Prova Scritta di Meccanica Quantistica II

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
16 luglio 2010 (A.A. 09/10)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema

Si consideri un insieme di atomi di idrogeno in stati $2p$. Si vuole studiare la distribuzione angolare del fotone emesso nelle transizioni (A): $(2,1,0) \to (1,0,0)$ e (B): $(2,1,1) \to (1,0,0)$, dove con $(n,\ell,m=\ell_z)$ sono indicati gli stati dei livelli di Bohr.

Il potenziale di interazione prende la forma al primo ordine in $\mathbf{A}$,

$$V = -\frac{e}{mc}\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}\,. \tag{1}$$

(i) *Trovare* la formula (1), dove $\mathbf{A}$ rappresenta il potenziale vettore elettromagnetico, che assoceremo al fotone finale, partendo dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{(\mathbf{p}-\frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e^2}{r}. \tag{2}$$

(ii) Ponendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \mathbf{A}_0^*\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}, \qquad \mathbf{A}_0 = |A_0|\,\epsilon, \tag{3}$$

dove ϵ è il vettore di polarizzazione del fotone, *dimostrare* che gli elementi di matrice di V (rilevanti per l'emissione) possono essere approssimati da

$$\langle f|V|i\rangle = -\frac{ie|A_0|}{c}\omega_{fi}\,\langle f|\epsilon^*\cdot\mathbf{r}|i\rangle, \qquad \omega_{fi} \equiv \frac{E_f-E_i}{\hbar} \tag{4}$$

(detta l'aprossimazione di dipolo).

Utilizzando la (4) si vuole calcolare la distribuzione angolare del fotone, assumendo che la polarizzazione del fotone non sia misurata, nei due processi (A) e (B), i.e., per

(A): $|f\rangle = |1,0,0\rangle$, $|i\rangle = |2,1,0\rangle$,
(B): $|f\rangle = |1,0,0\rangle$, $|i\rangle = |2,1,1\rangle$.

Prima di tutto, se

$$\mathbf{n} = \mathbf{k}/k = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{5}$$

è la direzione del fotone, il vettore di polarizzazione soddisfa

$$\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = \epsilon^{(\lambda)\,*}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} = 0, \qquad \lambda = 1,2 \tag{6}$$

$$\epsilon^{(\lambda)\,*}(\mathbf{n})\cdot\epsilon^{(\lambda')}(\mathbf{n}) = \delta^{\lambda\lambda'}, \tag{7}$$

dove $\lambda = 1,2$ indicano le due polarizzazioni indipendenti e ortonormali .

(iii) *Dimostrare* che la somma sulle polarizzazioni dà

$$\rho_{ij} \equiv \sum_{\lambda=1,2} \epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{n})\epsilon_j^{(\lambda)\,*}(\mathbf{n}) = \delta_{ij} - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j \tag{8}$$

dove $\epsilon_i^{(\lambda)}(\mathbf{n})$ indica l'i-simo componente del vettore $\epsilon^{(\lambda)}(\mathbf{n})$.

La distribuzione angolare del fotone è allora proporzionale a

$$D^{(1)}(\theta,\phi) = \sum_{i,j=1}^{3} (\delta_{ij} - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j)\,\langle 1,0,0|r_i|2,1,0\rangle\langle 1,0,0|r_j|2,1,0\rangle^* \tag{9}$$

per il processo (A); ed a

$$D^{(2)}(\theta,\phi) = \sum_{i,j=1}^{3} (\delta_{ij} - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j)\,\langle 1,0,0|r_i|2,1,1\rangle\langle 1,0,0|r_j|2,1,1\rangle^*. \tag{10}$$

per il processo (B).

(iv) Esprimendo $r_i = x, y, z$ come

$$x = -\frac{T_{1,1} - T_{1,-1}}{\sqrt{2}}, \quad y = -i\frac{T_{1,1} + T_{1,-1}}{\sqrt{2}}, \quad z = T_{1,0}, \tag{11}$$

in termini di un tensore sferico T, e utilizzando il teorema di Wigner-Eckart, *determinare* la distribuzione angolare (normalizzata) del fotone nei due casi di decadimento (A) e (B).

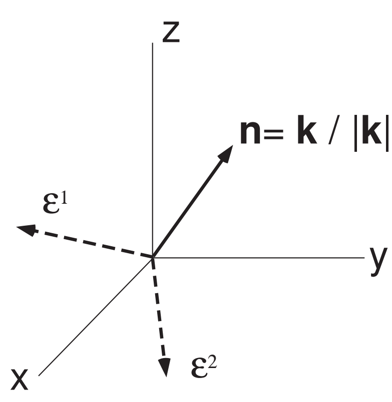

Figure 1:

Coefficienti di Clebsch-Gordan (e.g. $-2/3$ va letto come $-\sqrt{2/3}$)

$j_1 \otimes j_2$		J_1	J_2	. . .
		M_1	M_2	. . .
m_1	m_2	**C−G coefficients**		
m_3	m_4			
. . .	. . .			

Figure 2:

1 ⊗ 1		2								
		+2	2	1						
+1	+1	+1	+1	+1						
	+1	0	1/2	1/2	2	1	0			
	0	+1	1/2	−1/2	0	0	0			
			+1	−1	1/6	1/2	1/3			
			0	0	2/3	0	−1/3	2	1	
			−1	+1	1/6	−1/2	1/3	−1	−1	
						0	−1	1/2	1/2	2
						−1	0	1/2	−1/2	−2
								−1	−1	1

Figure 3:

Soluzione

Problema

(i) Sviluppando la (2) in $\mathbf{A}$ si ha

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = H_0 - \frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}) + O(\mathbf{A}^2)\ ,$$

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r}$$

Scegliendo la gauge (gauge di radiazione), in cui

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0, \qquad \mathbf{p}\cdot\mathbf{A} = 0,$$

si ha

$$-\frac{e}{2mc}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{p}) = -\frac{e}{mc}\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}$$

come operatore perturbativo.

(ii) Solo il secondo termine della (3) contribuisce per il decadimento. Per il resto, basta usare

$$\mathbf{p}_i = \frac{im}{\hbar}[H_0, \mathbf{r}_i],$$

e

$$\langle f|\mathbf{p}_i|i\rangle = \frac{im}{\hbar}\langle f|[H_0, \mathbf{r}_i]|i\rangle = \frac{im}{\hbar}(E_f - E_i)\langle f|\mathbf{r}_i|i\rangle\ .$$

(iii) Il tensore ρ_{ij} deve essere ortogonale a $\mathbf{n}$ nel senso che

$$\sum_i \mathbf{n}_i\rho_{ij} = 0, \qquad \sum_j \mathbf{n}_j\rho_{ij} = 0. \tag{12}$$

Poniamo allora (visto che $\mathbf{n}^2 = 1$)

$$\rho_{ij} = C\,(\delta_{ij} - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j). \tag{13}$$

Dall'ortonormalità dei vettori di polarizzazione, (7), segue che

$$\rho_{ik}\rho_{kj} = \rho_{ij}\ :$$

il coefficiente C nella (13) soddisfa

$$C^2 = C, \qquad \therefore \quad C = 1,$$

per cui

$$\rho_{ij} = \delta_{ij} - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j\ . \tag{14}$$

N.B. Le condizioni (12) e (7), da sole ammetterebbero anche una forma più generale:

$$\rho_{ij} = C\,(\delta_{ij} - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_j) + B\,\epsilon_{ijk}n_k\ , \tag{15}$$

con

$$C^2 - B^2 = C, \quad 2CB = B; \tag{16}$$

i.e.,

$$C = 1, \quad B = 0, \qquad \text{oppure} \qquad C = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{\pm i}{2}. \tag{17}$$

La soluzione con $B \neq 0$ può essere esclusa considerando il caso $\mathbf{n} = (0,0,1)$, dove i vettori di polarizzazione possono essere scelti come

$$\epsilon^{(1)} = (1,0,0), \qquad \epsilon^{(2)} = (0,1,0). \tag{18}$$

(iv) Per decadimento (A), dal teorema di W-E, l'unico termine che sopravvive nella (9) è quello con $i = j = 3$:

$$D^{(1)}(\theta,\phi) = (1 - n_3^2)(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2 |\langle 1,0||T^1||2,1\rangle|^2 = \frac{\sin^2\theta}{3} |\langle 1,0||T^1||2,1\rangle|^2;$$

la distribuzione normalizzata è data da

$$\mathcal{P} d\Omega = \frac{3}{8\pi} d\Omega \, \sin^2\theta. \tag{19}$$

Per decadimento (B), contribuiscono nella (10) i termini $(i,j) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$: calcolandoli con il teorema di W-E e sommando, si trova che

$$\begin{aligned} D^{(2)}(\theta,\phi) &= (1 - n_1^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} |\langle 1,0||T^1||2,1\rangle|^2 + (1 - n_2^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} |\langle 1,0||T^1||2,1\rangle|^2 \\ &= \frac{1 + \cos^2\theta}{6} |\langle 1,0||T^1||2,1\rangle|^2; \end{aligned} \tag{20}$$

(i termini $(1,2)$ e $(2,1)$ si cancellano) per cui la distribuzione normalizzata è data da

$$\mathcal{P} d\Omega = \frac{3}{16\pi} d\Omega \, (1 + \cos^2\theta). \tag{21}$$