Prova Scritta di Meccanica Quantistica I

Facoltà di Scienze, M.F.N., Università degli Studi di Pisa
28 gennaio 2010 (A.A. 09/10)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1

Una particella di massa m e di carica q si muove in una dimensione, legato ad un centro di forza di richiamo armonico e inoltre sottoposto ad un campo elettrico esterno uniforme, ε. L'Hamiltoniana è:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - q\,\varepsilon\, x\ . \tag{1}$$

(i) Trovare lo spettro dell'energia, come funzione di ε.

(ii) Il sistema si trova nello stato fondamentale. Supponiamo che il campo elettrico vari a partire da $t = 0$ molto lentamente (variazione adiabatica), come

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos\Omega t\ , \qquad t \geq 0\,.$$

Determinare come il valor medio dell'energia $\bar{E}(t)$ dipende dal tempo. Qual'è il valore di $\bar{E}(t)$ a $t = \pi/\Omega$, $\bar{E}(\pi/\Omega)$?

[*Opzionale:* Verificare che il teorema di Feynman-Hellman

$$\frac{d}{dt}\bar{E}(t) = \langle\psi|\frac{\partial H}{\partial t}|\psi\rangle = q\,\varepsilon_0\,\Omega\,\sin\Omega t\,\langle\psi|x|\psi\rangle$$

sia soddisfatto da $\bar{E}(t)$ trovato sopra.]

(iii) Supponiamo invece che a $t = 0$ la direzione del campo elettrico si inverta all'improvviso, da ε a $-\varepsilon$. Trovare la probabilità che il sistema, dopo l'inversione, si trovi nello stato fondamentale della nuova Hamiltoniana.

(iv) Trovare le probabilità che il sistema si trovi nell'n-simo autostato della nuova Hamiltoniana. Calcolare il valore medio dell'energia $\bar{E}(t)$ a $t > 0$.

Problema 2.

Un nucleo di spin parità $J = (\frac{1}{2})^+$ e nello stato $|J, J_z\rangle = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ decade, a riposo, in due nuclei, A e B. Il nucleo A ha spin-parità, $J_A = (\frac{1}{2})^+$, mentre il nucleo B ha $J_B = 0^-$.

(i) Usando la conservazione del momento angolare totale, ma *senza* assumere la conservazione della parità, scrivere la funzione d'onda angolare-spin (del moto relativo) dello stato finale, in termini di due costanti ignoti, a (per la parte che viola la parità) e b (per la parte che conserva la parità).

(ii) Calcolare la distribuzione angolare del nucleo A. Dire se la distribuzione angolare del nucleo B è uguale a quella di A.

(iii) Quale sarebbero le risposte alle domande (ii) se la parità fosse conservata?

(iv) Siano $P^+(\theta,\phi)$ e $P^+(\theta,\phi)$ le probabilità che lo spin del nucleo A nella direzione del suo moto, i..e.,

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

sia $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ rispettivamente. Determinare il rapporto $P^-(\theta,\phi)/P^+(\theta,\phi)$. Quanto fa tale rapporto a $\theta = 0$?

Formulario

Armoniche sferiche

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\theta, \qquad Y_{2,0} = \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1),$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\, e^{\pm i\phi}, \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\,\cos\theta\,\sin\theta\, e^{\pm i\phi},$$

Oscillatore unidimensionale standard

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\,; \qquad \psi_n(x) = C_n H_n(\alpha x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} = C_n H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}\,,$$

dove

$$C_n = \left(\frac{\alpha}{\pi^{1/2}2^n n!}\right)^{1/2} = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{2^n n!}\right)^{1/2}; \quad \alpha \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,;$$

$$H_0(x){=}1, \qquad H_1(x) = 2x, \qquad H_2(x){=}4x^2 - 2, \qquad \dots\,.$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p; \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p\,; \qquad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a - a^\dagger)\,.$$

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle, \quad n = 1, 2, \dots, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,.$$

Coefficienti di Clebsch-Gordan (e.g. $-2/3$ va letto come $-\sqrt{2/3}$)

$j_1 \otimes j_2$		**J_1**	**J_2**	…
		M_1	**M_2**	…
m_1	**m_2**	**C−G coefficients**		
m_3	**m_4**			
…	…			

Figura 1:

1/2 ⊗ 1/2		1	1	0	1
		+1	0	0	−1
+1/2	+1/2	1			
+1/2	−1/2		1/2	1/2	
−1/2	+1/2		1/2	−1/2	
−1/2	−1/2				1

Figura 2:

1 ⊗ 1/2		3/2	3/2	1/2	3/2	1/2	3/2
		+3/2	+1/2	+1/2	−1/2	−1/2	−3/2
+1	+1/2	1					
+1	−1/2		1/3	2/3			
0	+1/2		2/3	−1/3			
0	−1/2				2/3	1/3	
−1	+1/2				1/3	−2/3	
−1	−1/2						1

Figura 3:

Soluzione

Problema 1.

(i) Scrivendo H come

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x-x_0)^2 - \frac{m\omega^2}{2}x_0^2 \ , \qquad x_0 = \frac{q\varepsilon}{m\omega^2} \ , \tag{2}$$

i.e.,

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x-x_0)^2 - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2} \ , \tag{3}$$

Cambiando le variabili,

$$\tilde{x} = x - x_0, \qquad \tilde{p} = p,$$

il sistema è un oscillatore armonico con il centro spostato di x_0,

$$E_n = \omega\hbar(n+\frac{1}{2}) - \frac{q^2\varepsilon^2}{2m\omega^2}. \tag{4}$$

(ii) Nella variazione adiabatica il sistema rimane nello “stato fondamentale” istantaneo, con l’energia

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{2}\omega\hbar - \frac{q^2\varepsilon^2(t)}{2m\omega^2} = \frac{1}{2}\omega\hbar - \frac{q^2\varepsilon_0^2\cos^2\Omega t}{2m\omega^2} \ . \tag{5}$$

$$\bar{E}(\Omega/\pi) = \frac{1}{2}\omega\hbar - \frac{q^2\varepsilon_0^2}{2m\omega^2} \tag{6}$$

Il teorema di Feynman-Hellman dà

$$\frac{d}{dt}\bar{E}(t) = \Omega\,\langle\psi(\Omega)|\frac{\partial H}{\partial\Omega t}|\psi(\Omega)\rangle = q\,\varepsilon_0\,\Omega\,\sin\Omega t\,\langle\psi|x|\psi\rangle \ .$$

Ma

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \langle\psi|x-x_0+x_0|\psi\rangle = x_0 = \frac{q\varepsilon_0\cos\Omega t}{m\omega^2},$$

per cui

$$\frac{d}{dt}\bar{E}(t) = \frac{\Omega\,q^2\varepsilon_0^2\cos\Omega t\,\sin\Omega t}{m\omega^2} \ .$$

Ma questa è esattamente quello che si ottiene facendo derivata esplicita d/dt della (5).

(iii) La funzione d’onda rimane invariata,

$$\psi_0(x) = C_0\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2} \ , \qquad C_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \ ,$$

mentre il sistema (l’Hamiltoniana) cambia rapidamente. Dopo $t > 0$ la probabiltà che il sistema rimane nello stato fondamentale è

$$|\langle\tilde{\psi}_0|\psi_0\rangle|^2 = |C_0|^2\left|\int dx\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x+x_0)^2}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x-x_0)^2}\right|^2 = e^{-\frac{2m\omega}{\hbar}x_0^2} = e^{-\frac{2q^2\varepsilon^2}{\hbar m\omega^3}} \ . \tag{7}$$

(iv) Introduciamo gli operatori di creazione e di annichilazione per oscilatore originale e invertito,

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(x-x_0) + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(x-x_0) - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p \ ,$$

$$x - x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(a - a^\dagger)\;.$$

e

$$b = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(x + x_0) + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p \qquad b^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,(x + x_0) - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\,p\;,$$

$$x + x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(b + b^\dagger); \quad p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,(b - b^\dagger)\;.$$

Segue che

$$b = a + 2\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x_0 = a + f, \qquad f = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x_0 = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\frac{q\varepsilon}{m\omega^2}$$

Scrivendo il vettore di stato come

$$|\Psi\rangle = \sum_N c_N\,|N\rangle,$$

dove $|N\rangle$ è l'N-simo stato della nuova Hamiltoniana

$$b^\dagger b\,|N\rangle = N\,|N\rangle\;,$$

la condizione che essa è lo stesso dello stato prima dell'inversione, i.e., lo stato fondamentale dell'oscillatore originale dà

$$0 = a\,|\Psi\rangle = (b - f)\,\sum_N c_N\,|N\rangle = \sum_N c_N\,\sqrt{N}|N-1\rangle - f\sum_N c_N\,|N\rangle = \sum_N (\sqrt{N+1}\,c_{N+1} - f\,c_N)|N\rangle = 0.$$

Segue che

$$c_N = \frac{f}{\sqrt{N}}c_{N-1} = \frac{f^2}{\sqrt{N(N-1)}}c_{N-2} = \ldots = \frac{f^N}{\sqrt{N!}}\,c_0$$

La condzione di normalizzazione dà

$$\sum_N P_N = |c_0|^2\sum\frac{|f|^{2N}}{N!} = |c_0|^2\,e^{|f|^2} = 1, \qquad \therefore \quad c_0 = e^{-|f|^2/2}\;.$$

La probabilità per lo stato fondamentale $n = 0$ è

$$|c_0|^2 = e^{-|f|^2}$$

ed è consistente con la (7).

Il valor medio dell'energia è dato da

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\omega\hbar - \frac{q^2\varepsilon_0^2}{2m\omega^2} + \sum_N P_N\,N\,\omega\hbar = \frac{1}{2}\omega\hbar - \frac{q^2\varepsilon_0^2}{2m\omega^2} + \omega\hbar|f|^2\;.$$

Si può vedere inoltre che lo stato $|\Psi\rangle$ è uno stato coerente: infatti,

$$|\Psi\rangle = \sum_N c_N\,|N\rangle = e^{-|f|^2/2}\sum_N\frac{f^N}{\sqrt{N!}}\,\frac{(b^\dagger)^N}{\sqrt{N!}}\,|0\rangle = e^{-|f|^2/2}\sum_N\frac{(f^N b^\dagger)^N}{N!}\,|0\rangle = e^{-|f|^2/2}e^{fa^\dagger}\,|0\rangle\;.$$

Il pacchetto d'onda oscillerà senza cambiare il profilo.

Problema 2.

(i) La conservazione del momento angolare dice che ci sono due valori $L = 0$ e $L = 1$ possibili. La parte di $L = 0$ viola la parità, mentre la parte di $L = 1$ rispetta la parità. La funzione d'onda è

$$\begin{aligned} \Psi &= a Y_{0,0} \,|\uparrow\rangle + b \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}} Y_{1,1} \,|\downarrow\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}} Y_{1,0} \,|\uparrow\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left[(a - b\cos\theta) \,|\uparrow\rangle - b \sin\theta \, e^{i\phi} \,|\downarrow\rangle \right] \end{aligned} \tag{8}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \,.$$

(ii)

$$P(\theta,\phi)\, d\Omega = \frac{1}{4\pi}(|a|^2 + |b|^2 - 2\Re(ab^*)\cos\theta)\, d\Omega = \frac{1}{4\pi}[1 - 2\Re(ab^*)\cos\theta]\, d\Omega \,.$$

Visto che

$$P(\pi - \theta, \phi + \pi) \neq P(\theta, \phi)$$

in generale ($\Re(ab^*) \neq 0$) la distribuzione di B è diversa da quella di A. Appunto la parità è violata.

(iii) In questo caso, $a = 0$, e la distribuzione angolare è isotropa, e le distribuzioni di A e di B sono uguali.

(iv) Le funzionid d'onda di spin per $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \pm\frac{1}{2}$ sono

$$\psi^+ = \cos\tfrac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\tfrac{\theta}{2} |\downarrow\rangle, \qquad \psi^- = \sin\tfrac{\theta}{2} |\uparrow\rangle - e^{i\phi} \cos\tfrac{\theta}{2} |\downarrow\rangle \,.$$

Proiettando la funzione d'onda (8) sui due stati di spin, si ha

$$P^+ = \frac{1}{4\pi}(a - b)^2 \cos^2\tfrac{\theta}{2}, \qquad P^- = \frac{1}{4\pi}(a + b)^2 \sin^2\tfrac{\theta}{2},$$

Perciò

$$\frac{P^-}{P^+} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \tan^2\tfrac{\theta}{2} \,.$$

A $\theta = 0$

$$\frac{P^-}{P^+} = 0.$$