria delle perturbazioni al primo ordine in B_1 la probabilità di inversione dello spin nell'attraversare l'apparato sperimentale.
- 5) Si spieghi come la dipendenza da ω del risultato possa essere utilizzata per una misura di μ e si indichi come l'errore sulla misura dipende dalla lunghezza a .
- 6) Si supponga di costruire un esperimento in cui l'apparato precedente venga ripetuto con un altro identico a distanza $b \gg a$, i.e., intorno alla coordinata $x = b$. Discutere come cambia il risultato per la probabilità di inversione dello spin, assumendo che la misura di s_z sia eseguita a $x \gg b$, i.e., dopo che la particella ha attraversato ambedue gli apparati.

Soluzione

Problema 1

Con la separazione delle variabili,

$$\Psi(x, y) = \psi(x) \phi(y), \quad (5)$$

l'equazione di Schrödinger diventa

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - f \delta(x) \right] \psi(x) = E_1 \psi(x); \quad (6)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - g \delta(y) \right] \phi(y) = E_2 \phi(y); \quad (7)$$

$$E = E_1 + E_2. \quad (8)$$

Le soluzioni discrete e continue delle (6),(7) sono note. Dunque lo spettro del sistema è seguente:

(i) Lo spettro discreto: c'è un unico stato legato con

$$E_0 = -\frac{mf^2}{2\hbar^2} - \frac{mg^2}{2\hbar^2}, \quad (9)$$

$$\Psi_0(x, y) = \sqrt{\kappa_1 \kappa_2} e^{-\kappa_1 |x| - \kappa_2 |y|}, \quad \kappa_1 \equiv \frac{mf}{\hbar^2}, \quad \kappa_2 \equiv \frac{mg}{\hbar^2}. \quad (10)$$

(ii) Lo spettro continuo: il primo tipo di soluzioni descrive uno stato localizzato in y ,

$$\phi(y) = \sqrt{\kappa_2} e^{-\kappa_2 |y|}, \quad (11)$$

mentre uno stato di continuo in x , con l'energia $E_1 \geq 0$ e con doppia degenerazione per ogni valore di $E_1 > 0$, quindi con energia totale

$$E \in \left[-\frac{mg^2}{2\hbar^2}, \infty \right]. \quad (12)$$

Ogni stato con $E > -\frac{mg^2}{2\hbar^2}$ è doppiamente degenere.

(iii) Il secondo tipo di soluzioni descrive uno stato localizzato in x e non localizzato in y , con energia totale

$$E \in \left[-\frac{mf^2}{2\hbar^2}, \infty \right]. \quad (13)$$

Ogni stato con $E > -\frac{mf^2}{2\hbar^2}$ è doppiamente degenere.

(iv) Il terzo tipo di soluzioni corrisponde a stati di diffusioni sia in direzione x che in y , con quadrupla degenerazione per impulsi non nulli ($|k_1| \neq 0, |k_2| \neq 0$), con l'energia

$$E \in [0, \infty]. \quad (14)$$

Problema 2

(i) Scrivendo l'Hamiltoniana come

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x-x_0)^2 - \frac{m\omega^2}{2}x_0^2, \quad x_0 \equiv \frac{qE}{m\omega^2}, \quad (15)$$

si trova che lo stato fondamentale di questo oscillatore è

$$E_0 = \frac{\omega\hbar}{2} - \frac{q^2 E^2}{2m\omega^2}, \quad \psi_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}. \quad (16)$$

(ii) Lo stato fondamentale del nuovo Hamiltoniano è:

$$\tilde{\psi}_0(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \quad (17)$$

La probabilità richiesta è:

$$P_0 = |\langle \tilde{\psi}_0 | \psi_0 \rangle|^2 = \frac{m\omega}{\pi\hbar} \left| \int dx \tilde{\psi}_0^* \psi_0 \right| = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x_0^2} \quad (18)$$

(iii) Le probabilità in questione non variano con il tempo.

(iv) La funzione d'onda evolve nel tempo in maniera non banale, perché $\psi_0(x)$ non è autostato del nuovo Hamiltoniano. Scrivendo

$$\psi_0(x) = \sum_n c_n \tilde{\psi}_n(x) \quad (19)$$

esso evolve come

$$\psi_0(x) \rightarrow \psi(x,t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \tilde{\psi}_n(x). \quad (20)$$

Il pacchetto d'onda Gaussiano (16) oscilla attorno all'origine: agli istanti

$$t_k = \frac{\pi}{\omega}(2k+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (21)$$

il pacchetto d'onda è incentrato alla posizione speculare,

$$x = -x_0; \quad (22)$$

mentre a istanti corrispondenti ai periodi classici

$$t_k = \frac{2\pi k}{\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (23)$$

il pacchetto d'onda ha la stessa forma di quella originale a $t = 0$.

Il valor medio di x segue l'andamento dell'oscillatore classico,

$$\langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle = x_0 \cos \omega t, \quad (24)$$

come si dimostra facilmente andando nello schema di Heisenberg, e usando

$$\langle \psi(0) | x | \psi(0) \rangle = x_0, \quad \langle \psi(0) | p | \psi(0) \rangle = 0. \quad (25)$$

Problema 3

La particella si muove di moto rettilineo e possiamo trascurare l'influsso sul moto del campo magnetico, quindi possiamo porre $x = V_0 t$.

L'Hamiltoniana del sistema, relativa allo spin, è:

$$H = -\mu B_0 s_z - \mu B_1 s_y = -\frac{1}{2} \mu B_0 \begin{pmatrix} 1 & -i \frac{B_1}{B_0} e^{-V_0 |t|/a} \cos(\omega t) \\ i \frac{B_1}{B_0} e^{-V_0 |t|/a} \cos(\omega t) & -1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

Porremo

$$\hbar \omega_0 = \mu B_0, \quad \hbar \omega_1 = \mu B_1. \quad (27)$$

Lo stato iniziale e finale hanno energia

$$E_i = E_{\uparrow} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0; \quad E_f = E_{\downarrow} = -\frac{1}{2} \hbar \omega_0$$

Il potenziale di perturbazione è

$$V = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \mu B_1 e^{-V_0 |t|/a} \cos(\omega t) \\ i \mu B_1 e^{-V_0 |t|/a} \cos(\omega t) & -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

L'ampiezza di probabilità per passare dallo stato i allo stato f è

$$a_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(E_f - E_i)} V_{fi}(t) dt = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} V_{21}(t) dt$$

Nel fare l'integrale possiamo limitarci al termine risonante ottenendo

$$a_{fi}^{(1)} = \frac{1}{4} \mu B_1 \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-V_0 |t|/a} e^{i\omega t} dt = \frac{\omega_1}{2} \frac{V_0/a}{(\omega - \omega_0)^2 + V_0^2/a^2} \quad (29)$$

e quindi per la probabilità

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{1}{4} \omega_1^2 \frac{V_0^2}{a^2} \frac{1}{((\omega - \omega_0)^2 + V_0^2/a^2)^2} \quad (30)$$

Il risultato è una curva risonante per $\omega = \omega_0$ quindi misurando la frequenza di risonanza si ha una misura del momento magnetico μ . In prossimità della risonanza possiamo scrivere

$$((\omega - \omega_0)^2 + V_0^2/a^2)^2 \simeq \frac{V_0^4}{a^4} + 2(\omega - \omega_0)^2 \frac{V_0^2}{a^2} = 2 \frac{V_0^2}{a^2} \left((\omega - \omega_0)^2 + \frac{V_0^2}{2a^2} \right)$$

quindi

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{1}{8} \omega_1^2 \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{V_0^2}{2a^2}} \quad (31)$$

che è una Lorentziana con larghezza

$$\Gamma = \sqrt{2} \frac{V_0}{a}$$

che dà l'ordine di grandezza l'incertezza sulla misura. Visto che $\frac{a}{V_0}$ è il tempo di attraversamento dell'apparato della particella, si può interpretare questo risultato come un esempio di relazione di indeterminazione energia-tempo,

$$\delta E \cdot \delta t \sim \hbar. \quad (32)$$

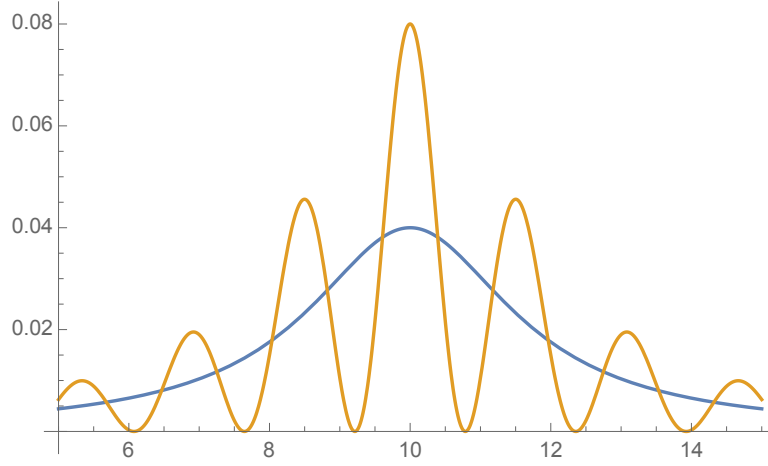


Figura 1:

La presenza di un secondo apparecchio significa un campo centrato a $x = b$, cioè del tipo

$$B_1 e^{-|x-b|/a} \cos \omega t \rightarrow B_1 e^{-|V_0 t - b|/a} \cos \omega t .$$

Per l'ampiezza di diffusione, il secondo apparecchio contribuisce con

$$a_{fi}^{(1)'} = \frac{1}{4} \mu B_1 \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 t} e^{-(|V_0 t - b|/a)} e^{i\omega t} . \quad (33)$$

Cambiando variabili in $t = \tau + \frac{b}{V_0}$ si ha lo stesso integrale di prima a meno di una fase

$$\begin{aligned} a_{fi}^{(1)'} &= \frac{1}{4} \mu B_1 \frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 \tau} e^{-|V_0 \tau|/a} e^{i\omega \tau} e^{i(\omega - \omega_0)b/V_0} \\ &= \frac{1}{4} \omega_1 \frac{2V_0/a}{(\omega - \omega_0)^2 + V_0^2/a^2} e^{i(\omega - \omega_0)b/V_0} \end{aligned} \quad (34)$$

Considerata l'approssimazione $b \gg a$, l'ampiezza totale è semplicemente la somma di contributi dei due apparecchi (29) e (34) :

$$a_{fi} = \frac{\omega_1}{2} \frac{V_0/a}{(\omega - \omega_0)^2 + V_0^2/a^2} \left(1 + e^{i(\omega - \omega_0)b/V_0} \right) . \quad (35)$$

La probabilità di spin-flip è dunque

$$P_{i \rightarrow f} \simeq \frac{\omega_1^2}{2} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{V_0^2}{2a^2}} \cos^2 \frac{(\omega - \omega_0)}{2V_0/b} . \quad (36)$$

È da notare che l'interferenza tra gli effetti dei due apparecchi, tipica di meccanica quantistica, produce i nodi (gli zeri) nella probabilità, migliorando di conseguenza la risoluzione dell'apparecchio (la precisione della misura di $\mu = B_0/\hbar\omega_0$) da $\delta\omega_0 \sim \frac{V_0}{a}$ a $\delta\omega_0 \sim \frac{V_0}{b}$.

Vedi la Fig. 1 (per $b = 10a$).