Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
16 luglio 2010 (A.A. 09/10)

Tempo a disposizione: 3 ore

N.B. Fare tutti gli esercizi 1 (a), (b), (c) e 2 (i), (ii), (iii), (iv).
N.B. Scegliere uno solo degli esercizi tra 1 (d) e 2 (v).

Problema 1

Un sistema "a tre stati" è descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = E_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \lambda > 0 .$$

(a) Determinare gli autovalori e gli autostati di H, $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$, corrispondenti rispettivamente allo stato fondamentale, al primo e al secondo stato eccitato, esprimendoli in termini di stati

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Dire se l'Hamiltoniana commuta con l'operatore,

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Pi^2 = 1 .$$

Discutere la rilevanza di questa questione (i.e., se Π commuta con H o meno) per i risultati del punto (i).

(c) Invertendo le relazioni trovate nel punto (i), esprimere gli stati $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ in termini degli autostati dell'energia, $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$.

(d) Supponiamo che il sistema si trovi nello stato $|1\rangle$ a $t = 0$. Trovare lo stato $|\psi(t)\rangle$ del sistema all'istante t, in termini degli stati $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$. Calcolare le probabilità $P_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ per trovare il sistema nello stato $|i\rangle$ all'istante t, e fare uno schizzo di $P_i(t)$ come funzione di t.

Problema 2.

Un atomo di idrogeno in uno stato interno eccitato (livello di Bohr) n, è legato ad un centro di forza armonica; l'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{M\Omega^2\mathbf{R}^2}{2} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} , \tag{1}$$

dove M è la massa dell'atomo, m la massa ridotta che è circa uguale alla massa dell'elettrone, $\mathbf{P}, \mathbf{R}$ sono operatori dell'impulso e della posizione del (centro di massa dell') atomo; $\mathbf{p}, \mathbf{r}$ l'impulso e la posizione dell'elettrone. L'atomo si trova nello stato fondamentale dell'oscillatore, con l'energia

$$E_0 = \frac{3}{2}\Omega\hbar. \tag{2}$$

(i) Qual'è l'energia totale del sistema (senza tenere conto della massa di riposo dell'atomo: essa rimane invariata durante tutto il processo).

Ad un tratto l'atomo decade allo stato fondamentale di Bohr, emettendo un fotone; si vuole trovare la frequenza ν del fotone emesso.

(ii) Considerando l'atomo infinitamente pesante ($M = \infty$) e assumendo che l'atomo rimane nello stato fondamentale dell'oscillatore, determinare la frequenza del fotone.

(iii) Se invece l'atomo non fosse legato ($\Omega = 0$), quale sarebbe la frequenza ν del fotone emesso (approssimativamente)?

(iv) Nel caso del problema, $M < \infty$, $\Omega \neq 0$, scrivere le equazioni che esprimono la conservazione dell'energia totale, supponendo che dopo l'emissione del fotone (nella direzione di $\hat{z}$), l'atomo si trovi nello stato $(0,0,N)$ dell'oscillatore, $N = 0,1,2,\ldots$, e trovare lo spettro (i possibili valori) dell'energia del fotone $E_\nu = h\nu$.

(v) Trovare le probabilità P_N che l'atomo si trovi in vari stati eccitati $(0,0,N)$ dell'oscillatore dopo l'emissione del fotone, assumendo che l'operatore effettivo che causa la transizione del centro di massa dell'atomo sia

$$V = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}/\hbar} = e^{-i\frac{2\pi\nu}{c}Z}, \qquad \mathbf{p} = (0,0,\frac{h}{\lambda}) = (0,0,\frac{h\nu}{c}) \; . \tag{3}$$

In altre parole, calcolare

$$P_N \propto |\langle N|V|0\rangle|^2 \; . \tag{4}$$

(*N.B.* V è un operatore che trasla l'impulso dell'atomo di $-\mathbf{p}$: è un modo ragionevole di tenere conto dell'effetto di rinculo quantisticamente.)

Formulario: oscillatore armonico lineare in direzione Z e operatori di creazione e di annichilazione

$$Z = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}}(a + a^\dagger), \qquad P_z = -i\sqrt{\frac{M\Omega\hbar}{2}}(a - a^\dagger); \tag{5}$$

$$H = \Omega\hbar(a^\dagger a + \frac{1}{2}); \tag{6}$$

$$|N\rangle = \frac{(a^\dagger)^N}{\sqrt{N!}}|0\rangle, \tag{7}$$

$$e^{-if(a+a^\dagger)} = e^{-\frac{f^2}{2}} e^{-ifa^\dagger} e^{-ifa}. \tag{8}$$

$$[a,(a^\dagger)^n] = n\,(a^\dagger)^{n-1} \; . \tag{9}$$

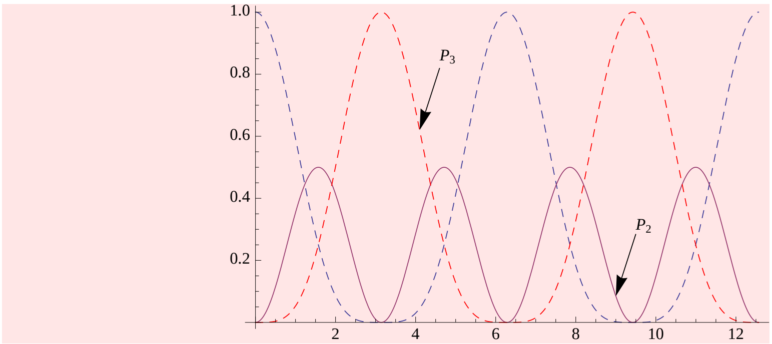

Figura 1:

Soluzione

Problema 1.

(i) Gli autovalori sono $E_a = E_0 - \lambda$, $E_b = E_0$, $E_c = E_0 + \lambda$, con rispettivi autostati

$$|a\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle); \qquad |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle); \qquad |c\rangle = \frac{1}{2}(|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle).$$

(ii) Π commuta con H:

$$[\Pi, H] = 0,$$

e ha autovalori ± 1. Visto che gli autovalori di H sono singoli (non degeneri), ognuno di stati stazionari debbono essere autostato anche di Π, come si vede da

$$H|a\rangle = E_a|a\rangle, \quad H(\Pi|a\rangle) = \Pi H|a\rangle = E_a(\Pi|a\rangle), \qquad \therefore \Pi|a\rangle \sim |a\rangle;$$

e analogamente per $|b\rangle, |c\rangle$ Infatti, $|a\rangle$ e $|c\rangle$ sono pari, mentre $|b\rangle$ sono dispari rispetto alla transformazione Π.

(iii)

$$|1\rangle = \frac{1}{2}(|a\rangle + \sqrt{2}|b\rangle + |c\rangle); \qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle - |c\rangle); \qquad |3\rangle = \frac{1}{2}(|a\rangle - \sqrt{2}|b\rangle + |c\rangle).$$

(iv)

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \frac{e^{-iE_0t/\hbar}}{2}(e^{i\lambda t/\hbar}|a\rangle + \sqrt{2}|b\rangle + e^{-i\lambda t/\hbar}|c\rangle) \\
&= \frac{e^{-iE_0t/\hbar}}{2}\left[e^{i\lambda t/\hbar}\frac{1}{2}(|1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle) + (|1\rangle - |3\rangle) + e^{-i\lambda t/\hbar}\frac{1}{2}(|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle + |3\rangle)\right] \\
&= \frac{e^{-iE_0t/\hbar}}{2}\left[(\cos\lambda t/\hbar + 1)|1\rangle + (\cos\lambda t/\hbar - 1)|3\rangle + \sqrt{2}i\sin\lambda t/\hbar|2\rangle\right]\;; \qquad (10)
\end{aligned}$$

per cui (vedi la Figura)

$$P_1 = \frac{(\cos\lambda t/\hbar + 1)^2}{4}; \qquad P_2 = \frac{\sin^2\lambda t/\hbar}{2}; \qquad P_3 = \frac{(1-\cos\lambda t/\hbar)^2}{4};$$

Problema 2.

(i)

$$E_{tot} = \frac{3}{2}\Omega\hbar - \frac{e^2}{2n^2 r_B} \ .$$

(ii)

$$E_\gamma = -\frac{e^2}{2n^2 r_B} + \frac{e^2}{2r_B} = \frac{e^2}{2r_B}(1-\frac{1}{n^2}) \equiv G \ . \tag{11}$$

(iii) In questo caso (atomo libero), l'atomo acquista un moto libero, dovuto al rinculo con l'impulso $-\mathbf{p} = -(0,0,\frac{E_\gamma}{c})$, per cui la conservazione dell'energia è

$$G \equiv \frac{e^2}{2r_B}(1-\frac{1}{n^2}) = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}.$$

Risolvendo approssimativamente,

$$E_\gamma = h\nu \simeq G - \frac{G^2}{2Mc^2} \ :$$

dovuto al rinculo, il fotone ha la frequenza leggermente inferiore rispetto a quanto ci si aspetta in maniera naïva.

(iv) Nel caso l'atomo è legato all'oscillatore, lo spettro dell'atomo è discreto; non può essere eccitato in modo continuo. I possibili valori dell'energia del fotone sono dati da:

$$G \equiv \frac{e^2}{2r_B}(1-\frac{1}{n^2}) = E_\gamma + N\Omega\hbar, \qquad N = 0,1,2,\ldots, \qquad N \le \frac{e^2}{2r_B\Omega\hbar}(1-\frac{1}{n^2})$$

In particolare, l'atomo ha una probabilità non nulla di non ricevere nessun rinculo ($N=0$); il fotone avrà in quel caso porterà l'energia corrispondente alla differenza dei livelli di Bohr, (11). Questo effetto è noto come *effetto Mössbauer*.

(v)

$$|\langle N|V|0\rangle|^2 = |\langle N|e^{-if(a+a^\dagger)}|0\rangle|^2, \qquad f = \frac{2\pi\nu}{c}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\Omega}} \ .$$

Utilizzando le formule date, si ha

$$|\langle N|V|0\rangle|^2 = e^{-f^2}|\langle N|e^{-ifa^\dagger}|0\rangle|^2 = e^{-f^2}|\frac{(-if)^N}{N!}\langle N|(a^\dagger)^N|0\rangle|^2 = e^{-f^2}|\frac{(-if)^N}{\sqrt{N!}}|^2$$
$$= e^{-f^2}\frac{f^{2N}}{N!} \ . \tag{12}$$

Si noti che f dipende da N, attraverso ν, perciò non si tratta di una distribuzione Poissoniana.