# Prova Scritta di Meccanica Quantistica

*28 gennaio 2014 (A.A. 13/14)*

Tempo a disposizione: 3 ore

Per il Compitino II risolvere il Problema 2;
Per MQI, risolvere i Problemi 1 e 2;
Per MQII / MQ annuale, risolvere i Problemi 2 e 3, o in alternativa, 1 e 3.

## Problema 1

Una particella di massa $m$ si muove nella semiretta $x \in (0, \infty)$, sottoposta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} -g\,\delta(x-a)\,, & x > 0\,, \\ \infty & x < 0\,. \end{cases} \qquad (a > 0, g > 0) \tag{1}$$

Si vuole studiare lo spettro di questo sistema, in particolare, le proprietà di eventuali stati legati.

**(i)** Scrivere le condizioni di continuità (o discontinuità) da imporre sulla funzione d'onda $\psi(x)$, $\psi'(x)$, a $x = a$.

**(ii)** Per $E < 0$, scrivere la forma generale della funzione d'onda, tenendo conto solo della condizione al contorno a $x = +\infty$.

**(iii)** Tenendo conto della condiziona al punto (i) e della condizione al contorno a $x = 0$, trovare l'equazione implicita che determina l'energia di uno stato legato.

**(iv)** Analizzando la detta equazione trovare il valore critico di $a$, $a = a_{cr}$, in termini di $m, g, \hbar$, dimostrando che il sistema ammette uno stato legato per $a > a_{cr}$; nessuno per $a \leq a_{cr}$.

**(v)** Trovare approssimativamente l'energia dello stato legato, nei due limiti:

1. $a$ è appena al di sopra di $a_{cr}$, i.e., $(a - a_{cr})/a_{cr} \ll 1$.
2. $a \gg a_{cr}$.

**(vi)** Per quanto riguarda lo spettro continuo, $E \geq 0$, qual'è la degenerazione dei livelli?

## Problema 2

Un sistema di due spin $\frac{1}{2}$ è descritto dalla funzione d'onda:

$$|\Psi\rangle = \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

dove

$$s_z\,|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, \tag{3}$$

etc.

**(i)** Esprimere lo stato (2) come una combinazione lineare di stati di spin totale, $|S_{tot}, S_{tot\,z}\rangle$.

**(ii)** Si misura

$$O = \mathbf{S}_{tot} \cdot \mathbf{B}, \tag{4}$$

dove $\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{s}^{(1)} + \mathbf{s}^{(2)}$, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ($\mathbf{B}$ è un vettore costante), nello stato di cui sopra. Dire quali sono i possibili risultati della misura, e con quali relative probabilità.

**(iii)** Si accende la seguente Hamiltoniana all'istante $t = 0$

$$H = f\,t\,\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(2)}\,, \tag{5}$$

($f$ è una costante). Determinare l'evoluzione temporale della funzione d'onda e trovare la probablità che una misura di $s_z^{(1)}$ fatta ad un istante $t$ ($t > 0$) dia il risultato $+\frac{1}{2}$.

# Problem 3

Un atomo di idrogeno (carica dell'elettrone = $-e$) è immerso in un campo elettrico $\mathbf{E} = (0, 0, \mathcal{E})$ debole, dove $\mathcal{E}$ è una costante.

(i) Scrivere il potenziale di perturbazione $V$ corrispondente a tale campo esterno.

(ii) Dire quali elementi di matrice di $V$ tra gli stati di $n = 2$,

$$|2,0,0\rangle\,, \quad |2,1,0\rangle\,, \quad |2,1,1\rangle\,, \quad |2,1,-1\rangle, \tag{6}$$

sono non nulli. In quanti sottolivelli si divide il livello $n = 2$?

(iii) Calcolare le correzioni all'energia del livello $n = 2$ dovuto alla perturbazione $V$, al primo ordine in $\mathcal{E}$.

(iv) Dire come il campo elettrico di cui sopra influenza la riga di assorbimento della transizione

$$|n = 1\rangle \to |n = 2\rangle,$$

i.e., in quante linee questa linea ($\alpha$ di Lyman) si divide in generale, e con quale spostamento della lunghezza d'onda.

(v) In approssimazione di dipolo, dire come il numero delle righe cambia se

1. la luce ha la direzione di propagazione, $\hat{\mathbf{k}} = (0, 0, 1)$ ;
2. la luce non polarizzata ha la direzione di propagazione, $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1, 0)$ ;
3. la luce ha la direzione di propagazione, $\hat{\mathbf{k}} = (0, 1, 0)$ ed è polarizzata linearmente con $\varepsilon = (0, 0, 1)$.

**Formulario**

$$\psi_{(n,\ell,m)} = R_{n,\ell}(r)\,Y_{\ell,m}(\theta,\phi).$$

$$\begin{aligned} R_{1,0}(r) &= 2\,r_B^{-3/2}\,e^{-r/r_B}\,, \\ R_{2,0}(r) &= \tfrac{1}{2\sqrt{2}}\,r_B^{-3/2}\left(2 - \frac{r}{r_B}\right)e^{-r/2r_B}\,, \\ R_{2,1}(r) &= \tfrac{1}{2\sqrt{6}}\,r_B^{-3/2}\,\frac{r}{r_B}\,e^{-r/2r_B}. \end{aligned}$$

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\,\cos\theta, \qquad Y_{2,0} = \sqrt{\tfrac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1),$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,e^{\pm i\phi}, \qquad Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\,\cos\theta\,\sin\theta\,e^{\pm i\phi},$$

$$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\tfrac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\,e^{\pm 2i\phi}\,.$$

# Soluzioni

## Problema 1.

**(i)** Il valore della funzione d'onda deve essere continuo,

$$\psi(a+) = \psi(a-) \ . \tag{7}$$

Integrando l'equazione di Schrödinger nell'intervallo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ si trova la condìzione sulla derivata

$$\psi'(a+) - \psi'(a-) = -\frac{2mg}{\hbar^2}\psi(a) \ . \tag{8}$$

**(ii)**

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x}, & 0 < x < a \ , \\ Ce^{-\kappa x}, & x > a \ , \end{cases} \qquad \kappa = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \tag{9}$$

**(iii)** La condizione al contorna a $x = 0$ è semplicemente $\psi(0) = 0$, i.e.,

$$A + B = 0 \ . \tag{10}$$

Le condizioni a $x = a$ sono:

$$Ae^{\kappa a} + Be^{-\kappa a} = Ce^{-\kappa a} \ ; \tag{11}$$

$$Ae^{\kappa a} - Be^{-\kappa a} = -Ce^{-\kappa a}(1 - \frac{2mg}{\kappa\hbar^2}) \ ; \tag{12}$$

La condizione perché (10)-(12) abbiano soluzioni non banali risulta

$$e^{-2\kappa a} + \frac{\kappa\hbar^2}{mg} - 1 = 0 \ . \tag{13}$$

Questa equazione determina $\kappa$ quindi l'energia dello (eventuale) stato legato.

**(iv)** Dai grafici

$$y = e^{-2\kappa a}, \qquad y = 1 - \frac{\kappa\hbar^2}{mg} \ , \tag{14}$$

si evince che per

$$a > a_{cr} = \frac{\hbar^2}{2mg} \tag{15}$$

i due grafici si intersecano a $\kappa > 0$ quindi il sistema ha uno stato legato; per

$$a \leq \frac{\hbar^2}{2mg} \tag{16}$$

l'unica intersezione è a $\kappa = 0$ quindi non ci sono stati legati.

**(v)** Dai grafici si vede che $\kappa \to 0+$ a $a \to a_{cr}+$, quindi $\kappa$ è piccola per $(a - a_{cr})/a_{cr} \ll 1$. Sviluppando perciò la (13) in $\kappa$ fino al secondo ordine, si ha

$$\kappa \simeq \frac{1}{2a^2}(2a - \frac{\hbar^2}{mg}) = \frac{1}{a^2}(a - a_{cr}) \ . \tag{17}$$

Nel limite opposto, il primo termine della (13) è piccola; la soluzione è vicina a

$$\kappa = \frac{mg}{\hbar^2} \ : \tag{18}$$

la soluzione del sistema senza la parete a $x = 0$. La prima correzione è data da

$$\kappa \simeq \frac{mg}{\hbar^2}(1 - e^{-2mga/\hbar^2}) \ . \tag{19}$$

**(vi)** I livelli del continuo sono singoli. Utilizzando la condizione $\psi(0) = 0$, il teorema di non degenerazione nello spettro discreto (con $\psi \to 0$, a $x = \pm\infty$) può essere generalizzato in questi casi.

# Problema 2.

i)

$$\Psi(0) = \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|1,0\rangle - |0,0\rangle}{2} - \frac{|1,-1\rangle}{\sqrt{2}}; \tag{20}$$

ii)

$$O = \mathbf{S}_{tot} \cdot \mathbf{B} = B S_{tot,z}. \tag{21}$$

$$\Psi = \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|S_{tot,z} = 0\rangle - |S_{tot,z} = -1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{22}$$

I possibili risultati della misura sono $S_{tot,z} = 0$ o $S_{tot,z} = -1$, con relative probabilità, $\frac{1}{2}$ per ambedue.

iii)

$$\mathbf{s}^{(1)} \cdot \mathbf{s}^{(2)} = \frac{1}{2}(\mathbf{S}_{tot}^2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & S_{tot} = 1 \\ -\frac{3}{4}, & S_{tot} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

L'equazione di Schrödinger è, per le componenti $S_{tot} = 1$ e $S_{tot} = 0$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(1)}(t) = \frac{a}{4} t\, \psi^{(1)}(t), \qquad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(0)}(t) = -\frac{3a}{4} t\, \psi^{(0)}(t). \tag{24}$$

Queste equazioini si risolvono facilmente introducendo la variable

$$T \equiv t^2 : \tag{25}$$

le equazioni sopra diventano

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \psi^{(1)}(t) = \frac{a}{8} \psi^{(1)}(t), \qquad i\hbar \frac{\partial}{\partial T} \psi^{(0)}(t) = -\frac{3a}{8} \psi^{(0)}(t), \tag{26}$$

con la soluzione,

$$\psi^{(1)}(t) = e^{-iat^2/8\hbar} \psi^{(1)}(0), \qquad \psi^{(0)}(t) = e^{3iat^2/8\hbar} \psi^{(0)}(0), \tag{27}$$

A $t = 0$

$$\Psi(0) = \frac{|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|1,0\rangle - |0,0\rangle}{2} - \frac{|1,-1\rangle}{\sqrt{2}}; \tag{28}$$

all'istante $t$ la funzione d'onda è

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= e^{iat^2/8\hbar} [\frac{e^{-iat^2/4\hbar}|1,0\rangle - e^{iat^2/4\hbar}|0,0\rangle}{2} - \frac{e^{-iat^2/4\hbar}|1,-1\rangle}{\sqrt{2}}] \\ &= e^{iat^2/8\hbar} [\frac{-i \sin \frac{at^2}{4\hbar} |\uparrow\downarrow\rangle + \cos \frac{at^2}{4\hbar} |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{e^{-iat^2/4\hbar}|\downarrow\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}]. \end{aligned} \tag{29}$$

La probabilità richiesta è:

$$P(s_z^1 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{at^2}{4\hbar}. \tag{30}$$

## Problema 3.

**(i)**

$$V = e\mathcal{E}\, z \tag{31}$$

**(ii)** $V$ è un tensore sferico di rango 1,

$$\sim T_0^1\ .$$

Dal teorema di Wigner-Eckart si evince che gli unici elementi di matrice non nulli sono tra $|2,0,0\rangle$ e $|2,1,0\rangle$,

$$\langle 2,0,0|V|2,1,0\rangle\ , \qquad \langle 2,1,0|V|2,0,0\rangle\ . \tag{32}$$

**(iii)** Secondo la teoria delle perturbazioni degenere al primo ordine, le correzioni sono dati dagli autovalori della matrice

$$\langle 2,\ell,m|V|2,\ell',m'\rangle\ . \tag{33}$$

Ora

$$\begin{aligned}\langle 2,0,0|V|2,1,0\rangle &= e\mathcal{E}\int dr\, r^2 R_{2,0}\, r\, R_{2,1}\int d\cos\theta\, d\phi\, Y_{0,0}^*\cos\theta\, Y_{1,0} \\ &= -3\,e\mathcal{E}\, r_B = \langle 2,1,0|V|2,0,0\rangle\end{aligned} \tag{34}$$

$$\Delta E = \pm 3e\mathcal{E}\, r_B, \qquad |\psi_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2,1,0\rangle \pm |2,0,0\rangle), \tag{35}$$

$$\Delta E = 0, \qquad |\psi_{3,4}\rangle = |2,1,\pm 1\rangle \tag{36}$$

**(iv)** Il livello $n=1$, $|\Psi_0\rangle = |\psi_{1,0,0}\rangle$ non è corretto al primo ordine in $\mathcal{E}$. La riga $n=1 \to n=2$ si divide in tre righe con le lunghezze d'onda

$$\frac{hc}{E_2-E_1}, \quad |\Psi_0\rangle \to |\Psi_{3,4}\rangle, \tag{37}$$

$$\frac{hc}{E_2-E_1+\Delta E}, \quad |\Psi_0\rangle \to |\Psi_2\rangle, \qquad \frac{hc}{E_2-E_1-\Delta E}, \quad |\Psi_0\rangle \to |\Psi_1\rangle, \tag{38}$$

**(v)** L'ampiezza di transizione è proporzionale a

$$\langle \Psi_{finale}|\varepsilon\cdot\mathbf{r}|\Psi_{iniziale}\rangle\ :$$

segue che il numero delle righe $N$ è:

1. $N=1$ se la luce ha la direzione di propagazione, $\hat{\mathbf{k}} = (0,0,1)$, poiché le uniche transizioni possibili sono $|\Psi_0\rangle \to |\Psi_{3,4}\rangle$;
2. $N=3$ se la luce non polarizzata ha la direzione di propagazione, $\hat{\mathbf{k}} = (0,1,0)$ perché in questo caso le polarizzazioni sono in direzioni $\varepsilon = (1,0,0),(0,0,1)$: transizioni sono possibili su tutti gli stati $\Psi_{1,2,3,4}$;
3. $N=2$ se la luce ha la direzione di propagazione, $\hat{\mathbf{k}} = (0,1,0)$ ed è polarizzata linearmente in direzione $\varepsilon = (0,0,1)$, poiché le uniche transizioni possibili sono $|\Psi_0\rangle \to |\Psi_{1,2}\rangle$.