Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
21 luglio 2011 (A.A. 10/11)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1.

Una particella di spin $\frac{1}{2}$ si muove in tre dimensioni. Il suo stato è descritto dalla funzione d'onda,

$$\Psi = C e^{-r/a} \begin{pmatrix} x \\ 2z \end{pmatrix} , \tag{1}$$

dove $C, a (> 0)$ sono costanti.

(i) Quali sarebbero i risultati possibili della misura del momento angolare totale e della sua componente, (J, J_z), in questo stato? E con quali probabilità relative?

(ii) Si misura la componente s_z dello spin della particella nello stato (1) con un apparato à la Stern-Gerlach *posto* nella direzione $(\theta = \pi/3, \phi = 0)$, dove θ, ϕ sono gli angoli nelle coordinate sferiche

$$(x,y,z) = r\,(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \; .$$

Trovare le probabilità $P_{\pm}$, che tale misura dia $\pm\frac{1}{2}$ come risultato.

(iii) Dire se lo stato (1) può essere un autostato di un'Hamiltoniana. Trovare una possibile Hamiltoniana e l'energia.

Problema 2.

Una particella libera, con l'impulso $\mathbf{p} = \mathbf{k}\hbar$,

$$\mathbf{k} = (k\sin\alpha, 0, -k\cos\alpha)$$

è incidente sulla superficie $z = 0$ (Fig. 1) Supponiamo che il potenziale sia dato da

$$V = \begin{cases} 0 & z > 0, \\ -V_0 & z < 0 \; . \end{cases} \tag{2}$$

La funzione d'onda è data da

$$\begin{aligned} \psi_> &= e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + A e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}, \qquad z > 0; \\ \psi_< &= B e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}, \qquad z < 0, \end{aligned} \tag{3}$$

dove

$$\mathbf{k}' = (k\sin\beta, 0, k\cos\beta) \; ; \qquad \mathbf{q} = (q\,\sin\gamma, 0, -q\,\cos\gamma)$$

e

$$q^2 = k^2 + \frac{2mV_0}{\hbar^2},$$

sono l'impulso $(/\hbar)$ dell'onda riflessa e dell'onda rifratta, rispettivamente (Fig. 1)

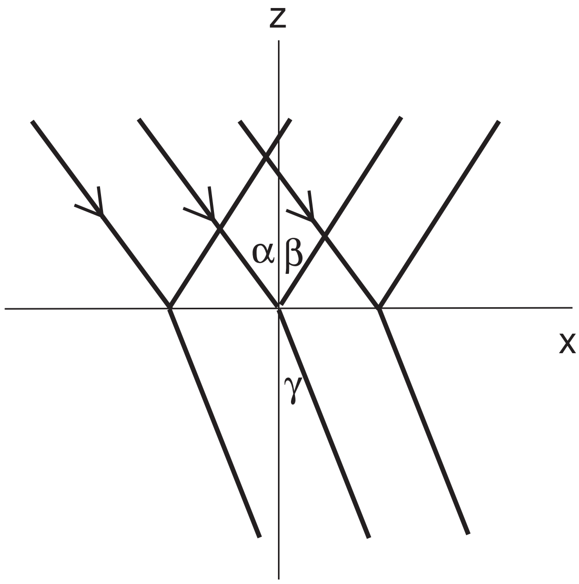

Figura 1:

(i) Imponendo la continuità della funzione d'onda attraverso la superficie $z = 0$ dimostrare che

$$\beta = \alpha, \qquad q \sin\gamma = k \sin\alpha\,, \qquad \therefore \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{q}{k} \equiv n \;\; \text{(legge di Snell)} \tag{4}$$

e trovare una relazione soddisfata dai coefficienti, A, B.

(ii) Imponendo la continuità della derivata $\partial\psi/\partial z$ attraverso il piano $z = 0$ trovare una seconda relazione per A e B. Risolvere il sistema di equazioni trovate al punto (i) e qui, per A e B, esprimendo il risultato in termini di α e γ.

(iii) Dimostrare che la probabilità totale (la densità di corrente) si conserva.

(iv) Nel caso di un fascio di fotoni (luce) non polarizzati, è noto che quando i due raggi uscenti (rifratti e riflessi) formano tra di loro 90 gradi, la luce riflessa è polarizzata ("legge di Brewster"). Trovare l'angolo di Brewster, i.e., l'angolo incidente tale che i due raggi uscenti formano 90 gradi, in termini dell'indice di rifrazione, n. Dire come è polarizzata la luce riflessa.

N.B. Al punto (iii) bisogna tenere conto dell'angolo incidente, l'angolo di riflessione e l'angolo di rifrazione, oltre che delle diverse velocità nei due medi.

SOLUZIONE

Problema 1.

(i)

$$x = r\sin\theta\cos\phi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,r\,(Y_{1,-1} - Y_{1,1}); \qquad 2z = 2r\cos\theta = 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,r\,Y_{1,0}$$

$$\psi = F(r)\,[\,(-Y_{1,1} + Y_{1,-1})|\uparrow\rangle + 2\sqrt{2}Y_{1,0}|\downarrow\rangle\,]\,. \tag{5}$$

Esprimendola in termini di autostati di J, J_z, si ha

$$\begin{aligned}\Psi &= \left(-|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle + (\sqrt{\tfrac{1}{3}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle)\right) + \\ &+ 2\sqrt{2}(\sqrt{\tfrac{2}{3}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle) \\ &= -|\tfrac{3}{2},\tfrac{3}{2}\rangle + 5\sqrt{\tfrac{1}{3}}|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

I valori possibili di (J, J_z) sono $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$, e $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, con relative probabilità

$$P_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})} = \frac{1}{10}, \qquad P_{(\frac{3}{2},-\frac{1}{2})} = \frac{5}{6}, \qquad P_{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} = \frac{1}{15}\,.$$

(ii) A direzione $\theta = \pi/3, \phi = 0$ si ha

$$x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}r, \qquad y = 0, \qquad z = \frac{1}{2}r\,.$$

perciò lo stato di spin osservato nella detta direzione è

$$|\psi\rangle = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\,.$$

Le probabilità per trovare lo spin $s_z = \pm 1/2$ sono

$$P_+ = \frac{3}{7}, \qquad P_- = \frac{4}{7}\,.$$

(iii)

$$\Psi = C e^{-r/a}\,r$$

è la funzione radiale $R_{2,1}$ dell'atomo di idrogeno. Visto che l'Hamiltoniana dell'atomo di idrogeno è indipendente dallo spin, e visto che il livello $n = 2$ è degenere, con $(\ell, m) = (1,1), (1,0), (1,-1), (0,0)$, e con spin $s_z = \pm 1/2$, la funzione d'onda (1), cioè (5), è infatti una combinazione lieare di stati di $n = 2$, i.e., è un autostato dell'Hamiltoniana

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2M} - \frac{Q^2}{r}, \tag{7}$$

dove

$$a = 2\,r_{Bohr} = \frac{2\hbar^2}{MQ^2}\,, \tag{8}$$

con l'energia

$$E = -\frac{Q^2}{8\,a}\,. \tag{9}$$

Visto che a (la funzione d'onda (1)) dipende solo dalla combinazione (8), non è possibile determinare M e Q e di conseguenza l'energia univocamente dalla funzione d'onda data.

Problema 2.

(i)

$$\psi_>(z=0) = e^{ik\sin\alpha x} + A\,e^{ik\sin\beta x} = \psi_<(z=0) = B\,e^{iq\sin\gamma x}$$

Questo deve essere valido per qualsiasi x, perciò risulta che la dipendenza da x è uguale in tutti i termini:

$$k\sin\alpha = k\sin\beta = q\sin\gamma; \qquad \therefore \quad \alpha = \beta, \quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{k}{q} \equiv n;$$

e

$$1 + A = B.$$

(ii)

$$-k\cos\alpha + kA\cos\beta = -qB\cos\gamma,$$

$$k\cos\alpha(1-A) = qB\cos\gamma, \qquad \therefore \quad B = (1-A)\,\frac{k}{q}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} = (1-A)\frac{\tan\gamma}{\tan\alpha}$$

$$A = \frac{\tan\gamma - \tan\alpha}{\tan\gamma + \tan\alpha}, \qquad B = 1 + A = \frac{2\tan\gamma}{\tan\gamma + \tan\alpha},$$

(iii) Consideriamo un'area unitaria nel piano (xy), e il flusso che incide su (che esce da) essa. L'onda incidente porta il flusso (densità di corrente) $k\hbar/m = v$ in direzione che fa angolo α rispetto al normale dell'area. Significa che il flusso utile che cade sull'area è dato da

$$J_{inc} = \frac{k\hbar}{m}\cos\alpha\,. \tag{10}$$

Analogamente per l'onda riflessa porta via il flusso

$$\frac{k\hbar}{m}\,|A|^2\cos\alpha\,;$$

l'onda rifratta porta

$$\frac{q\hbar}{m}\,|B|^2\cos\gamma\,.$$

La somma dei flussi uscenti è allora

$$J_{usc} = \frac{k\hbar}{m}\cos\alpha\left(|A|^2 + \frac{q}{k}\,\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\,|B|^2\right) = \frac{k\hbar}{m}\cos\alpha\left(|A|^2 + \frac{\tan\alpha}{\tan\gamma}\,|B|^2\right). \tag{11}$$

Tenendo conto del risultato al punto (ii) si ha che il flusso uscente totale è uguale a

$$\frac{k\hbar}{m}\cos\alpha,$$

che coincide con il flusso incidente (10).

(iv) Bisogna rislovere il sistema,

$$\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n\,.$$

Usando la prima relazione nella seconda, si ha per l'angolo di Brewster,

$$\tan\alpha = n, \qquad \therefore \quad \alpha_B = \arctan n\,.$$

L'onda riflessa è linearmente polarizza nella direzione di $\hat{y}$, non potendo essere polarizzata nella direzione del moto.