

Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa

24 giugno 2011 (A.A. 10/11)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1.

Un nucleo A di spin $J = \frac{3}{2}$ decade, a riposo, spontaneamente in due nuclei, B e C,

$$A \rightarrow B + C,$$

dove B ha spin-parità $\frac{1}{2}^+$ e C ha 0^+ . Prendendo la direzione dello spin di A come asse z , supponiamo che la distribuzione angolare misurata del nucleo C risulti proporzionale a

$$\sin^2 \theta d\Omega = \sin^3 \theta d\theta d\phi. \quad (1)$$

- (i) Assumendo che la parità sia conservata nel decadimento, che cosa si può dire sulla parità del nucleo A, avendo a disposizione soltanto i dati, (1)?
- (ii) Supponiamo che la misura dello spin del nucleo B, eseguita con l'apparecchio à la Stern-Gerlach situata nella direzione (θ, ϕ) , abbia dato risultati consistenti con relative probabilità:

$$P(s_z = \frac{1}{2}) = \cos^2 \theta, \quad P(s_z = -\frac{1}{2}) = \sin^2 \theta. \quad (2)$$

Utilizzando sia (1) che (2) che cosa si può dire sulla parità del nucleo A?

Problema 2.

Un sistema di due oscillatori armonici lineari accoppiati è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \omega \hbar (a^\dagger a + b^\dagger b + 1) + \lambda b^\dagger a + \lambda^* a^\dagger b, \quad (3)$$

dove

$$[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1, \quad [a, b] = [a, b^\dagger] = 0.$$

- (i) Per $\lambda = 0$, trovare lo spettro (gli autovalori e relative degenerazioni) dell'energia.
- (ii) Supponiamo che λ sia non nullo e reale. Definiamo

$$A \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b), \quad B \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a - b).$$

Determinare, utilizzando gli operatori $(A, A^\dagger)$, $(B, B^\dagger)$, lo spettro del sistema e discutere come esso dipende da λ .

- (iii) Supponiamo che il sistema si trovi stato $(N, 0)$, dove N si riferisce all' N -simo stato di eccitazione dell'oscillatore $(A, A^\dagger)$ (e lo stato fondamentale rispetto all'oscillatore $(B, B^\dagger)$). Ad un tratto si spegne λ . Quali sono le probabilità che il sistema si trovi in vari stati (m, n) di oscillatori disaccoppiati, $(a, a^\dagger)$, $(b, b^\dagger)$,
- (iv) Discutere lo spettro del sistema per λ complesso.
- (v) Esprimere gli stati coerenti del sistema con $\lambda \neq 0$

$$|\alpha, \beta\rangle \equiv e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2} e^{\alpha A^\dagger} e^{\beta B^\dagger} |0, 0\rangle$$

dove $|0, 0\rangle$ è lo stato fondamentale degli oscillatori (A, B) , i.e.,

$$A|0, 0\rangle = B|0, 0\rangle = 0, \quad \langle 0, 0|0, 0\rangle = 1,$$

in termini di stati coerenti del sistema con $\lambda = 0$.

N.B. Per un oscillatore unidimensionale lo stato normalizzato $|n\rangle$ è dato da

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0, \quad ||0\rangle|| = 1.$$

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, e.g., for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:	J	J	...
	M	M	...
m_1	m_2	Coefficients	
m_1	m_2		
.	.		
.	.		

[illegible]

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Figure 1:

SOLUZIONE

Problema 1.

- (i) Lo spin totale dello stato finale è $S_{tot} = \frac{1}{2}$. I valori del momento angolare orbitale possibili sono

$$L = 1, 2 .$$

Nel caso $L = 2$ la funzione d'onda dello stato finale è

$$\frac{2}{\sqrt{5}}Y_{2,2}(\theta, \phi)|\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}Y_{2,1}(\theta, \phi)|\uparrow\rangle . \quad (4)$$

La distribuzione angolare sarà data da

$$\frac{4}{5}|Y_{2,2}|^2 + \frac{1}{5}|Y_{2,1}|^2 = \frac{3}{8\pi}(\sin^4\theta + \sin^2\theta \cos^2\theta) = \frac{3}{8\pi}\sin^2\theta .$$

Nel caso $L = 1$ la funzione d'onda dello stato finale è

$$Y_{1,1}(\theta, \phi)|\uparrow\rangle = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}|\uparrow\rangle , \quad (5)$$

dando la distribuzione angolare

$$\frac{3}{8\pi}\sin^2\theta ,$$

i.e., la stessa del caso $L = 2$. La parità del nucleo A è data da $(-)^L$: dunque non è possibile concludere sulla parità di A, basandosi soltanto sui dati della distribuzione angolare di C.

- (ii) Visto che

$$\frac{\frac{1}{5}|Y_{2,1}|^2}{\frac{4}{5}|Y_{2,2}|^2} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} ,$$

i dati (1) e (2) presi insieme implicano $L = 2$. La parità del nucleo A è dunque +.

Problema 2.

- (i) Per $\lambda = 0$, il sistema è oscillatore bidimensionale isotropo, con

$$E_{n,m} = \omega\hbar(n+m+1), \quad n, m = 0, 1, 2, \dots .$$

Il livello N ($N = n+m = 0, 1, 2, \dots$) è $N+1$ volte degenere ($n = 0, 1, 2, \dots, N$).

- (ii) Gli operatori

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b), \quad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger+b^\dagger), \quad B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger-b^\dagger), \quad (6)$$

soddisfano le relazioni di commutatori

$$[A, A^\dagger] = 1, \quad [B, B^\dagger] = 1, \quad [A, B^\dagger] = [A, B] = 0 :$$

essi possono essere considerati come due oscillatori indipendenti. Risolvendo per a, b si hanno

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + B), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - B), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^\dagger + B^\dagger), \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(A^\dagger - B^\dagger), \quad (7)$$

e sostituendo questi nella (3) abbiamo

$$\begin{aligned} H &= \omega\hbar(A^\dagger A + B^\dagger B + 1) + \frac{\lambda}{2}[(A^\dagger - B^\dagger)(A + B) + (A^\dagger + B^\dagger)(A - B)] \\ &= (\omega\hbar + \lambda)A^\dagger A + (\omega\hbar - \lambda)B^\dagger B + \omega\hbar. \end{aligned} \quad (8)$$

- Per λ nell'intervallo

$$-\omega\hbar < \lambda < \omega\hbar.$$

Il sistema descrive due oscillatori indipendenti con frequenze

$$\omega_1 = \omega + \lambda/\hbar > 0, \quad \omega_2 = \omega - \lambda/\hbar > 0.$$

Lo spettro del sistema è

$$E_{N,M} = (\omega\hbar + \lambda)N + (\omega\hbar - \lambda)M + \omega\hbar, \quad N, M = 0, 1, 2, \dots$$

Ci sono degenerazioni dei livelli se $\lambda/\omega\hbar$ è un numero razionale. Altrimenti non ce ne sono.

- Per $\lambda = \omega\hbar$ o $\lambda = -\omega\hbar$, uno degli oscillatori sparisce dal sistema; esso descrive un oscillatore armonico con (e.g., per $\lambda = \omega\hbar$) frequenza 2ω ,

$$H = 2\omega\hbar(A^\dagger A + \frac{1}{2}).$$

- Per

$$|\lambda| > \omega\hbar$$

il sistema non ha uno stato fondamentale; esso descrive un sistema instabile.

(iii) Lo stato iniziale è dunque

$$|\psi\rangle = \frac{(A^\dagger)^N}{\sqrt{N!}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}2^{-N/2}(a^\dagger + b^\dagger)^N|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}2^{-N/2}\sum_{\ell} \binom{N}{\ell} (a^\dagger)^\ell (b^\dagger)^{N-\ell}|0\rangle.$$

Le probabilità per vari stati (m, n) sono

$$P_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{2^N} \binom{N}{m} & \text{se } m+n = N, \\ 0 & \text{se } m+n \neq N. \end{cases}$$

La somma delle probabilità è data da

$$\sum_{m,n} P_{m,n} = \frac{1}{2^N}(1+1)^N = 1.$$

(iv) Per $\lambda = |\lambda|e^{i\delta}$ complesso, basta ridefinire gli stati di uno degli oscillatori come

$$|n\rangle' \equiv e^{in\delta} |n\rangle$$

o, equivalentemente, ridefinire gli operatori come

$$\tilde{a} = e^{i\delta} a, \quad \tilde{a}^\dagger = e^{i\delta} a^\dagger .$$

In termini di nuovi operatori l'Hamiltoniana ha la forma di (3) con $\delta = 0$ (i.e., con λ reale). Perciò lo spettro del sistema non dipende dalla fase di λ .

(v) Visto che $A^\dagger$ e $B^\dagger$ commutano, si ha

$$|\alpha, \beta\rangle \equiv e^{-|\alpha|^2/2 - |\beta|^2/2} e^{\alpha A^\dagger + \beta B^\dagger} |0, 0\rangle = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2 - |\tilde{\beta}|^2/2} e^{\tilde{\alpha} \tilde{a}^\dagger + \tilde{\beta} \tilde{b}^\dagger} |0, 0\rangle$$

dove

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \beta), \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \beta) ;$$

lo stato è sempre uno stato coerente anche rispetto agli oscillatori a, b , ma con i parametri differenti, dati da $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$.