Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
15 febbraio 2011 (A.A. 10/11)

Tempo a disposizione: 3 ore.

(i) Per il compitino II, risolvere Problema 2 e Problema 3;

(ii) Per la prova scritta completa, risolvere Prob. 1, Prob. 2 (i), (ii), e Prob. 3 (i), (ii), (iii).

Problema 1.

Una particella di massa m si muove in un potenziale unidimensionale di forma,

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0, \\ -V_0 & 0 \le x \le a, \\ 0 & x > a\ . \end{cases} \tag{1}$$

Si vuole studiare le proprietà degli stati legati in questo sistema.

(i) Scrivere la forma delle funzioni d'onda nella regione $0 \le x \le a$ (tenendo conto della condizione di raccordo a $x = 0$), e nella regione esterna alla buca $x > a$ (tenendo conto della normalizzabilità della funzione d'onda).

(ii) Imponendo la condizione di raccordo a $x = a$ trovare l'equazione che determina implicitamente le energie dei livelli discreti.

(iii) Determinare il numero degli stati legati per la buca, con $m = 940$ MeV $/c^2$, $V_0 = 200$ MeV, $a = 3$ fm). Potete usare $\hbar c \simeq 200$ MeV fm.

(iv) Fare uno schizzo delle funzioni d'onda di questi stati legati.

Problema 2.

Si consideri un oscillatore armonico forzato, i.e.,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 - G\, x\ . \tag{2}$$

(G è una costante.)

(i) Scrivere le equazione di Heisenberg per $x_H(t)$ e $p_H(t)$.

(ii) Risolvere le equazione di Heisenberg per $x_H(t)$ e $p_H(t)$.

(iii) Utilizzando il risultato del punto (ii), trovare il valore d'aspettazione

$$\langle\psi(t)|x^2|\psi(t)\rangle, \tag{3}$$

sapendo che il sistema si trova a $t=0$ in uno stato descritto da

$$\psi(x,0) = \left(\frac{2\gamma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\gamma\, x^2} \tag{4}$$

(γ è una costante, $\gamma > 0$).

Dire come il risultato si semplifica nel caso particolare, $\gamma = \frac{m\omega}{2\hbar}$.

Problema 3.

Un nucleo di spin-parità $J^P = \frac{1}{2}^+$, si trova inizialmente in uno stato di $J_z = \frac{1}{2}$. Ad un tratto esso spontaneamente decade, nel suo sistema di riposo, in due nuclei A,B, di spin-parità:

$S_A^P = 0^-$ (A) e $S_B^P = \frac{1}{2}^+$ (B).

(i) Scrivere la funzione d'onda dello stato finale in termini delle armoniche sferiche, delle funzioni d'onda di spin e delle funzioni radiali (incognite), senza assumere che la parità sia conservata.

(ii) Calcolare la distribuzione angolare del nucleo A. Nel calcolo, sostituire le funzioni d'onda radiali in (i) con delle costanti complesse a, b, ... incognite.

(iii) Discutere qual'è il segnale della violazione della parità nella distribuzione angolare di A.

(iv) È possibile determinare se la parità è conservata o meno nel decadimento, misurando soltanto la componente $S_{B\,z}$ del nucleo B con l'apparato di Stern-Gerlach, *posto* nella direzione di $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$? Se la risposta è affermativa, spiegare come.

Discutere se la prova sperimentale della violazione della parità è più facile utilizzando l'apparecchio di Stern-Gerlach (posto sempre nella direzione di $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$) con il campo magnetico in direzione di $\hat{x}$, i.e., misurando $S_{B\,x}$ anziché $S_{B\,z}$.

SOLUZIONE

Problema 1.

(i) Prendendo $E < 0$ per la considerazione degli stati legati,

$$\psi^{(in)}(x) = A \sin kx, \qquad k = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}, \tag{5}$$

$$\psi^{(out)}(x) = B\, e^{-\kappa x}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar}, \tag{6}$$

(ii) Uguagliando la derivata logaritmica ψ'/ψ attraverso la discontinuità del potenziale $x = a$, si ha

$$\kappa = -k \cot ka. \tag{7}$$

Introducendo $\xi = ka$, $\eta = \kappa a$, l'equazione sopra diventa

$$\eta = -\xi \cot \xi, \tag{8}$$

con il vincolo

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}. \tag{9}$$

I livelli dell'energia corrispondono alle soluzioni del sistema (8), (9) per $\xi > 0$, $\eta > 0$.

(iii) Per i valori dei parametri dati,

$$\sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} \simeq 9.2 \tag{10}$$

Visto che

$$\frac{5\pi}{2} < \sqrt{\frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}} < \frac{7\pi}{2} \tag{11}$$

ci sono tre stati legati. Vedi Fig. 2

Problema 2.

(i) Cambiando la variabile

$$x \to X \equiv x - \frac{G}{m\omega^2}, \qquad p \to P = p, \tag{12}$$

il commutatore canonico è conservato. L'Hamiltoniana diventa l'oscillatore standard,

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 X^2}{2} - \frac{G}{2m\omega^2}\ . \tag{13}$$

Gli operatori di Heisenberg per le variabili originali e quelle nuove sono semplicemente collegate da

$$X_H(t) = x_H(t) - \frac{G}{m\omega^2}, \qquad P_H(t) = p_H(t), \tag{14}$$

visto che un operatore costante rimane uguale nei due schemi. Le equazioni di Heisenberg per $X_H(t), P_H(t)$ sono

$$\dot{X}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}[X_H, H] = \frac{1}{m} P_H, \qquad \dot{P}_H(t) = \frac{1}{i\hbar}[P_H, H] = -m\omega^2 X_H, \tag{15}$$

Le equazioni di Heisenberg per $x_H(t), p_H(t)$ sono perciò

$$\dot{x}_H(t) = \frac{1}{m} p_H, \qquad \dot{p}_H(t) = -m\omega^2 (x_H - \frac{G}{m\omega^2}) \; . \tag{16}$$

Naturalmente queste equazioni seguono anche direttamente dallHamiltoniana originale. Le soluzioni si possono ottenere o risolvendo la (15) e utilizzando la (14), o risolvendo la (16) direttamente; il risultato è uguale.

$$X_H(t) = X \, \cos \omega t + \frac{P}{m\omega} \sin \omega t \; ; \qquad P_H(t) = P \, \cos \omega t - X \, m\omega \, \sin \omega t \; ; \tag{17}$$

perciò

$$x_H(t) = (x - \frac{G}{m\omega^2}) \, \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t + \frac{G}{m\omega^2} \; ; \qquad p_H(t) = p \, \cos \omega t - (x - \frac{G}{m\omega^2}) \, m\omega \, \sin \omega t \; ; \tag{18}$$

(ii)

$$\langle \psi(t) | x^2 | \psi(t) \rangle = {}_H\langle \psi | x_H(t)^2 | \psi \rangle_H = \cos^2 \omega t \, \langle \psi | x^2 | \psi \rangle + \frac{1}{m^2\omega^2} \, \sin^2 \omega t \, \langle \psi | p^2 | \psi \rangle + \frac{G^2}{m^2\omega^2} (1 - \cos \omega t)^2 \tag{19}$$

2 dove i valori medii nell'ultimo membro sono definiti in termini dello stato a $t = 0$, Eq.(4). Si noti che i termini misti si annullano tutti nello stato (4), mentre

$$\langle \psi | x^2 | \psi \rangle = \frac{1}{4\gamma}; \qquad \langle \psi | p^2 | \psi \rangle = (2\gamma\hbar)^2 \langle \psi | x^2 | \psi \rangle = \gamma \hbar^2 \; . \tag{20}$$

Il risultato finale è

$$\langle \psi(t) | x^2 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{4\gamma} \cos^2 \omega t + \frac{\gamma\hbar^2}{m^2\omega^2} \, \sin^2 \omega t + \frac{G^2}{m^2\omega^2} (1 - \cos \omega t)^2 \; . \tag{21}$$

(iii) Per $\gamma = \frac{m\omega}{2\hbar}$, il risultato diventa:

$$\langle \psi(t) | x^2 | \psi(t) \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} + \frac{G^2}{m^2\omega^2} (1 - \cos \omega t)^2 \; . \tag{22}$$

Problema 3.

(i) Lo spin totale dello stato finale è $S_{tot} = \frac{1}{2}$. $\therefore$ $L = 0, 1$. Visto che la parità può essere violata, ci saranno in generale ambedue i termini, $L = 0$ e $L = 1$. Se la parità fosse conservata, soltanto $L = 1$ sarebbe possibile.

$$\begin{aligned} \psi &= R_0(r) Y_{0,0}(\theta, \phi) |\uparrow\rangle + R_1(r) [\sqrt{\frac{2}{3}} \, Y_{1,1}(\theta, \phi) \, |\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \, Y_{1,0}(\theta, \phi) \, |\uparrow\rangle \\ &= a \, Y_{0,0}(\theta, \phi) |\uparrow\rangle + b \, [\sqrt{\frac{2}{3}} \, Y_{1,1}(\theta, \phi) \, |\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} \, Y_{1,0}(\theta, \phi) \, |\uparrow\rangle \,] \end{aligned} \tag{23}$$

(ii) Nella distribuzione angolare di A (che non ha spin), gli spin sono sommati nello stato finale, per cui

$$dP = Pd\Omega \propto |a - b\,\cos\theta|^2 + |b|^2 \sin^2\theta = |a|^2 + |b|^2 - 2\mathrm{Re}(ab^*)\cos\theta. \tag{24}$$

(iii) La violazione della parità significa che ci sono sia il termine $L = 0$ che il termine $L = 1$, perciò da una dipendenza non banale da θ. Una distribuzione angolare *non isotropa* di A significa che $a \neq 0$, $b \neq 0$, ed è un chiaro segnale della violazione della parità. (Condizione sufficiente.) Infatti la distribuzione non è invariante per $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$ in tal caso: le distribuzioni angolari di A e di B non sono uguali.

In generale non ci si aspetta nessuna relazione particolare nelle fasi delle due ampiezze a e b in presenza della violazione di parità. Logicamente, tuttavia, una distribuzione isotropa non può escludere una violazione di parità, i.e., $a \neq 0$, $b \neq 0$, e

$$\mathrm{Re}(ab^*) = 0, \tag{25}$$

(le fasi relative di $\pm\frac{\pi}{2}$), quindi un'anisotropia della distribuzione non è condizione necessaria per la violazione della parità.

La misura dello spin (il punto successivo) potrebbe essere un metodo per osservare la violazione, che non dipende dalle fasi delle ampiezze.

(iv) Nella direzione di $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\phi = 0$, $\theta = \pi/4$. La funzione d'onda è

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, a\,|\uparrow\rangle + b\,[\,\sqrt{\frac{2}{3}}\,Y_{1,1}(\theta,\phi)\,|\downarrow\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,Y_{1,0}(\theta,\phi)\,|\uparrow\rangle\,] \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\,[\,(a - \frac{b}{\sqrt{2}})\,|\uparrow\rangle - \frac{b}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle\,] \end{aligned} \tag{26}$$

In assenza della violazione della parità, $a = 0$, per cui la misura di $S_{2\,z}$ darebbe i risultati $\pm\frac{1}{2}$ con probabilità $\frac{1}{2}$ per ciascuno (o le uguali frequenze, per esperimenti ripetuti).

La deviazione significativa da tale statistica $P_\uparrow \neq P_\downarrow$ segnala la violazione della parità (condizione sufficiente).

Assumendo che non ci sia una particolare relazione tra le due ampiezze, a e b, sembrerebbe che si possa concludere che $P_\uparrow \neq P_\downarrow$ è anche necessaria. Questo argomento è errato, tuttavia. Infatti, non è così eccezionale avere due numeri complessi $a \neq 0$, $b \neq 0$ tale che

$$\left|a - \frac{b}{\sqrt{2}}\right|^2 \simeq \left|\frac{b}{\sqrt{2}}\right|^2 . \tag{27}$$

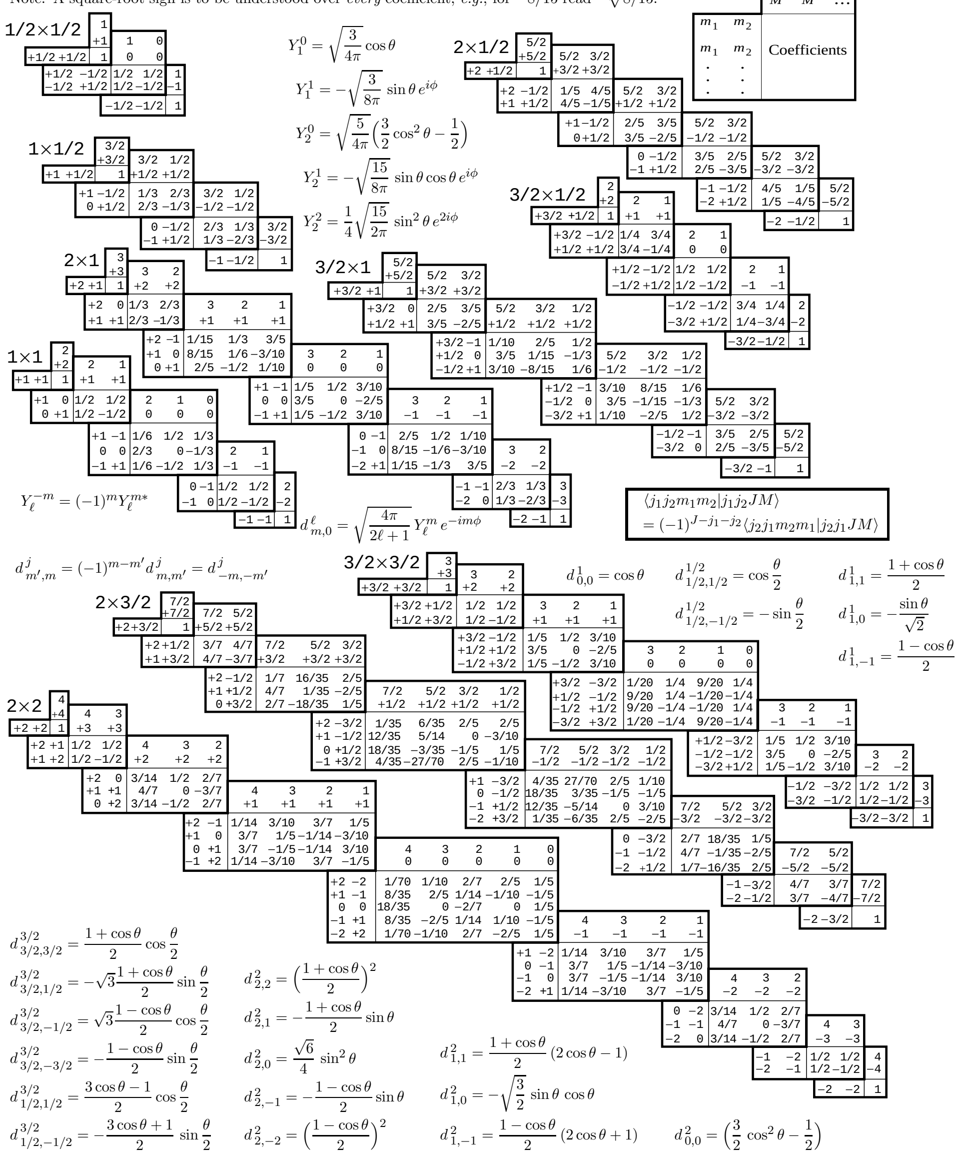
In questi casi la violazione della parità non si manifesta come un effetto $P_\uparrow \neq P_\downarrow$.

D'altronde le due condizioni (25) e (27) non sono compatibili. Vuol dire che una delle condizioni, un'anisotropia della distribuzione angoare di A, o la disparità delle probabilità, $P_\uparrow \neq P_\downarrow$, è condizione necessaria per la violazione della parità.

Consideriamo ora la misura di $S_{B\,x}$ invece. Se la parità fosse conservata ($a = 0$) la funzione d'onda (26) sarebbe

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\,]\ : \tag{28}$$

un autostato di $S_{B\,x}$ con autovalore, $S_{B\,x} = +\frac{1}{2}$. Perciò, in questo caso, l'osservazione di un *singolo* evento con $S_{B\,x} = -\frac{1}{2}$ è sufficiente per concludere che la parità è violata.



34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation: J J … / M M … ; m_1 m_2 / m_1 m_2 … Coefficients

$1/2\times1/2$, $1\times1/2$, 2×1, 1×1, $2\times1/2$, $3/2\times1/2$, $3/2\times1$, $2\times3/2$, $3/2\times3/2$, 2×2

$$Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0=\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m}=(-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0}=\sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\,Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1j_2m_1m_2|j_1j_2JM\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2j_1m_2m_1|j_2j_1JM\rangle$$

$$d^j_{m',m}=(-1)^{m-m'}d^j_{m,m'}=d^j_{-m,-m'}$$

$$d^1_{0,0}=\cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2}=\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{1/2}_{1/2,-1/2}=-\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^1_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^1_{1,0}=-\frac{\sin\theta}{\sqrt2} \qquad d^1_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,3/2}=\frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2}=-\sqrt3\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2}=\sqrt3\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2}=\frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2}=-\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^2_{2,2}=\Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2 \qquad d^2_{2,1}=-\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{2,0}=\frac{\sqrt6}{4}\sin^2\theta$$

$$d^2_{2,-1}=-\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{2,-2}=\Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^2_{1,1}=\frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1) \qquad d^2_{1,0}=-\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta \qquad d^2_{1,-1}=\frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^2_{0,0}=\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\Big)$$

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figure 1: Coefficienti di Clebsch-Gordan e alcune armoniche sferiche

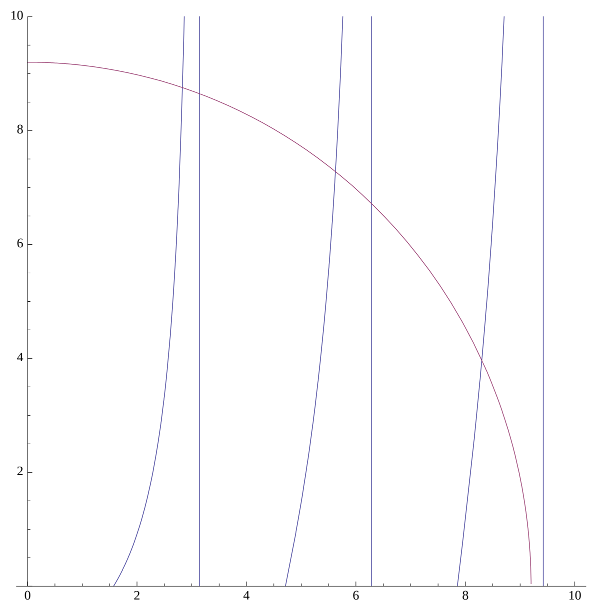


Figure 2: