

Prova Scritta di Meccanica Quantistica

Università di Pisa
13 luglio 2017 (A.A. 16/17)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1.

Una particella A di spin-parità $J^P = 1^-$ inizialmente si trova nello stato $|J,M\rangle = |1,1\rangle$. Essa decade ad un tratto, a riposo, in due particelle B e C di spin-parità $(\frac{1}{2})^+$ e $(\frac{1}{2})^-$, rispettivamente. Si supponga che sia la parità che il momento angolare totale siano conservati nel processo.

- (i) Dire quali valori dello spin totale S (dei due nuclei B e C) e del momento angolare orbitale L (del moto relativo nello stato finale) sono presenti. Scrivere la funzione d'onda dello stato delle due particelle nello stato finale, in termini delle armoniche sferiche, di funzioni d'onda di spin e delle funzioni radiali incognite, indicando come R_L per la funzione radiale con L .
- (ii) Una misura dello spin s_{Bz} ha dato il risultato, $-\frac{1}{2}$. Che cosa si può dedurre sui valori del momento angolare orbitale L (*)?
- (iii) Si misurano contemporaneamente s_{Bz} e s_{Cz} con due apparati à la Stern-Gerlach, posti in direzioni $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, \pi)$. I risultati di *ripetute osservazioni* hanno dato le frequenze relative tali che

$$P_{\uparrow\uparrow} \gg P_{\downarrow\downarrow}. \quad (1)$$

Che cosa implica questo fatto sullo stato di momento angolare orbitale L nello stato finale (*)?

* Per es., “il termine $L = 0$ è assente”, “il termine $L = 7$ è presente”, oppure “i termini $L = 1$, e $L = 3$ sono paragonabili”, “il termine $L = 2$ è dominante”, etc.

N.B. Potete usare i coefficienti di Clebsch-Gordan e le armoniche sferiche forniti separatamente.

Problema 2.

L'atomo di magnesio (con numero atomico $Z = 12$) nello stato fondamentale è descritto dalla configurazione elettronica

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2. \quad (2)$$

Il primo stato eccitato è:

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s 3p. \quad (3)$$

- (i) Specificare il termine spettrale dello stato fondamentale, (2).

Il primo stato eccitato è descritto da due elettroni non equivalenti ($3s$ e $3p$) della valenza. A causa delle interazioni Coulombiane (effetto non a simmetria centrale) i dodici stati, degeneri nelle approssimazioni di potenziale efficace a simmetria centrale, si dividono in multipletti.

- (ii) Dire quali valori di momento angolare totale e lo spin totale S , (L, S) , possono formare i due elettroni $3s 3p$. Assumendo che la regola di Hund sia valida anche in questo caso, determinare quale multipletto (L, S) corrisponde al livello più basso di (3). In quanti sottolivelli si divide lo stato eccitato?
- (iii) Tenendo conto ora delle interazioni spin-orbita in ciascuno dei multipletti, dire in quanti sottolivelli si divide il livello (3), e con quale degenerazione. Indicare il termine spettrale per ciascuno.
- (iv) Quante righe si osserveranno nella transizione $(3) \rightarrow (2)$?
- (v) L'atomo è sottoposto ad un campo magnetico esterno uniforme e debole. Quante righe di transizione di dipolo $(3) \rightarrow (2)$ ci aspettiamo di osservare?

Soluzione

Problema 1.

- (i) Lo spin totale di B e C può essere o $S = 1$ o $S = 0$. La conservazione del momento angolare implica che per $S = 1$ i valori possibili del momento angolare orbitale sono $L = 0, 1, 2$ mentre per $S = 0$ l'unico valore possibile è $L = 1$. Tenendo conto della parità, si conclude che i valori possibili di S, L sono $S = 1, L = 0$ o $L = 2$. La funzione d'onda avrà la forma

$$\Psi = R_0 Y_{0,0} |\uparrow\uparrow\rangle + R_2 \left[\sqrt{\frac{3}{5}} Y_{2,2} |\downarrow\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}} Y_{2,1} \left| \frac{\uparrow\downarrow+\downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{10}} Y_{2,0} |\uparrow\uparrow\rangle \right]. \quad (4)$$

(ii) Una misura di $s_{Bz} = -\frac{1}{2}$ significa che il termine R_2 è presente, i.e., $R_2 \neq 0$, ma non dice nulla su R_0 .

(iii) Nella direzione $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$ per cui

$$Y_{2,2} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}}, \quad Y_{2,1} = 0, \quad Y_{2,0} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}}. \quad (5)$$

La funzione d'onda prende la forma

$$\sqrt{\frac{1}{4\pi}} R_0 |\uparrow\uparrow\rangle + R_2 \left[\frac{3}{4\sqrt{2\pi}} |\downarrow\downarrow\rangle - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} |\uparrow\uparrow\rangle \right]. \quad (6)$$

Nella componente di $L = 2$ i due termini $|\uparrow\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\downarrow\rangle$ sono tali da dare la probabilità $P_{\downarrow\downarrow}$ è più grande rispetto a $P_{\uparrow\uparrow}$. Infatti, se $R_0 = 0$, uno troverebbe le frequenze relative

$$\frac{P_{\downarrow\downarrow}}{P_{\uparrow\uparrow}} = \frac{9}{2}. \quad (7)$$

Perciò il fatto sperimentale $P_{\uparrow\uparrow} \gg P_{\downarrow\downarrow}$ significa che

$$|R_0| \gg |R_2|, \quad (8)$$

i.e., il decadimento avviene predominantemente in onda S , con piccolo componente in onda D .

Problema 2.

(i)

$$^1S_0. \quad (9)$$

(ii) I due elettroni possono formare $S = 1$ o $S = 0$, mentre il momento angolare totale è $L = 1$. Quindi

$$(L, S) = (1, 1), \quad (1, 0). \quad (10)$$

Dovuto agli effetti Coulombiani il livello eccitato si divide in due, 9 volte e 3 volte degeneri, rispettivamente. Usando la regola di Hund, si conclude che il sottolivello più basso è $(L, S) = (1, 1)$.

- (iii)** Il sottolivello $(1, 1)$ si divide in tre stati di struttura fine, con

$$J = 2, 1, 0 \quad (11)$$

$$\begin{array}{c} \text{o} \\ {}^3P_2, \quad {}^3P_1, \quad {}^3P_0, \end{array} \quad (12)$$

con i gradi di degenerazioni 5, 3 e 1, mentre il multipletto $(1, 0)$ resta singolo e tre volte degenere con $J = 1$,

$${}^1P_1. \quad (13)$$

- (iv)** Lo stato fondamentale è 1S_0 ; l'unica transizione di transizioni di dipolo ammesso $(3) \rightarrow (2)$ è:

$${}^1P_1 \rightarrow {}^1S_0 : \quad (14)$$

una sola riga.

- (v)** Il livello 1P_1 si divide in tre sottolivelli dovuto all'effetto Zeeman, mentre lo stato fondamentale non subisce correzioni, per cui si osserveranno tre righe.