Esame Scritto di Meccanica Quantistica

14 giugno 2016 (A.A. 15/16)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1

Una particella di massa m si muove in tre dimensione, in un potenziale di forma [1],

$$U(\mathbf{r}) = -g\,\delta(r - r_0)\ , \qquad g > 0\ , \quad r_0 > 0\ . \tag{1}$$

dove r è il raggio di $\mathbf{r}$.

(i) Limitandosi agli stati di onda S, scrivere l'equazione che determina l'energia di (un eventuale) stato legato. Trovare la condizione per r_0 perché il sistema possieda tale stato legato.

(ii) Discutere, per r_0 grande, i livelli discreti con il momento angolare ℓ, e la loro dipendenza da ℓ, in maniera approssimativa.

Problema 2

Le interazioni iperfini nell'atomo di idrogeno sono descritte da:

$$V = g g_N\,|\mu|\mu_p \left(\frac{8\pi}{3}\mathbf{s}_N \cdot \mathbf{s}\,\delta^3(\mathbf{r}) - \frac{\mathbf{s}_N \cdot \mathbf{s} - 3(\mathbf{s}_N \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^3} + \frac{\mathbf{s}_N \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right)\ , \tag{2}$$

dove

$$g \simeq 2.002; \qquad g_p \simeq 5.586 \tag{3}$$

sono i fattori giromagnetici per l'elettrone e per il protone,

$$\mu = -\frac{|e|\hbar}{2mc}\ ; \qquad \mu_p = \frac{|e|\hbar}{2m_p c}\ , \tag{4}$$

sono rispettivamente il magnetone di Bohr, e il magnetone nucleare. $\mathbf{s}$ e $\mathbf{s}_N$ sono gli operatori di spin dell'elettrone e del nucleo (il protone) rispettivamente; $\mathbf{L}$ è il momento angolare orbitale.

(1) Dimostrare che il secondo termine nella parentesi rappresenta un tensore di rango 2 rispetto alle coordinate orbitali.

(2) Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale dovuto a V, ΔE^{hf}.

(3) Elencare tutti gli operatori che commutano con V.

(4) Tenendo conto delle interazioni fini (le prime correzioni relativistiche) e iperfini (V), quali sono i numeri quantici che determinano ciascun livello iperfine, e qual'e' la degenerazione di quest'ultimo?

(5) Come si paragona, in ordine di grandezza, la correzione di cui al punto (2), con la tipica grandezza delle correzioni di struttura fine?

Formulario:

$$\psi_{100}(\mathbf{r}) = \frac{2 r_B^{-3/2}}{\sqrt{4\pi}} e^{-r/r_B}\ . \tag{5}$$

[1] *N.B.* U non è $-g\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

Soluzione

Problema 1

(i) Discutere l'energia e la funzione d'onda dello stato legato, assumendo che sia in onde S.

Nelle coordinate sferiche, e introducendo la funzione radiale ridotta,

$$\chi(r) = r R(r) \, , \tag{6}$$

l'equazioine di Scrödinger radiale ha la forma dell'equazione unidimensionale,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\chi(r) - g\,\delta(r-r_0)\chi(r) = E\,\chi(r) \, ; \tag{7}$$

questa equazione va risolta con la condizione al contorno

$$\chi(0) = 0 \qquad \chi(\infty) = 0 \, . \tag{8}$$

e con la condizione di discontinuità attraveso la delta,

$$\chi'(r = r_0 + \varepsilon) - \chi'(r = r_0 - \varepsilon) = -\frac{2mg}{\hbar^2}\chi(r_0) \, . \tag{9}$$

Le soluzioni fuori e dentro la sfera hanno la forma,

$$\chi(r) = e^{-\kappa(r-r_0)} \, , \quad R(r) = \frac{e^{-\kappa(r-r_0)}}{r} \, , \qquad r > r_0 \, ; \tag{10}$$

$$\chi(r) = A e^{\kappa(r-r_0)} + B e^{-\kappa(r-r_0)} \, , \quad R(r) = \frac{A e^{\kappa(r-r_0)} + B e^{-\kappa(r-r_0)}}{r} \, , \qquad r < r_0 \, . \tag{11}$$

Impongo la condizione all'orgine,

$$A e^{-\kappa r_0} + B e^{\kappa r_0} = 0 \, . \tag{12}$$

e a $r = r_0$,

$$1 = A + B \, , \tag{13}$$

$$-\kappa - \kappa(A - B) = -\frac{2mg}{\hbar^2} \, . \tag{14}$$

Risolvendo per A e B da (13), (14), si trova

$$A = \frac{mg}{\kappa\hbar^2} \, ; \qquad B = 1 - \frac{mg}{\kappa\hbar^2} \; : \tag{15}$$

sostituendo questi in (13) si ha

$$\frac{1}{\kappa\hbar^2/mg - 1} = -e^{2\kappa r_0} \, . \tag{16}$$

Questa è la relazione richiesta.

Facendo un'analisi grafici si trova che per

$$r_0 > \frac{\hbar^2}{mg} \tag{17}$$

c'è uno stato legato; per

$$r_0 \leq \frac{\hbar^2}{mg} \tag{18}$$

non ci sono stati legati. Per $r_0 \to \infty$, la soluzione si avvicina a

$$\kappa = \frac{mg}{\hbar^2} \; : \qquad E = -\frac{mg^2}{2\hbar^2} \, , \tag{19}$$

la nota energia di una buca delta unidimensionale.

(ii) Discutere, per r_0 grande, i livelli discreti con il momento angolare ℓ, e la loro dipendenza da ℓ, in maniera approssimativa.

In termini di funzione d'onda radiale ridotta $\chi_\ell(r)$, l'equazione è

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\chi_\ell(r) - g\,\delta(r-r_0)\chi_\ell(r) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}\chi_\ell(r) = E\,\chi_\ell(r)\ . \tag{20}$$

Per grande valore di r_0, la condizione $\chi(0) = 0$ non giocherà un ruolo importante, e il problema si riduce alla buca delta unidimensionale, con la funzione d'onda concentrata attorno a $r \simeq r_0$. Per di più, il termine centrifugo può essere trattato come un potenziale perturbativo. Ci si aspetta dunque uno spettro di energia,

$$E_\ell \simeq -\frac{mg^2}{2\hbar^2} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2m}\langle\frac{1}{r^2}\rangle \simeq -\frac{mg^2}{2\hbar^2} + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr_0^2}\ , \qquad \ell = 0,1,2,\ldots \tag{21}$$

per ℓ non troppo grande. Per $\ell \geq \frac{mgr_0}{\hbar^2}$, invece, ci si aspetta che non esista nessun stato legato.

Tale idea può essere confermata dalle soluzioni numeriche del problema.

Problema 2

(1) Scrivendo come

$$(s_N)_i s_j\,(\delta_{ij} - 3\hat{r}_i\hat{r}_j) \tag{22}$$

vediamo che esso rappresenta in tensore di rango 2.

(2) Calcolare la correzione all'energia dello stato fondamentale dovuto a V, ΔE^{hf}. Lo stato fondamentale ψ_{100} ha $L = 0$. Risulta che sia il secondo che il terzo termine non contribuisce. Il primo termine dà:

$$\begin{aligned}\langle gg_N\,|\mu|\mu_p\,\frac{8\pi}{3}\mathbf{s}_N\cdot\mathbf{s}\,\delta^3(\mathbf{r})\rangle_{100} &= gg_N\,|\mu|\mu_p\,\frac{8\pi}{3}\mathbf{s}_N\cdot\mathbf{s}|\psi(\mathbf{0})|^2 \\ &= gg_N\,|\mu|\mu_p\,\frac{8\pi}{3}\frac{S(S+1)-\frac{3}{2}}{2}\frac{1}{\pi r_B^3}\ ,\end{aligned} \tag{23}$$

dove $S = 1$ o $S = 0$.

(3) Elencare tutti gli operatori che commutano con V. Definendo

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}_N + \mathbf{s}\,; \quad \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}\,; \quad \mathbf{F} = \mathbf{J} + \mathbf{s}_N = \mathbf{L} + \mathbf{s} + \mathbf{s}_N\ , \tag{24}$$

dove $\mathbf{F}$ rappresenta il momento angolare totale, V commuta con

$$\mathbf{S}^2\ , \quad \mathbf{J}^2\ , \quad \mathbf{L}^2\ , \quad \mathbf{F}^2\ , \tag{25}$$

e con

$$F_i \tag{26}$$

e con parità. $\mathbf{s}_N^2 = \mathbf{s}^2 = \frac{3}{4}$ naturalmente commuta con tutti gli operatori.

(4) I numeri quantici (che determinano lo stato) sono

$$S, L, J, F\ , \tag{27}$$

con degenerazione $2F + 1$.

(5) Come si paragona, in ordine di grandezza, la correzione di cui al punto (2), con la tipica grandezza delle corresioni di struttura fine?

Le correzioni al punto (ii) sono di ordine

$$\frac{m}{m_P}\alpha^2\frac{e^2}{r_B} \; : \tag{28}$$

essi sono circa

$$\frac{m}{m_P} \sim 10^{-3} \tag{29}$$

volte più piccolo rispetto alla tipica correzione di struttura fine.