Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
19 settembre 2011 (A.A. 10/11)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1.

Un elettrone, considerato come una particella senza spin e con la carica $-e$, si muove vincolato in un piano $(x-y)$, sottoposto ad un campo magnetico esterno B in direzione perpendicolare al piano. L'Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2, \qquad \mathbf{A} = (0, Bx, 0) \; . \tag{1}$$

(i) Trovare lo spettro d'energia (i livelli e la degenerazione), con un'opportuna separazione delle variabili.

(ii) Discutere l'effetto di un campo elettrico esterno costante e uniforme $\mathcal{E}$ in direzione di $\hat{x}$ sull'eventuale degenerazione dei livelli trovata al punto precedente.

Problema 2.

Lo stato coerente di un oscillatore unidimensioale

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{2}$$

è definito da

$$a\,|\beta\rangle = \beta\,|\beta\rangle, \qquad \langle\beta|\beta\rangle = 1, \tag{3}$$

dove β è un numero complesso arbitrario,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p; \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p. \tag{4}$$

(i) Trovare la funzione d'onda corrispondente allo stato $|\beta\rangle$ nella rappresentazione delle coordinate

$$\psi_\beta(x) \equiv \langle x|\beta\rangle \; , \tag{5}$$

risolvendo

$$a\,\psi_\beta(x) = \beta\,\psi_\beta(x) \; . \tag{6}$$

(ii) Qual'è la distribuzione del numero di "fononi" nello stato $|\beta\rangle$ (i.e., la probabilità che la misura dell'operatore $a^\dagger a$ nello stato $|\beta\rangle$ dia n)?

(Suggerimento: trovate i coefficienti dello sviluppo dello stato $|\beta\rangle$ in termini degli stati $|n\rangle$.)

(iii) Utilizzando i risultati dei punti precedenti discutere l'evoluzione temporale di $\psi_\beta(x)$.

Formulario

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \qquad [a, a^\dagger] = 1, \qquad a^\dagger a\,|n\rangle = |n\rangle \; , \tag{7}$$

SOLUZIONE

Problema 1.

(i)

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 = \frac{1}{2m}[\, p_x^2 + (p_y + \frac{eB}{c}x)^2\,] \; . \tag{8}$$

Visto che H commuta con p_y, si può porre

$$\Psi = \psi(x)\, e^{ipy/\hbar} \; , \tag{9}$$

dove p, $-\infty < p < \infty$ è un impulso arbitrario. Inserendola nell'equazione di Schroedinger, $H\Psi = E\,\Psi$, si ha

$$[\,\frac{1}{2m}\,p_x^2 + \frac{1}{2m}(p + \frac{eB}{c}x)^2\,]\,\psi(x) = E\,\psi(x)\,. \tag{10}$$

Introducendo

$$q = x + \frac{pc}{eB}, \qquad \Omega = \frac{eB}{mc},$$

$$P = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q} == -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} = p_x,$$

si ha

$$H = [\,\frac{1}{2m}\,P^2 + \frac{m\Omega^2 q^2}{2}\,]\,\psi(q) = E\,\psi(q)\,, \tag{11}$$

di cui soluzioni sono gli autostati dell'oscillatore unidimensionale con

$$E_N = \Omega\hbar(N + \frac{1}{2}) \; . \tag{12}$$

Visto che l'energia non dipende da p, ogni livello è infinitamente degenere, con funzioni d'onda

$$\Psi = \psi_N(x + \frac{pc}{eB})\, e^{ipy/\hbar} \; . \tag{13}$$

(ii)

$$H + \Delta H = \frac{1}{2m}[\, p_x^2 + (p_y + \frac{eB}{c}x)^2\,] + e\mathcal{E}\, x \; . \tag{14}$$

commuta ancora con p_y; ponendo sempre la forma fattorizzata (9) ψ soddisfa

$$[\,\frac{1}{2m}\,P^2 + \frac{m\Omega^2 q^2}{2} + e\mathcal{E}\,(q - \frac{pc}{eB})\,]\,\psi(q) = E\,\psi(q)\,, \tag{15}$$

Con un semplice spostamento

$$q' = q + \frac{e\mathcal{E}}{m\Omega^2}, \tag{16}$$

si ha

$$[\,\frac{1}{2m}\,P^2 + \frac{m\Omega^2 q'^2}{2} - \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\Omega^2} - \frac{e\mathcal{E}\,pc}{eB}\,]\,\psi(q) = E\,\psi(q)\,. \tag{17}$$

Questa è sempre l'oscillatore armonico unidimensionale, ma ora l'energia dipende ora anche da p:

$$E_{N,p} = \Omega\hbar(N + \frac{1}{2}) - \frac{e^2\mathcal{E}^2}{2m\Omega^2} - \frac{e\mathcal{E}\,pc}{eB} \tag{18}$$

per cui la degenerazione infinita dei livelli di Landau è eliminata.

Problema 2.

(i) Ponendo

$$\beta = a + ib, \qquad a = \Re\beta, \quad b = \Im\beta,$$

l'equazione per ψ_β diventa

$$\frac{\psi'_\beta}{\psi_\beta} = [-\frac{m\omega}{\hbar}(x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}a) + i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}b] \, . \tag{19}$$

Integrando, si trova

$$\psi_\beta(x) = C\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}a)^2 + i\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}bx} \, : \tag{20}$$

qusto descrive un pacchetto Gaussiano con il centro $x_0 = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Re\beta$ e con l'impulso $p_0 = \sqrt{2m\omega\hbar}\,\Im\beta$.

(ii) Poniamo

$$|\beta\rangle = \sum_n c_n \, |n\rangle \, , \qquad \langle n|n\rangle = 1. \tag{21}$$

L'eq. (6) dà

$$\sum_n c_n \sqrt{n} |n-1\rangle = \beta \sum_n c_n |n\rangle, \tag{22}$$

i.e.,

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \beta c_n, \tag{23}$$

perciò

$$c_{n+1} = \frac{\beta}{\sqrt{n+1}} c_n = \frac{\beta^2}{\sqrt{(n+1)n}} c_{n-1} = \ldots = \frac{\beta^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} c_0, \tag{24}$$

oppure

$$c_n = \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}\, c_0. \tag{25}$$

$$|\beta\rangle = c_0 \sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} \, |n\rangle \tag{26}$$

La probabilità di trovare in questo stato n fononi è

$$P_n = |c_0|^2 \, \frac{|\beta|^{2n}}{n!} \, ; \tag{27}$$

normalizzando con $\sum_n P_n = 1$, si determina c_0

$$c_0 = e^{-|\beta|^2/2}; \tag{28}$$

e la probabilità normalizzata,

$$P_n = e^{-|\beta|^2} \, \frac{|\beta|^{2n}}{n!} \, ; \tag{29}$$

i.e., è una distribuzione Poissoniana.

(iii)

$$H = \omega\hbar(a^\dagger a + \frac{1}{2}), \tag{30}$$

L'evoluzione temporale è descritta da

$$|\beta\rangle \to |\beta, t\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\beta\rangle = e^{-i\omega t(a^\dagger a + \frac{1}{2})} e^{-|\beta|^2/2} \sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} \, |n\rangle \, . \tag{31}$$

Visto che $a^\dagger a|n\rangle = n\,|n\rangle$,

$$|\beta, t\rangle = e^{-i\omega t/2} e^{-|\beta|^2/2} \sum_n \frac{\beta^n e^{-in\omega t}}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \; = e^{-i\omega t/2} |\beta e^{-in\omega t}\rangle\ , \tag{32}$$

i.e., il sistema resta uno stato coerente ma con

$$\beta \to \beta e^{-i\omega t}\ . \tag{33}$$

In vista del risultato del punto (i), questo significa che il sistema è sempre un pacchetto d'onda Gaussiana, ma con il centro x_0 e p_0 che variano col tempo come

$$x_0(t) = x_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin\omega t, \qquad p_0(t) = p_0 \cos\omega t - m\omega x_0\, \sin\omega t, \tag{34}$$

i.e., come in un oscillatore armonico classico.