Appello di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
12 giugno 2006 (A.A. 05/06)

(Tempo a disposizione: 3 ore.)

Problema 1

(1.1)

Un sistema di due spin $\frac{1}{2}$ è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = A\,\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 - \mu \mathbf{B} \cdot (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2), \qquad \mathbf{B} = (0, 0, B). \tag{1}$$

Determinare lo spettro (i livelli di energia e le autofunzioni).

(1.2)

Un sistema di tre spin $\frac{1}{2}$ è descritto dall'Hamiltoniana (**B** è come nel problema (1.1)):

$$H = \lambda(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) \cdot \mathbf{s}_3 - \kappa(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_1) - \mu \mathbf{B} \cdot (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3). \tag{2}$$

(i) Quali, tra gli operatori composti da componenti di $\mathbf{S} \equiv \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ e da $\mathbf{T} \equiv \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$, commutano con H e tra loro (oppure, quali sono i buon numeri quantici)?

(ii) Determinare lo spettro (i livelli di energia, la degenerazione e le autofunzioni) come funzione di $\lambda, \kappa, \mu B$;

(iii) Discutere qual'è lo stato fondamentale, a seconda dei valori relativi di questi parametri. Si assuma che μB, λ, κ siano tutti positivi.

Problema 2.

Un oscillatore unidimensionale con frequenza angolare ω e con massa m, si trova all'istante $t = 0$ in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = \sqrt{c}\, e^{-c|x|}, \qquad c > 0. \tag{3}$$

(i) Determinare il valor medio degli operatori x^2 e p^2 nello stato (3).

(ii) Determinare il valor medio dell'operatore x^2, all'istante t.

Usare lo schema di Heisenberg.

Soluzione

Problema 1.

(1.1)

$$H = \frac{A}{2}\,(\mathbf{S}^2 - \frac{3}{2}) - \mu B S_z, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2. \tag{4}$$

Gli autostati di H sono stati con (S, S_z) definiti, $|S, S_z\rangle$.

(i) $|1,1\rangle$: $E = \frac{A}{4} - \mu B$;

(ii) $|1,0\rangle$: $E = \frac{A}{4}$;

(iii) $|1,-1\rangle$: $E = \frac{A}{4} + \mu B$;

(iv) $|0,0\rangle$: $E = -\frac{3A}{4}$.

(1.2)

(i)

$$H = \frac{\lambda}{2}\,[\mathbf{T}^2 - \mathbf{S}^2 - \frac{3}{4}] - \frac{\kappa}{2}\,[\mathbf{T}^2 - \frac{9}{4}] - \mu B T_z. \tag{5}$$

Perciò l'insieme di operatori che commutano tra loro e con H è

$$\mathbf{S}^2, \quad \mathbf{T}^2, \quad T_z. \tag{6}$$

Per dimostrare che $\mathbf{S}^2$ commuta sia con $\mathbf{T}^2$ che con T_z, basta osservare che

$$[\mathbf{S}^2, T_i] = [\mathbf{S}^2, S_i + s_{3\,i}] = 0, \quad \forall i. \tag{7}$$

(ii) Gli autostati sono etichettati da tre numeri quantici S, T, T_z, con energia

$$H = \frac{\lambda - \kappa}{2}\,T\,(T+1) - \frac{\lambda}{2}\,S\,(S+1) - \mu B T_z - \frac{3\,\lambda}{8} + \frac{9\,\kappa}{8}\,: \tag{8}$$

(a) $|1, \frac{3}{2}, m\rangle$:

$$E = \frac{15(\lambda - \kappa)}{8} - \lambda - \mu B m = \frac{7\,\lambda - 15\kappa}{8} - \mu B m, \qquad m = \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{1}{2}; \tag{9}$$

(b) $|1, \frac{1}{2}, m\rangle$:

$$E = \frac{3\,(\lambda - \kappa)}{8} - \lambda - \mu B m = \frac{-5\,\lambda - 3\,\kappa}{8} - \mu B m \qquad m = \pm\frac{1}{2}; \tag{10}$$

(c) $|0, \frac{1}{2}, m\rangle$:

$$E = \frac{3\,(\lambda - \kappa)}{8} - \mu B m, \qquad m = \pm\frac{1}{2}. \tag{11}$$

(iii) Per vedere quale di questi stati ha l'energia più bassa, basta considerare lo stato di m massimo in ciascuno di (a), (b), (c), cioè: la competizione è fra i tre stati

(A) $|1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \rangle$:

$$E_A = \frac{7\,\lambda - 15\kappa}{8} - \frac{3\,\mu B}{2}; \tag{12}$$

(B) $|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$:

$$E_B = \frac{-5\,\lambda - 3\,\kappa}{8} - \frac{\mu B}{2}; \tag{13}$$

(C) $|0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$:

$$E_C = \frac{3\,(\lambda-\kappa)}{8} - \frac{\mu B}{2}. \tag{14}$$

Si vede subito che $E_B < E_C$ sempre, perciò lo stato C può essere scartato subito. D'altra parte,

$$E_A - E_B = \frac{3}{2}(\lambda-\kappa) - \mu B. \tag{15}$$

Dunque lo stato fondamentale è lo stato B, $|1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle$, se

$$\lambda-\kappa > \frac{2\mu B}{3}; \tag{16}$$

invece lo stato fondamentale è lo stato A, $|1,\frac{3}{2},\frac{3}{2},\rangle$, se

$$\lambda-\kappa < \frac{2\mu B}{3}. \tag{17}$$

Essi sono degeneri se $\lambda-\kappa = \frac{2\mu B}{3}$.

Questi risultati si possono capire se notiamo che nella (2) il termine di λ cerca di massimizzare il valore di S a scapito di T, mentre il termine di κ cerca di allineare gli spin al massimo (T al più grande possibile). La competizione di queste due tendenze determina i risultati sopra menzionati.

2.

(i)

$$\langle x^2\rangle = 2\,c\int_0^\infty dx x^2\, e^{-2cx} = 2\,c\,\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\int_0^\infty dx\, e^{-\lambda x}|_{\lambda=2\,c} = \frac{4\,c}{\lambda^3} = \frac{1}{2\,c^2}. \tag{18}$$

Per calcolare il valor medio di p^2, si può procedere con il calcolo diretto, ma bisogna stare attenti:

$$\psi = \sqrt{c}\,[\,\theta(x)\,e^{-cx} + \theta(-x)\,e^{cx}\,] \tag{19}$$

$$p\,\psi = -i\hbar\,c\sqrt{c}\,[-\theta(x)\,e^{-cx} + \theta(-x)\,e^{cx}]; \tag{20}$$

$$\langle p^2\rangle = ||p\,\psi|| = \hbar^2\,c^3\,2\int_0^\infty e^{-2\,cx} = c^2\,\hbar^2. \tag{21}$$

Oppure

$$\begin{aligned} p^2\,\psi &= -\hbar^2\,c\sqrt{c}\,\frac{\partial}{\partial x}[-\theta(x)\,e^{-cx} + \theta(-x)\,e^{cx}] & (22)\\ &= -\hbar^2\,c\sqrt{c}\,[\,c\,\{\theta(x)\,e^{-cx} + \theta(-x)\,e^{cx}\} - 2\,\delta(x)\,] & (23) \end{aligned}$$

$$\langle\psi|p^2|\psi\rangle = -\hbar^2\,c^2 + 2\hbar^2\,c^2 = \hbar^2\,c^2. \tag{24}$$

Oppure si potrebbe usare il fatto che la funzione d'onda ψ è l'autostato del sistema

$$H_\delta = \frac{p^2}{2m} - g\,\delta(x), \qquad c = \frac{m\,g}{\hbar^2}, \quad E_0 = -\frac{m\,g^2}{2\,\hbar^2}, \tag{25}$$

per cui

$$\langle\psi|p^2|\psi\rangle = \langle\psi|2\,m\,H_\delta + 2\,m\,g\,\delta(x)|\psi\rangle = -\frac{m^2\,g^2}{\hbar^2} + \frac{2\,m^2\,g^2}{\hbar^2} = \frac{m^2\,g^2}{\hbar^2} = \hbar^2\,c^2. \tag{26}$$

(ii) Andando allo schema di Heisenberg,

$$\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle = \langle\psi_H|x_H^2(t)|\psi_H\rangle, \qquad \psi_H = \psi_{t=0}. \tag{27}$$

Risolvendo le equazioni di Heisenberg,

$$x_H(t) = x\cos\omega t + \frac{1}{m\omega}p\sin\omega t, \tag{28}$$

$$x_H(t)^2 = x^2\cos^2\omega t + \frac{1}{m^2\omega^2}p^2\sin^2\omega t + \frac{1}{m\omega}\cos\omega t\sin\omega t\,(xp+px), \tag{29}$$

L'elemento di matrice

$$\langle\psi|xp+px|\psi\rangle = 0 \tag{30}$$

si annulla poiché è reale (essendo il valor medio di un operatore Hermitiano) e allo strsso tempo è puramente imaginario ($p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$). Perciò abbiamo che

$$\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle = \langle x^2\rangle\cos^2\omega t + \frac{1}{m^2\omega^2}\langle p^2\rangle\sin^2\omega t = \frac{1}{2c^2}\cos^2\omega t + \frac{\hbar^2c^2}{m^2\omega^2}\sin^2\omega t. \tag{31}$$

Come funzione di t questo ha i minimi e massimi agli istanti

$$\sin 2\omega t = 0, \qquad \therefore \quad t = \frac{\pi n}{2\omega}, \tag{32}$$

i.e., a metà dei periodi dell'oscillatore. Se

$$\frac{1}{2c^2} < \frac{\hbar^2c^2}{m^2\omega^2}, \qquad c > 2^{-1/4}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \tag{33}$$

(c grande, la distribuzione originale stretta), si hanno i massimi quando

$$t = \frac{\pi(2n+1)}{2\omega}, \quad n = 0,1,2,\ldots. \tag{34}$$

Se invece

$$\frac{1}{2c^2} > \frac{\hbar^2c^2}{m^2\omega^2}, \qquad c < 2^{-1/4}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \tag{35}$$

(c piccolo, la distribuzione originale larga), si hanno i minimi a

$$t = \frac{\pi(2n+1)}{2\omega}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{36}$$

i massimi a

$$t = \frac{\pi n}{\omega}, \quad n = 0,1,2,\ldots, \tag{37}$$

Per

$$c = \frac{1}{2^{1/4}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2}, \tag{38}$$

$\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle$ è indipendente dal tempo.