Appello di Meccanica Quantistica II

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa,
20 luglio 2009 (A.A. 08/09)

Tempo a disposizione: 3 ore.

Problema 1.

Una particella di massa m è legata ad un potenziale delta tridimensionale,

$$V(\mathbf{r}) = g\,\delta^3(\mathbf{r})\,.$$

È noto che tale sistema ammette un solo stato legato, con la funzione d'onda relativa

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{-\kappa\, r}}{r}, \qquad \kappa = \frac{\sqrt{-2mE_0}}{\hbar}$$

dove $E_0(<0)$ è l'energia dello stato legato.[1] Questo sistema è sottoposto ad una perturbazione

$$\Delta H = \eta\, x\, e^{i\omega t} + h.c.$$

a partire da $t = 0$. Si vuole studiare il rate – la probabilità per un intervallo unitario del tempo – di ionizzazione, il processo in cui la particella si liberi dal legame. Si usi la teoria delle perturbazione al primo ordine in η; inoltre si assuma che lo stato finale possa essere approssimato da un'onda piana.

(a) Determinare la soglia per ω perché avvenga l'ionizzazione. Cosa succede al sistema, al di sotto di tale soglia?

(b) Determinare la distribuzione angolare della particella emessa, senza calcolare esplicitamente il rate della transizione.

(c) Calcolare il rate della transizione, determinando la distribuzione in $\mathbf{p} = (p, \theta, \phi)$ finale.

(d) Calcolare il rate della transizione, integrata in $\mathbf{p}$.

Formulario:

$$\int d^3r\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \frac{e^{-\kappa r}}{r} = \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2 + \kappa^2}\ .$$

[1] Non è richiesto di determinare E_0 in termini di $g, m, \hbar$. In realtà, in questo sistema un calcolo semplice e "standard" analogo al caso del potenziale $\delta(x)$ unidimensionale *non* è possibile. Ma questa questione non è rilevante per la considerazione di problema proposto.

Problema 2.

Si consideri un oscillatore armonico tridimensionale con un termine di perturbazione

$$H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}\, m\, \omega^2 \mathbf{r}^2 + H'. \tag{1}$$

(i) Prendendo

$$H' = \kappa\, x\, y\, z^2 \tag{2}$$

come perturbazione, calcolare le correzioni all'energia del *primo* stato di eccitazione, al *primo* ordine in κ. In quanti sottolivelli esso si divide?

(ii) Assumendo che il termine di perturbazione sia invece

$$H' = \lambda\, x\, y\, z\ , \tag{3}$$

calcolare la correzione all'energia dello *stato fondamentale* al *secondo* ordine in λ.

Soluzione

Problema 1.

(i)

$$\omega \geq -\frac{E_0}{\hbar}\ , \qquad E_0 = -\frac{\kappa^2 \hbar^2}{2m}.$$

(ii) Visto che lo stato iniziale è in onda S, mentre la perurbazione è

$$\propto x \propto T_{1,1} - T_{1,-1}.$$

Per il teorema di Wigner-Eckart, lo stato finale è nella stessa combinazione di tensori sferici: la distribuzione angolare di $\mathbf{p}$ finale è data da:

$$d\Omega\, \frac{3}{4\pi} \sin^2\theta \cos^2\phi = d\phi\, d\theta\, \frac{3}{4\pi}\ \sin\theta\ \sin^2\theta\ \cos^2\phi$$

$$\int d\Omega\, \frac{3}{4\pi} \sin^2\theta \cos^2\phi = 1\ .$$

(iii)

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |F_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i - \omega\hbar) d\Phi;$$

$$\begin{aligned} F_{fi} &= \eta \int d^3 r\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, x\, \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\ \frac{e^{-\kappa r}}{r} \\ &= \eta\, \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\ i\frac{\partial}{\partial k_x} \int d^3 r\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{-\kappa r}}{r} \\ &= \eta\, \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\ i\frac{\partial}{\partial k_x} \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2 + \kappa^2} = -8\pi i \eta \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\ \frac{k_x}{(\mathbf{k}^2 + \kappa^2)^2} \\ &= -8\pi\hbar^3\, \eta\, i\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\ \frac{p_x}{(\mathbf{p}^2 + \kappa^2\hbar^2)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

$$d\Phi = \frac{dp\, p^2\, d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad \delta(E_f - E_i - \omega\hbar) = \frac{m}{p}\delta(p - p^*), \qquad p^* = \sqrt{2m(\omega\hbar + E_0)}\ .$$

Perciò

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} 64\pi^2\hbar^6 |\eta|^2 \frac{\kappa}{2\pi} \frac{p_x^2}{(p^2 + \kappa^2\hbar^2)^4} \delta(p - p^*) \frac{m\, p\, dp\, d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad p^* = \sqrt{2m(\omega\hbar + E_0)}.$$

La distribuzione in impulso è data da (a parte normalizzazione)

$$\frac{p_x^2}{(p^2 + \kappa^2\hbar^2)^4} \delta(p - p^*) \frac{m\, p\, dp\, d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \qquad p^* = \sqrt{2m(\omega\hbar + E_0)}.$$

La part angolare coincide con quella ottenuta al punto (ii); integrando su p usando la delta function, si ha

$$w = \frac{32\, \kappa\, |\eta|^2 \hbar^2\, m\, p^{*\,3}}{3\, (p^2 + \kappa^2\hbar^2)^4}, \qquad p^* = \sqrt{2m(\omega\hbar + E_0)}.$$

Problema 2.

i) Il primo livello è tre volte degenere: $|n_1, n_2, n_3\rangle = |1, 0, 0\rangle$, $|0, 1, 0\rangle$, $|0, 0, 1\rangle$. Gli unici elementi di matrice non nulli sono quelli nondiagonali tra i due stati $|1, 0, 0\rangle$, $|0, 1, 0\rangle$:

$$\langle 1, 0, 0|H'|0, 1, 0\rangle = \langle 0, 1, 0||H'|1, 0, 0\rangle = \kappa \langle 1|x|0\rangle \langle 0|y|1\rangle \langle 0|z^2|0\rangle = \frac{\kappa}{4} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 . \tag{5}$$

Il livello si divide in tre sottolivelli, con le energie,

$$\frac{5\omega\hbar}{2} \pm \frac{\kappa}{4} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 , \qquad \frac{5\omega\hbar}{2}. \tag{6}$$

ii)

$$\Delta E = \sum{}' \frac{|H'_{(n_1,n_2,n_3;0,0,0)}|^2}{E^{(0)}_{(0,0,0)} - E^{(0)}_{(n_1,n_2,n_3)}} \tag{7}$$

dove $|n_1, n_2, n_3\rangle \neq |0, 0, 0\rangle$. Per H' del problema, soltanto $|n_1, n_2, n_3\rangle = |1, 1, 1\rangle$ contribuisce:

$$|H'_{(1,1,1;0,0,0)}|^2 = \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{2\, m\, \omega}\right)^3 ; \qquad E^{(0)}_{(0,0,0)} - E^{(0)}_{(1,1,1)} = -3\omega\hbar \tag{8}$$

$$\Delta E = -\frac{\lambda^2}{24\, \omega\hbar} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \tag{9}$$